Séminaire BOURBAKI Octobre 2012
65ème année, 2012-2013, n$^{\text{o}}$ 1059

CORPS D'OKOUNKOV
[d'après Okounkov, Lazarsfeld-Mustaţă et Kaveh-Khovanskii]

par **Sébastien BOUCKSOM**

INTRODUCTION

La théorie des corps d'Okounkov, développée indépendamment par Lazarsfeld et Mustaţă [LM09] et par Kaveh et Khovanskii [KK09], systématise une construction due à Okounkov [Ok96, Ok00] ; elle généralise le lien entre variétés toriques et polytopes rationnels, en associant un corps convexe à tout fibré en droites sur une variété algébrique projective, via l'introduction d'une valuation adéquate sur le corps de fonctions de cette variété.

Afin d'énoncer dans un langage élémentaire une des conséquences principales de la théorie des corps d'Okounkov, donnons-nous un corps algébriquement clos k de caractéristique arbitraire, et considérons une k-algèbre graduée $A = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} A_m$ (à laquelle on impose toujours qu'elle soit commutative, et que $k = A_0 \subsetneq A$). La *fonction de Hilbert* de A est définie par $H_A(m) := \dim_k A_m$. On suppose de plus que A est intègre, ce qui assure que $\mathbb{N}(A) := \{m \in \mathbb{N} \mid H_A(m) \neq 0\}$ est un semigroupe de $\mathbb{N}$, non réduit à 0 (donc infini) par hypothèse.

Si A est de type fini, sa fonction de Hilbert H_A est à valeurs finies, et le classique théorème de Hilbert-Serre permet alors de montrer l'existence de $e \in \mathbb{Q}_+^*$ (la *multiplicité* de A) telle que

$$H_A(m) = e\frac{m^\kappa}{\kappa!} + o\left(m^\kappa\right)$$

lorsque $m \in \mathbb{N}(A)$ tend vers l'infini, avec $\kappa := \operatorname{tr.deg}(A/k) - 1$, $\operatorname{tr.deg}(A/k)$ désignant le degré de transcendance sur k du corps des fractions de A.

Ce résultat admet la généralisation importante suivante, démontrée dans [KK09].

Théorème 0.1. — *Soit $A \neq k$ une k-algèbre graduée, et supposons que A se plonge dans une k-algèbre graduée intègre et de type fini. Si on pose $\kappa := \operatorname{tr.deg}(A/k) - 1$, alors il existe $e \in \mathbb{R}_+^*$ tel que*

$$H_A(m) = e\frac{m^\kappa}{\kappa!} + o\left(m^\kappa\right)$$

lorsque $m \in \mathbb{N}(A)$ tend vers l'infini.

D'un point de vue géométrique, l'hypothèse sur A signifie qu'elle peut se réaliser comme sous-algèbre de l'anneau des coordonnées homogènes d'une variété projective X, pour un plongement adéquat dans un espace projectif.

Ceci s'applique en particulier à l'algèbre des sections $R(X,L) := \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} H^0(X,mL)$ d'un fibré en droites arbitraire L sur X. L'étude asymptotique de la fonction de Hilbert $m \mapsto h^0(mL) := \dim_k H^0(X,mL)$, classiquement appelée *problème de Riemann-Roch*, est une question centrale de la géométrie algébrique, très subtile dès la dimension 2 du fait que $R(X,L)$ n'est alors plus de type fini en général. Dans son article fondateur [Zar62], Zariski étudie ce prolème sur les surfaces, et montre qu'il existe un polynôme P de degré au plus 2 tel que $h^0(mL)-P(m)$ est bornée pour $m \in \mathbb{N}(X,L) := \mathbb{N}(R(X,L))$; en caractéristique nulle, Cutkosky et Srinivas ont montré bien plus tard que $h^0(mL) - P(m)$ est même périodique pour $m \gg 1$ [CS93].

En dimension $n = \dim X$ quelconque et caractéristique nulle, Iitaka montre dans [Iit71] l'existence d'une estimée

$$C^{-1}m^\kappa \leq h^0(mL) \leq Cm^\kappa$$

pour $m \in \mathbb{N}(X,L)$ grand, avec $\kappa = \operatorname{tr.deg}(R(X,L)/k)) - 1 \in \{0,1,...,n\}$ (ou $\kappa = -\infty$ si $R(X,L) = k$), connu sous le nom de *dimension d'Iitaka* de L. Si L est *gros*, i.e. si $\kappa = n$, un théorème de Fujita permet de montrer que le *volume*

$$\operatorname{vol}(L) := \lim_{m\to\infty} \frac{h^0(mL)}{m^n/n!}$$

existe dans $]0,+\infty[$; celui-ci a fait l'objet de nombreux travaux (cf. [Laz04]), basés pour la plupart sur le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg, donc valables uniquement en caractéristique nulle.

La théorie des corps d'Okounkov permet non seulement d'obtenir simplement l'existence du volume et ses principales propriétés en caractéristique arbitraire [LM09], mais permet de plus d'étudier le cas de fibrés non gros avec une précision jusque-là inaccessible, comme l'illustre le théorème 0.1.

On va maintenant décrire dans ses grandes lignes la démonstration du théorème 0.1, et son lien avec la théorie des corps convexes. On suppose A plongée dans l'anneau des coordonnées homogènes R d'une variété algébrique projective $X \subset \mathbb{P}^N_k$, dont on note $n = \dim X$ la dimension. La construction qui suit repose sur le choix d'une valuation $v : K^* \to \mathbb{Z}^n$ sur le corps de fonctions K de X, i.e. un homomorphisme de groupes tel que $v(f+g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$ pour $f,g \in K^*$, relativement à un ordre total sur le groupe $\mathbb{Z}^n$; on demande de plus que le groupe des valeurs $v(K^*)$ de v soit égal à $\mathbb{Z}^n$. La théorie élémentaire des valuations montre d'une part que de telles valuations abondent, et d'autre part qu'elles satisfont la propriété cruciale

$$\dim_k E = \operatorname{card} v(E \setminus \{0\}) \tag{1}$$

pour tout k-espace vectoriel de dimension finie $E \subset K$. Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, la valuation v induit de façon naturelle une fonction $v : R_m \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^n$, et $S_m := v(A_m \setminus \{0\})$ est ainsi un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^n$ pour chaque $m \in \mathbb{N}$, de cardinal $H_A(m) = \dim_k A_m$. On a de plus $S_m + S_l \subset S_{m+l}$ pour $m, l \in \mathbb{N}$, puisque $A_m \cdot A_l \subset A_{m+l}$. Le point clé est alors le théorème d'équirépartition suivant :

Théorème 0.2. — *Soit $S = (S_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de $\mathbb{Z}^n$ telle que $S_m + S_l \subset S_{m+l}$ pour $m, l \in \mathbb{N}$, et posons $\mathbb{N}(S) := \{m \in \mathbb{N} \mid S_m \neq \emptyset\}$. Alors $\Delta := \overline{\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m} S_m}$ est un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$, et la suite $\frac{1}{m} S_m \subset \mathbb{R}^n$ s'équirépartit dans Δ, au sens où*

$$\lim_{n \in \mathbb{N}(S), m \to +\infty} \frac{1}{m^{\dim \Delta}} \sum_{x \in \frac{1}{m} S_m} f(x) = \int_\Delta f \, d\mu,$$

pour toute fonction $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$, avec μ la mesure de Lesbegue sur l'enveloppe affine de Δ, correctement normalisée.

En outre, Δ est compact ssi $\operatorname{card} S_m = O(m^{\dim \Delta})$, *et on a dans ce cas*

$$\lim_{m \in \mathbb{N}(S), m \to \infty} \frac{\operatorname{card} S_m}{m^{\dim \Delta}} = \mu(\Delta) \in]0, +\infty[.$$

On montre ensuite que le convexe fermé Δ' associé à la suite $S'_m := v(R_m \setminus \{0\})$ est de dimension maximale n, et donc compact selon le théorème 0.2, puisque $\operatorname{card} S'_m = \dim_k R_m = O(m^n)$ par le théorème de Hilbert-Serre. Le convexe Δ associé à $S_m = v(A_m \setminus \{0\})$, étant contenu dans un translaté de Δ', est donc lui aussi compact, et on obtient le théorème 0.1. On appelle $\Delta = \Delta_v(A)$ le *corps d'Okounkov de A* (relatif à v).

À la suite des articles fondateurs [Ok96, Ok00, LM09, KK09], la théorie des corps d'Okounkov s'est développée dans différentes directions : étude de la géométrie des corps d'Okounkov [KLM12, AKL12, Sep12] ; cas des variétés avec une action de groupe réductif [KK12], qui étoffe les résultats originaux de [Ok96, Ok00] ; analogues arithmétiques en géométrie d'Arakelov [Yua09, BC11] ; liens avec la théorie du pluri-potentiel et le diamètre transfini [WN09] ; comportement asymptotique de certaines dégénérescences équivariantes («test configurations») [WN10, Sze11] ; construction de dégénérescences vers des variétés toriques [And11], dans la lignée de [Tei03] ; utilisation de ces dégénérescences pour construire des systèmes intégrables [HK12].

Plutôt que de survoler ces différents développements, le présent texte prend le parti de présenter en détail les aspects fondamentaux de la théorie. Le lecteur trouvera dans l'excellent article [LM09] ainsi que dans [KK09, dBP12, CS12a, CS12b] une foule d'informations complémentaires.

Le texte est organisé comme suit. La première partie étudie les semigroupes de $\mathbb{Z}^n$, selon un point de vue adapté aux corps d'Okounkov. On y montre en particulier le théorème d'équirépartition énoncé ci-dessus.

La seconde partie présente quelques résultats appartenant à la théorie élémentaire des valuations, le but étant de montrer que les valuations de rang rationnel maximal sont exactement celles qui sont adaptées à la construction d'Okounkov.

La troisième partie décrit le cœur de la construction des corps d'Okounkov, et démontre en particulier le théorème 0.1 ci-dessus.

Enfin, la quatrième et dernière partie porte un regard plus géométrique sur les corps d'Okounkov. On montre sur des exemples que la géométrie du corps d'Okounkov d'un fibré en droites dépend de manière essentielle du choix de la valuation, et on détaille également la construction des corps d'Okounkov numériques, en suivant [LM09], avec en sus quelques faits nouveaux concernant la dimension numérique.

Remerciements. Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Charles Favre, Mattias Jonsson et Victor Lozovanu pour leurs suggestions et leur relecture attentive de ce texte. Je remercie également chaleureusement David Witt-Nyström et Huayi Chen, au contact desquels j'ai pu affiner ma compréhension des corps d'Okounkov.

1. SEMIGROUPES DISCRETS

Dans cette partie, V désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. On étudie la structure des semigroupes de V engendrant un groupe discret ; on en déduit un résultat d'équirépartition pour les semigroupes gradués, qui est le point central de la théorie des corps d'Okounkov.

Les résultats de cette partie sont pour l'essentiel issus de [KK09, §1], qui est une systématisation de [Ok96, §2.5].

1.1. Semigroupes discrets d'un espace vectoriel

Un *semigroupe* $S \subset V$ est un sous-ensemble non vide de V stable par addition. On note

– $\mathbb{Z}S$ le sous-groupe de V engendré par S ;
– $\mathbb{R}S$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par S ;
– $C(S)$ le cône convexe engendré par S ;
– $\overline{C}(S)$ son adhérence, et $\mathring{C}(S)$ son intérieur relatif, i.e. son intérieur dans $\mathbb{R}S$.

La propriété de semigroupe donne immédiatement que

$$\mathbb{Z}S = \{x - y \mid x, y \in S\} \tag{2}$$

et

$$\overline{C}(S) = \overline{\left\{\frac{s}{m} \mid s \in S,\, m \in \mathbb{N}^*\right\}}. \tag{3}$$

On définit la *dimension réelle* $\dim_{\mathbb{R}}(S)$ de S comme étant celle de $\mathbb{R}S$ (qui peut être strictement plus petite que $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}S)$ dans cette généralité).

Définition 1.1. — *La* régularisation *d'un semigroupe $S \subset V$ est le semigroupe $S^{\mathrm{reg}} := \overline{C}(S) \cap \mathbb{Z}S$.*

Notons que $\overline{C}(S^{\mathrm{reg}}) = \overline{C}(S)$ et $\mathbb{Z}S^{\mathrm{reg}} = \mathbb{Z}S$.

On dira que S est un *semigroupe discret* si $\mathbb{Z}S$ est discret, donc un réseau de $\mathbb{R}S$. À isomorphisme près, les semigroupes discrets d'un espace vectoriel sont exactement les sous-semigroupes de $\mathbb{Z}^d$ pour un certain d.

On prendra garde au fait que la terminologie choisie est un peu abusive, puisqu'il se peut que S forme un sous-ensemble discret de V sans que $\mathbb{Z}S$ soit discret. C'est par exemple le cas de $S = \mathbb{N} + \mathbb{N}\sqrt{2} \subset \mathbb{R}$, qui n'est donc pas un semigroupe discret en notre sens.

Exemple 1.2. — Puisque tout sous-groupe discret de $\mathbb{R}$ est monogène, il existe pour tout semigroupe discret $S \subset \mathbb{R}$ un réel $e \in \mathbb{R}$ tel que $S^{\mathrm{reg}} = \mathbb{Z}e$ ou $S^{\mathrm{reg}} = \mathbb{N}e$; il est également bien connu que $S^{\mathrm{reg}} \setminus S$ est fini (un cas particulier du théorème 1.3 ci-dessous).

Le but de ce qui suit est de montrer que tout semigroupe discret S de V coïncide asymptotiquement avec S^{reg} dans $\mathring{C}(S)$.

THÉORÈME 1.3. — *Soit $S \subset V$ un semigroupe discret. Pour tout cône convexe σ à base compacte contenue dans $\mathring{C}(S)$, l'ensemble $(S^{\mathrm{reg}} \setminus S) \cap \sigma$ est fini.*

LEMME 1.4. — *Soit $S \subset V$ un semigroupe discret. Si S est de type fini, alors il existe un ensemble fini $F \subset S^{\mathrm{reg}}$ tel que $S^{\mathrm{reg}} = F + S$.*

Remarque 1.5. — D'après [BG09, Proposition 2.7], la conclusion signifie précisément que $k[S^{\mathrm{reg}}]$ est un $k[S]$-module de type fini, pour n'importe quel corps k donné. Le lemme 1.4 implique en particulier que

$$S \text{ de type fini} \implies S^{\mathrm{reg}} \text{ de type fini},$$

qui est le contenu du classique *lemme de Gordan* (voir par exemple [Oda88, Proposition 1.1]). L'exemple de $S := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y \geq x + 1\}$ montre que S^{reg} peut être de type fini sans que S le soit.

Démonstration. — Par hypothèse, il existe un ensemble fini $A \subset S$ tel que $S = \sum_{a \in A} \mathbb{N}a$, et donc $\overline{C}(S) = C(S) = \sum_{a \in A} \mathbb{R}_+ a$. Puisque $\sum_{a \in A} [0, 1]a$ est compact et $\mathbb{Z}S$ est un groupe discret,

$$F := \mathbb{Z}S \cap \left(\sum_{a \in A} [0, 1]a \right)$$

est fini. Montrons que $S^{\mathrm{reg}} = F + S$. On commence par observer que $F \subset \mathbb{Z}S \cap \overline{C}(S) = S^{\mathrm{reg}}$, et donc $F + S \subset S^{\mathrm{reg}}$. Réciproquement, chaque $u \in S^{\mathrm{reg}} = \overline{C}(S) \cap \mathbb{Z}S$ s'écrit $u = \sum_{a \in A} t_a a$ avec $t_a \in \mathbb{R}_+$. En notant $m_a := \lfloor t_a \rfloor \in \mathbb{N}$ la partie entière de t_a et en posant $v := \sum_{a \in A} m_a a \in S$, on voit que

$$w := u - v = \sum_{a \in A} (t_a - m_a) a$$

appartient à F puisque u et v sont dans $\mathbb{Z}S$ et $t_a - m_a \in [0, 1]$, d'où le résultat. $\square$

Démonstration du théorème 1.3. — Fixons une norme $\|\cdot\|$ sur V. Puisque $\mathbb{Z}S$ est discret (et fermé), il s'agit de montrer qu'il existe $R > 0$ tel que tout $x \in \mathbb{Z}S \cap \sigma$ avec $\|x\| \geq R$ appartient à S. Le lemme 1.6 ci-dessous montre que

$$\mathring{C}(S) = \bigcup_{T \subset S} \mathring{C}(T),$$

où $T \subset S$ parcourt l'ensemble des sous-semigroupes de type fini de S. Comme la base de σ est un compact de $\mathring{C}(S)$, elle est aussi contenue dans un des $\mathring{C}(T)$. Puisque $\mathbb{Z}S$ est de type fini sur $\mathbb{Z}$, on peut également supposer que $\mathbb{Z}S = \mathbb{Z}T$, ce qui nous ramène au cas où $S = T$ est de type fini.

Dans ce cas, il existe $u_0 \in S$ tel que $u_0 + S^{\mathrm{reg}} \subset S$. En effet, le point (ii) du lemme 1.4 fournit un ensemble fini $F \subset S^{\mathrm{reg}}$ tel que $S^{\mathrm{reg}} = F + S$. Comme chaque élément de F est en particulier dans $\mathbb{Z}S = \{x - y \mid x, y \in S\}$, il existe $u_0 \in S$ tel que $u_0 + f \in S$ pour tout $f \in F$, et donc $u_0 + S^{\mathrm{reg}} \subset S$.

Comme σ est à base compacte dans $\mathring{C}(S)$, on peut trouver un cône σ' à base compacte dans $\mathring{C}(S)$ et contenant σ dans son intérieur relatif. Puisque $\sigma \cap \{\|x\| = 1\}$ est un compact de l'intérieur relatif de σ', on peut trouver $R > 0$ tel que

$$(\sigma \cap \{\|x\| = 1\}) - t^{-1}u_0 \subset \sigma'$$

pour tout $t \geq R$, ce qui revient à dire que

$$(\sigma \cap \{\|x\| \geq R\}) - u_0 \subset \sigma'$$

puisque σ et σ' sont des cônes. Pour tout $x \in \mathbb{Z}S \cap \sigma$ tel que $\|x\| \geq R$, on a donc $x - u_0 \in \sigma'$, d'où $x \in u_0 + (\mathbb{Z}S \cap \sigma')$, et donc $x \in S$ puisque $u_0 + S^{\mathrm{reg}} \subset S$. □

Lemme 1.6. — *Soient W un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et (C_α) une famille croissante de convexes de W. Alors $\bigcup_\alpha \mathring{C}_\alpha$ coïncide avec l'intérieur de $\bigcup_\alpha C_\alpha$.*

Démonstration. — Soit x un point de l'intérieur de $\bigcup_\alpha C_\alpha$. On peut trouver $x_1, ..., x_N \in \bigcup_\alpha C_\alpha$ tel que x soit dans l'intérieur du polytope $\mathrm{Conv}\{x_1, ..., x_N\}$. Mais l'un des C_α contient tous les x_i, donc aussi $\mathrm{Conv}\{x_1, ..., x_N\}$, et on en déduit que x est dans l'intérieur de C_α. □

Bien que ce ne soit pas indispensable pour la suite, on conclut cette partie par une caractérisation intéressante des semigroupes discrets de type fini, tirée de [BG09, Corollary 2.10].

Proposition 1.7. — *Soit $S \subset V$ un semigroupe discret.*

(i) Le semigroupe S est de type fini ssi le cône convexe engendré $C(S)$ est de type fini, i.e. un cône polyhédral.

(ii) Le semigroupe S^{reg} est de type fini ssi le cône convexe fermé engendré $\overline{C}(S)$ est un cône polyhédral rationnel de $\mathbb{R}S$.

Démonstration. — (i) Si S est de type fini, $C(S)$ est trivialement de type fini. Supposons réciproquement que $C(S)$ soit un cône polyhédral. Ses rayons extrémaux sont nécessairement de la forme $\mathbb{R}_+a$ avec $a \in S$, donc il existe un ensemble fini $A \subset S$ tel que $C(S) = \sum_{a\in A} \mathbb{R}_+a$. Comme dans la démonstration du lemme 1.4, on a alors $S^{\mathrm{reg}} = F + T$ avec

$$F := \mathbb{Z}S \cap \left(\sum_{a\in A}[0,1]a\right),$$

qui est fini, et $T := \sum_{a\in A} \mathbb{N}a$. Donnons-nous un corps k. Comme dans la remarque 1.5, $S^{\mathrm{reg}} = F + T$ signifie que $k[S^{\mathrm{reg}}]$ est un $k[T]$-module de type fini. Puisque T est de type fini, l'anneau $k[T]$ est noethérien, et le sous-module $k[S]$ est donc lui aussi de type fini sur $k[T]$. La k-algèbre $k[S]$ est donc *a fortiori* de type fini, et il n'est pas difficile d'en déduire que S est de type fini comme semigroupe (cf. [BG09, Proposition 2.7]).

(ii) Dire que $\overline{C}(S)$ est un cône polyhédral rationnel de $\mathbb{R}S$ signifie qu'il existe un ensemble fini $A \subset S$ tel que $\overline{C}(S) = \sum_{a\in A} \mathbb{R}_+a$; on vérifie alors comme précédemment que l'ensemble fini F défini comme ci-dessus engendre S^{reg}. □

Remarque 1.8. — Il n'est pas suffisant dans (ii) de supposer que $\overline{C}(S)$ est simplement polyhédral, comme le montre $S := \left\{(u,v) \in \mathbb{N}^2 \mid v \geq u\sqrt{2}\right\}$.

1.2. Semigroupes gradués

On appellera *semigroupe gradué* un semigroupe $S \subset \mathbb{N} \times V$. On note $\pi_V : \mathbb{N} \times V \to V$ la projection sur le second facteur, et on pose pour chaque $m \in \mathbb{N}$

$$S_m := \pi_V\left(S \cap (\{m\} \times V)\right).$$

On supposera toujours que S_m est non vide pour au moins un $m \geq 1$. La suite $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de V ainsi définie est additive, au sens où

$$S_m + S_l \subset S_{m+l} \text{ pour tous } m, l \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Réciproquement, toute suite additive $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de V définit un semigroupe gradué $S := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (\{m\} \times S_m)$. On introduit

$$\mathbb{N}(S) := \{m \in \mathbb{N} \mid S_m \neq \emptyset\},$$

qui est un semigroupe de $\mathbb{N}$, donc coïncide avec $m(S)\mathbb{N}$ en dehors d'un ensemble fini, pour un certain entier $m(S) \in \mathbb{N}^*$. On pose également

$$\kappa(S) := \dim_{\mathbb{R}}(S) - 1.$$

Rappelons que $\overline{C}(S)$ désigne le cône convexe fermé engendré par S, qui est ici contenu dans $\mathbb{R}_+ \times V$.

Définition 1.9. — *Si $S \subset \mathbb{N} \times V$ est un semigroupe gradué, on définit la* base *de S comme*

$$\Delta(S) := \pi_V\left(\overline{C}(S) \cap (\{1\} \times V)\right).$$

La base $\Delta(S)$ de S est un convexe fermé de V, de dimension $\kappa(S)$. La projection π_V induit un isomorphisme affine entre $\mathbb{R}S \cap (\{1\} \times V)$ et le sous-espace affine $\mathrm{Aff}(S) \subset V$ engendré par $\Delta(S)$; l'espace vectoriel sous-jacent $\vec{\mathrm{Aff}}(S)$ est donc égal à $\pi_V\left(\mathbb{R}S \cap (\{0\} \times V)\right)$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ on a par construction $\frac{1}{m}S_m \subset \Delta(S)$, et il résulte de (3) que

$$\Delta(S) = \overline{\bigcup_{m \geq 1} \tfrac{1}{m}S_m}. \tag{5}$$

On dit comme précédemment qu'un semigroupe gradué $S \subset \mathbb{N} \times V$ est *discret* si le groupe $\mathbb{Z}S \subset \mathbb{Z} \times V$ qu'il engendre est discret dans $\mathbb{R} \times V$. C'est par exemple le cas si tous les S_m sont contenus dans un réseau fixe de V.

Notre but est de montrer, pour tout semigroupe gradué discret S, que les ensembles $\frac{1}{m}S_m$ sont équirépartis dans $\Delta(S)$, relativement à une mesure limite que nous décrivons maintenant.

Définition 1.10. — *Soit $S \subset \mathbb{N} \times V$ un semigroupe gradué discret. Le sous-espace affine* $\mathrm{Aff}(S) \subset V$ *engendré par* $\Delta(S)$ *possède une structure entière naturelle, définie par le réseau*

$$\vec{\mathrm{Aff}}(S)_{\mathbb{Z}} := \pi_V\left(\mathbb{Z}S \cap (\{0\} \times V)\right)$$

de $\vec{\mathrm{Aff}}(S) = \pi_V\left(\mathbb{R}S \cap (\{0\} \times V)\right)$. *On note μ_S la mesure de Lebesgue de* $\mathrm{Aff}(S)$ *normalisé par cette structure entière.*

Lemme 1.11. — *Il existe un isomorphisme affine* $\phi : \mathrm{Aff}(S) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{\kappa(S)}$, *de partie linéaire* $\vec{\phi} : \vec{\mathrm{Aff}}(S) \to \mathbb{R}^{\kappa(S)}$, *vérifiant :*

(i) $\vec{\phi}(\vec{\mathrm{Aff}}(S)_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}^{\kappa(S)}$.

(ii) $\phi(\frac{1}{m}S_m^{\mathrm{reg}}) = \frac{1}{m}\mathbb{Z}^{\kappa(S)} \cap \Delta$ *pour tout* $m \in \mathbb{N}m(S)$, *avec* $\Delta := \phi(\Delta(S))$.

La propriété (i) montre en particulier que $\phi_*(\mu_S)$ est la mesure de Lebesgue standard de $\mathbb{R}^{\kappa(S)}$.

Démonstration. — Notons $\kappa := \kappa(S) = \dim_{\mathbb{R}}(S) - 1$, et soit $\rho : \mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}$ la restriction de la première projection $\mathbb{Z} \times V \to \mathbb{Z}$. Puisque $\mathrm{Im}\,\rho = \mathbb{Z}m(S)$ et que toute suite exacte de $\mathbb{Z}$-modules libres est scindée, il existe une $\mathbb{Z}$-base $(u_0, ..., u_\kappa)$ de $\mathbb{Z}S$ telle que $\rho(u_0) = m(S)$ et $(u_1, ..., u_\kappa)$ engendre $\mathrm{Ker}\,\rho = \mathbb{Z}S \cap (\{0\} \times V)$ et . On définit ϕ comme la composition

$$\mathrm{Aff}(S) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}S \cap (\{1\} \times V) \hookrightarrow \mathbb{R}S = \mathbb{R}u_0 + ... + \mathbb{R}u_\kappa \to \mathbb{R}u_1 + ... + \mathbb{R}u_\kappa \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^\kappa.$$

On voit facilement que ϕ est un isomorphisme affine, de partie linéaire $\vec{\phi}$ donnée par

$$\vec{\mathrm{Aff}}(S) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}S \cap (\{0\} \times V) = \mathbb{R}u_1 + ... + \mathbb{R}u_\kappa \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^\kappa,$$

d'où (i). L'isomorphisme $\mathrm{Aff}(S) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}S \cap (\{1\} \times V)$ envoie $\frac{1}{m}S_m^{\mathrm{reg}}$ sur

$$\tfrac{1}{m}\left(\{m\} \times S_m^{\mathrm{reg}}\right) = \tfrac{1}{m}\overline{C}(S) \cap \mathbb{Z}S \cap (\{m\} \times V) = \tfrac{1}{m}\left(\overline{C}(S) \cap \rho^{-1}(\{m\})\right),$$

qui coïncide avec

$$\tfrac{1}{m}\overline{C}(S) \cap \left(\mathbb{Z}u_1 + ... + \mathbb{Z}u_\kappa + \frac{m}{m(S)} u_{\kappa+1} \right)$$

lorsque m est un multiple de $m(S)$ (et est vide sinon). Le point (ii) en découle facilement. $\square$

On peut maintenant énoncer le résultat d'équirépartition des ensembles $\frac{1}{m}S_m$ dans $\Delta(S)$ évoqué ci-dessus.

Théorème 1.12. — *Soit $S \subset \mathbb{N}\times V$ un semigroupe gradué discret. Pour toute fonction continue à support compact $f : V \to \mathbb{R}$, on a alors*

$$\lim_{m\in\mathbb{N}(S),\, m\to+\infty} \frac{1}{m^{\kappa(S)}} \sum_{x\in\frac{1}{m}S_m} f(x) = \int_{\Delta(S)} f\, d\mu_S.$$

On commence par une reformulation du théorème 1.3 pour les semigroupes gradués.

Lemme 1.13. — *Soit $S \subset \mathbb{N} \times V$ un semigroupe gradué discret, et soit $K \subset V$ un convexe compact contenu dans l'intérieur relatif de $\Delta(S)$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ assez grand on a alors*

$$K \cap \tfrac{1}{m}S_m = K \cap \tfrac{1}{m}S_m^{\mathrm{reg}}.$$

Démonstration. — Puisque le cône $\sigma := \mathbb{R}_+ (\{1\} \times K) \subset \mathbb{R} \times V$ est contenu dans l'intérieur relatif de $\overline{C}(S) = \mathbb{R}_+ (\{1\} \times \Delta(S))$, le théorème 1.3 montre que $S \cap \sigma$ et $S^{\mathrm{reg}} \cap \sigma$ coïncident en dehors d'un ensemble fini. Il en résulte que

$$S \cap \sigma \cap (\{m\} \times V) = \{1\} \times (S_m \cap (mK))$$

est égal à

$$S^{\mathrm{reg}} \cap \sigma \cap (\{m\} \times V) = \{1\} \times (S_m^{\mathrm{reg}} \cap (mK))$$

pour tout $m \gg 1$. $\square$

Démonstration du théorème 1.12. — **Étape 1.** On montre d'abord le résultat avec S^{reg} à la place de S. Soit $\phi : \mathrm{Aff}(S) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{\kappa(S)}$ l'isomorphisme affine donné par le lemme 1.11, et posons $g := \left(f|_{\mathrm{Aff}(S)}\right) \circ \phi^{-1}$. Par la propriété (ii) du lemme 1.11, on a alors

$$\frac{1}{m^{\kappa(S)}} \sum_{x\in\frac{1}{m}S_m^{\mathrm{reg}}} f(x) = \frac{1}{m^{\kappa(S)}} \sum_{y\in\Delta\cap\frac{1}{m}\mathbb{Z}^{\kappa(S)}} g(y)$$

pour tout $m \in \mathbb{N}m(S)$. Comme pour tout ensemble convexe, le bord $\partial\Delta$ de Δ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^{\kappa(S)}$. Il s'ensuit que $\mathbf{1}_\Delta g$ est intégrable au sens de Riemann, ce qui donne

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m^{\kappa(S)}} \sum_{y\in\Delta\cap\frac{1}{m}\mathbb{Z}^{\kappa(S)}} g(y) = \int_\Delta g\, d\lambda,$$

avec λ la mesure de Lebesgue standard sur $\mathbb{R}^{\kappa(S)}$. Mais on a $\phi_* (\mu_S) = \lambda$, donc $\int_\Delta g\, d\lambda = \int_{\Delta(S)} f\, d\mu_S$, d'où le résultat.

Étape 2. On considère maintenant le cas général. Au vu de l'étape précédente, il reste à établir que

$$\sum_{x\in\frac{1}{m}S_m^{\mathrm{reg}}\setminus\frac{1}{m}S_m} f(x) = o\left(m^{\kappa(S)}\right) \tag{6}$$

lorsque $m \in \mathbb{N}(S)$ tend vers l'infini. Soit B une boule fermée de V (pour une certaine norme) contenant le support de f, et soit $\varepsilon > 0$. Comme $\Delta(S) \cap B$ est convexe et compact, on peut trouver un convexe compact $K \subset V$ contenu dans l'intérieur relatif de $\Delta(S)$ et une fonction de troncature $\chi \in C_c^0(V)$ telle que $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi \equiv 1$ sur $(\Delta(S) \cap B) \setminus K$, et $\int_{\Delta(S)} \chi \, d\mu_S \leq \varepsilon$.

Le lemme 1.13 implique que, pour tout $m \gg 1$, $\frac{1}{m}S_m^{\mathrm{reg}} \setminus \frac{1}{m}S_m$ est contenu dans le complémentaire de K, et donc $\chi \equiv 1$ sur $B \cap \left(\frac{1}{m}S_m^{\mathrm{reg}} \setminus \frac{1}{m}S_m\right)$. En posant $\|f\| := \sup |f|$, on obtient

$$\sum_{x\in\frac{1}{m}S_m^{\mathrm{reg}}\setminus\frac{1}{m}S_m} |f(x)| \leq \|f\| \sum_{x\in\frac{1}{m}S_m^{\mathrm{reg}}} \chi(x).$$

L'étape 1 donne

$$\frac{1}{m^{\kappa(S)}} \sum_{x\in\frac{1}{m}S_m^{\mathrm{reg}}} \chi(x) \to \int_{\Delta(S)} \chi \, d\mu_S \leq \varepsilon$$

lorsque $m \in \mathbb{N}(S)$ tend vers l'infini. On en déduit que

$$\sum_{x\in\frac{1}{m}S_m^{\mathrm{reg}}\setminus\frac{1}{m}S_m} |f(x)| \leq 2\|f\|\varepsilon$$

pour tout $m \in \mathbb{N}(S)$ suffisamment grand, d'où (6). □

La conséquence suivante du théorème 1.12 nous sera plus directement utile par la suite.

COROLLAIRE 1.14. — *Pour tout semigroupe gradué discret $S \subset \mathbb{N} \times V$, on a*

$$\lim_{m\to\infty, m\in\mathbb{N}(S)} \frac{\operatorname{card} S_m}{m^{\kappa(S)}} = \mu_S\left(\Delta(S)\right) \in \,]0, +\infty].$$

Cette limite est finie ssi $\Delta(S)$ est compact.

Démonstration. — Puisque $\Delta(S)$ est un convexe fermé d'intérieur non vide de $\mathrm{Aff}(S)$, son volume $\mu_S(\Delta(S))$ est fini ssi $\Delta(S)$ est compact.

Supposons d'abord que $\Delta(S)$ est de volume fini, et donc compact. On peut alors choisir $f \in C_c^0(V)$ valant 1 sur $\Delta(S)$, et donc aussi sur $\frac{1}{m}S_m$ pour tout m ; le résultat découle alors du théorème 1.12.

Supposons maintenant que $\Delta(S)$ est de volume infini. Étant donnée $C > 0$, on peut trouver $f \in C_c^0(V)$ telle que $0 \leq f \leq 1$ et $\int_{\Delta(S)} f \, d\mu_S \geq C$. Le théorème 1.12 donne

$$\liminf_{m\to\infty, m\in\mathbb{N}(S)} \frac{\operatorname{card} S_m}{m^{\kappa(S)}} \geq \lim_{m\to\infty, m\in\mathbb{N}(S)} \frac{1}{m^{\kappa(S)}} \sum_{x\in\frac{1}{m}S_m} f(x) = \int_{\Delta(S)} f \, d\mu_S \geq C\,.$$

Ceci étant valable pour tout $C > 0$, on obtient bien

$$\lim_{m\to\infty, m\in\mathbb{N}(T)} \frac{\operatorname{card} S_m}{m^{\kappa(S)}} = +\infty.$$

□

On conclut cette partie par le résultat d'approximation suivant.

THÉORÈME 1.15. — *Soient $S \subset \mathbb{N}\times V$ un semigroupe gradué discret, et $T(m) \subset S$, $m \in \mathbb{N}$, une suite de sous-semigroupes de S vérifiant*

$$S_m \subset T(m)_m$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$. On a alors :

(i) $\operatorname{Aff}(T(m)) = \operatorname{Aff}(S)$ *et* $\vec{\operatorname{Aff}}(T(m))_{\mathbb{Z}} = \vec{\operatorname{Aff}}(S)_{\mathbb{Z}}$ *pour tout $m \in \mathbb{N}(S)$ suffisamment grand ;*

(ii) $\lim_{m\in\mathbb{N}(S), m\to\infty} \mu_{T(m)}\left(\Delta(T(m))\right) = \mu_S\left(\Delta(S)\right)$ *dans* $[0, +\infty]$.

Démonstration. — Notons $\langle S_m\rangle$ le sous-semigroupe de S engendré par $S_m \times \{m\}$. Il est immédiat de voir que

$$\Delta(\langle S_m\rangle) = \operatorname{Conv}\left(\tfrac{1}{m} S_m\right).$$

L'hypothèse implique par ailleurs que

$$\langle S_m\rangle \subset T(m) \subset S.$$

Étape 1. On commence par montrer que

$$\lim_{m\in\mathbb{N}(S), m\to\infty} \mu_S\left(\Delta(\langle S_m\rangle)\right) = \mu_S\left(\Delta(S)\right). \tag{7}$$

Ceci impliquera en particulier que $\Delta\left(\langle S_m\rangle\right)$ est d'intérieur non vide dans $\operatorname{Aff}(S)$ pour tout $m \in \mathbb{N}(S)$ assez grand, et donc que $\operatorname{Aff}(\langle S_m\rangle) = \operatorname{Aff}(S)$ pour de telles valeurs de m. On aura donc *a fortiori* $\operatorname{Aff}(T(m)) = \operatorname{Aff}(S)$, ce qui établira (i).

Soit $K \subset \operatorname{Aff}(S)$ un convexe compact contenu dans l'intérieur relatif de $\Delta(S)$. Par (5) on a en particulier

$$\Delta(S) = \overline{\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \operatorname{Conv}\left(\tfrac{1}{m} S_m\right)} = \overline{\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \Delta(\langle S_m\rangle)}.$$

Le lemme 1.6 entraîne donc que

$$\Delta(\langle S_m\rangle) \supset K$$

pour tout $m \in \mathbb{N}(S)$ assez grand, d'où $\liminf_{m\in\mathbb{N}(S), m\to\infty} \mu_S\left(\Delta(\langle S_m\rangle)\right) \geq \mu_S(K)$. Cela étant vrai pour tout convexe compact K dans l'intérieur relatif de $\Delta(S)$, on en déduit que

$$\liminf_{m\in\mathbb{N}(S), m\to\infty} \mu_S\left(\Delta(\langle S_m\rangle)\right) \geq \mu_S(\Delta(S)),$$

ce qui établit (7) puisque $\Delta(\langle S_m\rangle) \subset \Delta(S)$.

Étape 2. Vérifions maintenant que $\vec{\operatorname{Aff}}(\langle S_m\rangle)_{\mathbb{Z}} = \vec{\operatorname{Aff}}(S)_{\mathbb{Z}}$ pour tout $m \in \mathbb{N}(S)$ assez grand, ce qui impliquera *a fortiori* que $\vec{\operatorname{Aff}}(T(m))_{\mathbb{Z}} = \vec{\operatorname{Aff}}(S)_{\mathbb{Z}}$, et donc $\mu_{T(m)} = \mu_S$.

On choisit un isomorphisme $\phi : \mathrm{Aff}(S) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{\kappa(S)}$ comme dans le lemme 1.11. Introduisons $S_m - S_m := \{x - y \mid x, y \in S_m\} \subset V$. Comme $\vec{\mathrm{Aff}}(\langle S_m \rangle)_{\mathbb{Z}}$ est par définition égal au groupe engendré par $S_m - S_m$, il s'agit de montrer que $S_m - S_m$ engendre $\vec{\mathrm{Aff}}(S)_{\mathbb{Z}}$ pour tout $m \in \mathbb{N}(S)$ assez grand. Puisque $\vec{\phi}(\vec{\mathrm{Aff}}(S)_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}^{\kappa(S)}$, ceci revient à dire que

$$\vec{\phi}(S_m - S_m) = m\,\vec{\phi}\left(\tfrac{1}{m}S_m - \tfrac{1}{m}S_m\right) = m\left(\phi\left(\tfrac{1}{m}S_m\right) - \phi\left(\tfrac{1}{m}S_m\right)\right)$$

engendre $\mathbb{Z}^{\kappa(S)}$.

Fixons un convexe compact K dans l'intérieur relatif de $\Delta(S)$. Par le lemme 1.13, $\frac{1}{m}S_m$ contient $\frac{1}{m}S_m^{\mathrm{reg}} \cap K$ pour tout $m \gg 1$. Par la propriété (ii) du lemme 1.11, on obtient donc que, pour tout $m \in \mathbb{N}(S)$ assez grand, $m\left(\phi\left(\frac{1}{m}S_m\right) - \phi\left(\frac{1}{m}S_m\right)\right)$ contient l'ensemble des différences de points dans $\mathbb{Z}^{\kappa(S)} \cap (m\phi(K))$, lequel engendre $\mathbb{Z}^{\kappa(S)}$ puisque $m\phi(K)$ contient $[-1,1]^{\kappa(S)}$ pour tout $m \gg 1$. $\square$

Remarque 1.16. — Comme mentionné ci-dessus, on a toujours $\Delta(S) = \overline{\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{Conv}\left(\frac{1}{m}S_m\right)}$. Par contraste, la proposition 1.7 montre que

$$S \text{ de type fini} \iff \text{il existe } m \in \mathbb{N} \text{ tel que } \Delta(S) = \mathrm{Conv}\left(\tfrac{1}{m}S_m\right).$$

2. VALUATIONS SUR LES CORPS DE FONCTIONS

Le but de cette partie est de passer en revue quelques propriétés élémentaires des valuations sur les corps de fonctions, afin de dégager la classe de valuations adaptée à la construction des corps d'Okounkov. L'ouvrage classique [ZS60] et l'exposé de survol [Vaq06] nous serviront de références pour ce qui suit.

On se donne un corps algébriquement clos k de caractéristique arbitraire, et K/k une extension de corps de type fini. On appelle *modèle* de K une k-variété algébrique (i.e. un k-schéma de type fini, réduit et irréductible) X ayant K pour corps de fonctions. On pose $n := \mathrm{tr.deg}(K/k)$, qui est donc la dimension de tout modèle de K.

2.1. Centre et semigroupe des valeurs

Nous adopterons la terminologie suivante :

DÉFINITION 2.1. — *Une* valuation v *sur une k-algèbre intègre A, à valeurs dans un groupe abélien totalement ordonné Λ, est une application $v : A \setminus \{0\} \to \Lambda$ telle que*

– $v(fg) = v(f) + v(g)$ *pour* $f, g \in A \setminus \{0\}$ *;*
– $v(f+g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$ *si* $f + g \neq 0$ *;*
– $v(a) = 1$ *pour tout* $a \in k^*$.

Il est commode de poser $v(0) := +\infty$, élément qu'on adjoint à Λ en imposant $\lambda < +\infty$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et les règles arithmétiques évidentes qui en découlent. On utilisera les faits élémentaires suivants.

LEMME 2.2. — *Soient $f_1, \ldots, f_m \in A \setminus \{0\}$. Si les $v(f_i)$ sont 2 à 2 distincts, alors* $v\left(\sum_i f_i\right) = \min_i v(f_i)$.

Lemme 2.3. — *Soient $A \subset K$ une sous-k-algèbre ayant K pour corps des fractions, et Λ un groupe abélien totalement ordonné. Toute valuation $v : A \setminus \{0\} \to \Lambda$ s'étend de façon unique en une valuation $v : K^* \to \Lambda$ en posant $v(f/g) = v(f) - v(g)$ pour $f, g \in A \setminus \{0\}$.*

On associe à une valuation v sur K les objets suivants :

– le *groupe des valeurs* $\Lambda_v := v(K^*)$;

– l'*anneau de valuation* $\mathcal{O}_v = \{f \in K \mid v(f) \geq 0\}$, d'idéal maximal $\mathfrak{m}_v = \{f \in K \mid v(f) > 0\}$ et de corps résiduel $k(v) := \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$, dans lequel se plonge k.

Notons que l'homomorphisme de groupes : $K^* \to \Lambda$ induit un isomorphisme $\Lambda_v \simeq K^*/\mathcal{O}_v^*$, où $\mathcal{O}_v^*$ désigne le groupe des unités de $\mathcal{O}_v$.

Remarque 2.4. — Le groupe des valeurs Λ_v n'est pas de type fini en général. De fait, tout sous-groupe additif de $\mathbb{Q}$ peut être réalisé comme groupe des valeurs d'une valuation sur le corps $k(T_1, T_2)$ des fractions rationnelles de deux variables, cf. [ZS60, p. 102].

Définition 2.5. — *Soit v une valuation sur K, et soit X un modèle de K. Un* centre *de v sur X est un point (schématique) $\xi \in X$ tel que $\mathcal{O}_{X,\xi} \subset \mathcal{O}_v$ et $\mathfrak{m}_\xi \subset \mathfrak{m}_v$ (où l'on note $\mathfrak{m}_\xi$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,\xi}$).*

On a automatiquement $\mathfrak{m}_\xi = \mathcal{O}_{X,\xi} \cap \mathfrak{m}_v$, d'où les extensions de corps résiduels

$$k \subset k(\xi) \subset k(v). \tag{8}$$

Lorsqu'un centre de v sur X existe, il est unique par le critère valuatif de séparation [Har77, p. 97] ; on dit alors que v est *centrée* sur X.

Si $X = \operatorname{Spec} A$ est affine, v est centrée sur X ssi $A \subset \mathcal{O}_v$ (i.e. $v \geq 0$ sur A), et son centre correspond alors à l'idéal premier $A \cap \mathfrak{m}_v$. À l'opposé, si X est propre sur k, toute valuation sur K est centrée sur X, cette fois par le critère valuatif de propreté [Har77, p. 101].

Définition 2.6. — *Soient X un modèle de K, et v une valuation centrée sur X. Le* semigroupe des valeurs *de v sur X est le sous-semigroupe de $\Lambda_{\geq 0}$ défini par*

$$S_v(X) := v(\mathcal{O}_{X,\xi} \setminus \{0\}),$$

où $\xi \in X$ désigne le centre de v sur X.

On a noté $\Lambda_{\geq 0} = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda \geq 0\}$. Soulignons que le semigroupe $S_v(X)$, contrairement au groupe des valeurs Λ_v, dépend du choix du modèle X de K. Comme K est le corps des fractions de $\mathcal{O}_{X,\xi}$, $S_v(X)$ engendre $\Lambda_v = v(K^*)$ comme groupe. Par ailleurs, si v est centrée sur $X = \operatorname{Spec} A$ affine, alors $S_v(X) = v(A \setminus \{0\})$, puisque $v(f) = 0$ pour toute $f \in A \setminus A \cap \mathfrak{m}_v$.

Exemple 2.7. — Soient Λ un groupe abélien totalement ordonné, et $S \subset \Lambda_{\geq 0}$ un semigroupe de type fini. La k-algèbre $k[S]$ est alors intègre et de type fini, de sorte que $X := \operatorname{Spec} k[S]$ est une variété algébrique affine sur k (et aussi une *variété torique* [Oda88], du moins si S est saturé dans Λ). D'après le lemme 2.3, on définit une valuation v sur le corps de fonctions de X en posant

$$v(f) = \min \{s \in S \mid a_s \neq 0\}$$

pour $f = \sum_{s \in S} a_s s \in k[S]$. Comme $v \geq 0$ sur $k[S]$, v est centrée sur X, et on a $S_v(X) = v\,(k[S] \setminus \{0\}) = S$.

Bien que le semigroupe $S_v(X)$ soit de type fini dans cet exemple, ce n'est pas le cas en général, puisque le groupe $\mathbb{Z}S_v(X) = \Lambda_v$ n'est lui-même pas toujours de type fini (remarque 2.4). Par contre, on a toujours :

Lemme 2.8. — *Le semigroupe des valeurs $S_v(X)$ est bien ordonné (pour l'ordre induit par celui de Λ).*

Rappelons que «bien ordonné» signifie que tout sous-ensemble non vide admet un plus petit élément.

Démonstration. — Pour tout sous-ensemble non vide F de $S_v(X)$, soit I_F l'idéal de $\mathcal{O}_{X,\xi}$ engendré par $\{f \in \mathcal{O}_{X,\xi} \setminus \{0\} \mid v(f) \in F\}$. Puisque $v \geq 0$ sur $\mathcal{O}_{X,\xi}$, on voit immédiatement que $v(f) \geq \min F$ pour tout $f \in I_F$ lorsque F est fini.

Pour F quelconque, la noethérianité de $\mathcal{O}_{X,\xi}$ montre qu'il existe un sous-ensemble fini $G \subset F$ tel que $I_F = I_G$. La remarque précédente implique donc que $s \geq \min G$ pour tout $s \in F$, et $\min G$ est donc le plus petit élément de F. □

En appliquant ceci à l'exemple 2.7, on obtient :

Corollaire 2.9. — *Soient Λ un groupe abélien totalement ordonné, et S un semigroupe de type fini de $\Lambda_{\geq 0}$. Alors S est bien ordonné.*

Remarque 2.10. — Ce fait est classique pour les ordres monomiaux sur $S = \mathbb{N}^n$, dans le cadre de la théorie des bases de Gröbner (voir par exemple [Eis, §15.2]).

2.2. Trivialité du corps résiduel

Toute valuation v sur K définit une filtration décroissante $(F_v^\lambda K)_{\lambda \in \Lambda_v}$ de K en sous-$\mathcal{O}_v$-modules, définis par

$$F_v^\lambda K := \{f \in K \mid v(f) \geq \lambda\} \tag{9}$$

pour $\lambda \in \Lambda_v$. Si $E \subset K$ est un sous-k-espace vectoriel, on note $F_v^\lambda E := E \cap F_v^\lambda K$ la filtration (en sous-k-espaces vectoriels) induite, et

$$\operatorname{Gr}_v^\lambda E = \frac{\{f \in E \mid v(f) \geq \lambda\}}{\{f \in E \mid v(f) > \lambda\}}$$

les gradués correspondants. Le lemme suivant joue un rôle essentiel dans la suite.

Lemme 2.11. — *Le corps résiduel $k(v)$ d'une valuation v sur K satisfait $k(v) = k$ ssi*

$$\dim_k E = \operatorname{card} v\,(E \setminus \{0\}) \tag{10}$$

pour tout k-espace vectoriel de dimension finie $E \subset K$. Ces propriétés sont en outre équivalentes à :

(i) $\dim_k \mathrm{Gr}_v^\lambda K = 1$ *pour tout* $\lambda \in \Lambda_v$ *;*

(ii) *il existe une sous-k-algèbre $A \subset K$, de corps des fractions K, telle que* $\dim_k \mathrm{Gr}_v^\lambda A \leq 1$ *pour tout* $\lambda \in \Lambda_v$.

Démonstration. — Si $E \subset K$ est un sous-k-espace vectoriel de dimension finie, alors

$$\dim_k E = \sum_{\lambda \in \Lambda_v} \dim_k \mathrm{Gr}_v^\lambda E,$$

et $\mathrm{Gr}_v^\lambda E \neq 0 \iff \lambda \in v(E \setminus \{0\})$. On voit donc que (10) équivaut à $\dim_k \mathrm{Gr}_v^\lambda E \leq 1$ pour tout $\lambda \in \Lambda_v$.

Supposons que $k(v) = k$, et soit $E \subset K$ un sous-k-espace vectoriel de dimension finie. Étant données $f, g \in E \setminus \{0\}$ telles que $v(f) = v(g) =: \lambda$, on veut voir qu'il existe $a \in k$ tel que $v(f - ag) > \lambda$. Mais $u := f/g$ appartient à $\mathcal{O}_v^*$, donc l'hypothèse $k(v) = k$ montre qu'il existe $a \in k$ tel que $v(u - a) > 0$, d'où $v(f - ag) > v(g) = \lambda$.

Réciproquement, supposons que (10) soit valable pour tout sous-k-espace vectoriel $E \subset K$ de dimension finie, et montrons que $k(v) = k$. Tout élément non nul de $k(v)$ est représenté par $f \in \mathcal{O}_v \setminus \mathfrak{m}_v$, qui satisfait donc $v(f) = 0$. On cherche $a \in k$ tel que $v(f - a) > 0$. Mais ceci résulte du fait que le k-espace vectoriel E engendré par f et 1 satisfait en particulier $\dim_k \mathrm{Gr}_v^0 E \leq 1$.

L'équivalence de ces propriétés avec (i) et (ii) est du même acabit, et laissée au lecteur. □

2.3. Valuations monomiales

On va expliciter une construction menant au résultat suivant :

Proposition 2.12. — *Soient X un modèle de K, et Λ un groupe abélien totalement ordonné. Si $S \subset \Lambda_{\geq 0}$ est un semigroupe engendré par au plus $n = \dim X$ éléments, alors il existe une valuation $v : K^* \to \Lambda$ centrée sur X avec $S_v(X) = S$.*

On commence par traiter le cas de l'espace affine $\mathbb{A}_k^n = \operatorname{Spec} k[T_1, ..., T_n]$, de corps de fonctions $k(T_1, ..., T_n)$. Une valuation v sur $k(T_1, ..., T_n)$ à valeurs dans Λ est centrée sur $\mathbb{A}_k^n$ ssi $v(T_i) \geq 0$ pour tout i.

Définition 2.13. — *Une* valuation monomiale *v sur $k(T_1, ..., T_n)$ est une valuation qui est uniquement déterminée par les $v(T_i)$, via la formule*

$$v\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha T^\alpha\right) = \min\left\{\sum_i \alpha_i v(T_i) \mid \alpha \in \mathbb{N}^n,\ a_\alpha \neq 0\right\} \tag{11}$$

pour tout polynôme $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha T^\alpha \in k[T_1, ..., T_n]$.

Le groupe des valeurs d'une valuation monomiale v est donné par $\Lambda_v = \sum_i \mathbb{Z}v(T_i)$. Si v est centrée sur $\mathbb{A}^n_k$, alors $S_v(\mathbb{A}^n_k) = \sum_i \mathbb{N}v(T_i)$.

LEMME 2.14. — *Toute valuation v sur $k(T_1, ..., T_n)$ telle que les $v(T_i)$ soient $\mathbb{Z}$-linéairement indépendantes est automatiquement monomiale ; de plus, son corps résiduel $k(v)$ coïncide avec k.*

Démonstration. — L'hypothèse implique que les $v(T^\alpha) = \sum_i \alpha_i v(T_i)$ sont 2 à 2 distincts lorsque α parcourt $\mathbb{N}^n$. Le lemme 2.2 montre donc que la relation (11) est satisfaite.

Pour voir que $k(v) = k$, il suffit de vérifier la propriété (ii) du lemme 2.11 avec $A := k[T_1, ..., T_n]$. On a $\mathrm{Gr}_v^\lambda A \neq 0$ ssi $\lambda \in v(A \setminus \{0\})$; dans ce cas, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $\lambda = \sum_i \alpha_i \lambda_i$, et on vérifie aisément que $\mathrm{Gr}_v^\lambda A$ est engendré sur k par l'image du monôme T^α. □

LEMME 2.15. — *Soit v une valuation monomiale sur $k(T_1, ..., T_n)$, centrée sur $\mathbb{A}^n_k$. On peut alors étendre v en une valuation sur $k[[T_1, ..., T_n]]$, en posant (11) pour toute série formelle.*

Démonstration. — D'après le lemme 2.8, le semigroupe $S_v(\mathbb{A}^n_k) = \sum_i \mathbb{N}v(T_i)$ est bien ordonné ; (11) fait donc sens pour toute série formelle, et on vérifie sans peine que ceci définit bien une valuation sur $k[[T_1, ..., T_n]]$. □

Démonstration de la proposition 2.12. — Puisque k est algébriquement clos, on peut choisir un point fermé *régulier* $p \in X$, et donc un système régulier de paramètres $(z_1, ..., z_n)$ de $\mathcal{O}_{X,p}$. D'après le théorème de structure de Cohen [ZS60, p. 307], l'injection $k[T_1, ..., T_n] \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,p}$ définie par $(z_1, ..., z_n)$ s'étend en un isomorphisme $k[[T_1, ..., T_n]] \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{X,p}$ au niveau des complétés formels. Chaque $f \in \widehat{\mathcal{O}}_{X,p}$ admet donc un développement en série formelle $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$.

Par hypothèse sur S, on peut choisir $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \Lambda_{\geq 0}$ tels que $S = \sum_i \mathbb{N}\lambda_i$. Le lemme 2.15 montre qu'on définit une valuation v sur $\mathcal{O}_{X,p} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{X,p}$ en posant

$$v(f) = \min \left\{ \sum_l \alpha_i \lambda_i \mid \alpha \in \mathbb{N}^n,\, a_\alpha \neq 0 \right\}.$$

Cette valuation s'étend en une valuation v sur K par le lemme 2.3. Puisque $v \geq 0$ sur $\mathcal{O}_{X,p}$, v admet un centre ξ sur X, tel que $p \in \overline{\{\xi\}}$. Le semigroupe des valeurs $S_v(X)$, i.e. l'image de $v : \mathcal{O}_{X,\xi} \setminus \{0\} \to \Lambda$, est par construction contenu dans $S = \sum_i \mathbb{N}\lambda_i$, et il contient aussi chaque $\lambda_i = v(z_i)$. On a donc bien $S_v(X) = S$. □

Exemple 2.16 (Le cas réel). — Soient $w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{R}^n_+$ et $z = (z_1, ..., z_n)$ un système régulier de paramètres en un point régulier $p \in X$. On définit une valuation $v_{w,z}$ sur $k(X)$ en posant

$$v_{w,z}\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha\right) = \min \left\{ \sum_i \alpha_i \lambda_i \mid a_\alpha \neq 0 \right\}.$$

Le centre de $v_{w,z}$ sur X est le point générique de $\bigcap_{w_i>0}\{z_i=0\}$, et son groupe des valeurs est $\sum_i \mathbb{Z}w_i \subset \mathbb{R}$, muni de l'ordre induit par celui de $\mathbb{R}$.

Exemple 2.17 (Valuations de drapeau [Ok96], §2.1). — Appelons *drapeau de sous-variétés de* X centré en un point (fermé) $p \in X$ une suite

$$X_\bullet = \{X = X_0 \supset X_1 \supset \ldots \supset X_n = \{p\}\} \tag{12}$$

de sous-variétés fermées vérifiant $\operatorname{codim} X_i = i$, et telles que X_{i+1} soit un diviseur de Cartier de X_i au voisinage de p. On notera que l'existence d'un tel drapeau entraîne que X est Cohen-Macaulay en p.

On définit alors une valuation $v_{X_\bullet} : k(X)^* \to \mathbb{Z}^n$, centrée en $p \in X$, comme suit. On choisit pour chaque i une équation locale $w_{i+1} \in \mathcal{O}_{X_i,p}$ de X_{i+1} dans X_i, et on pose pour toute $f \in k(X)^*$

$$v_{X_\bullet}(f) = (\operatorname{ord}_{X_1}(f_0), \operatorname{ord}_{X_2}(f_1), \ldots, \operatorname{ord}_{X_n}(f_{n-1})),$$

où les $f_i \in k(X_i)^*$ sont définies par récurrence par $f_0 := f$ et

$$f_{i+1} := \left(w_{i+1}^{-\operatorname{ord}_{X_{i+1}}(f_i)} f_i\right)|_{X_{i+1}}.$$

On voit immédiatement que le semigroupe des valeurs de $v_{X_\bullet}$ sur X coïncide avec $\mathbb{N}^n$.

Si, comme dans la démonstration de la proposition 2.12, $p \in X$ est un point régulier et $(z_1, \ldots, z_n)$ est un système régulier de paramètres, on définit un drapeau de sous-variétés $X_\bullet$ en posant $X_i := \overline{\{z_1 = \ldots = z_i = 0\}}$, et on vérifie alors que la valuation $v_{X_\bullet}$ coïncide avec la valuation construite dans la démonstration de la proposition 2.12 avec $\Lambda = \mathbb{Z}^n$ muni de l'ordre lexicographique et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ la base canonique de $\mathbb{Z}^n$. En d'autres termes, la valuation $v_{X_\bullet}$ associée à ce drapeau satisfait

$$v_{X_\bullet}(f) = \min\{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid a_\alpha \neq 0\}$$

pour toute $f \in \mathcal{O}_{X,p}$ développée en série formelle $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$, où le min est relatif à l'ordre lexicographique.

Exemple 2.18 (Valuations de drapeau infinitésimal [LM09], §5.2)

Soient $p \in X$ un point fermé régulier et $F_\bullet$ un drapeau

$$\mathbb{P}(T_{X,p}) \simeq \mathbb{P}_k^{n-1} = F_0 \supset \ldots \supset F_{n-1}$$

en sous-espaces projectifs. Si on note $\pi : X' \to X$ l'éclatement de X en p, de diviseur exceptionnel $E \simeq \mathbb{P}(T_{X,p})$, le drapeau $F_\bullet$ définit un drapeau de sous-variétés de X', donc une valuation de drapeau sur $k(X') \simeq k(X)$, que l'on note $v_{p,F_\bullet}$.

En choisissant un système régulier de paramètres $(z_1, \ldots, z_n)$ de $\mathcal{O}_{X,p}$ dont les différentielles en p découpent $F_\bullet$, on vérifie que $\mathbb{N}^n$ est, ici aussi, le semigroupe des valeurs de $v_{p,F_\bullet}$ sur X.

Remarque 2.19. — Dès que $n \geq 2$, aucune des valuations réelles de l'exemple 2.16 ne se réalise comme valuation de drapeau. On montre en effet que ces dernières sont de rang (réel) n ; on renvoie à [ZS60] pour cette notion, dont nous n'aurons pas l'usage dans ce texte.

2.4. Valuations de rang rationnel maximal

Soit v une valuation sur K. Son groupe des valeurs $\Lambda_v = v(K^*)$, étant totalement ordonné, est sans torsion, donc se plonge dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel

$$V_v := \Lambda_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

(lequel n'est toutefois plus ordonné). Le *rang rationnel* $\mathrm{rg.\,rat}(v)$ de v est défini comme le rang du groupe des valeurs Λ_v, i.e. le nombre maximal d'éléments $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants de Λ_v, qui est aussi la dimension de V_v. Comme on va le voir, le rang rationnel est au plus égal à $n = \mathrm{tr.\,deg}(K/k)$, et les valuations telles que $\mathrm{rg.\,rat}(v) = n$ jouissent de propriétés particulières, qui joueront un rôle clé dans la construction des corps d'Okounkov.

Lemme 2.20. — *Soient v une valuation sur K, et K' un sous-corps quelconque de K contenant k. Alors :*

(i) $\mathrm{card}\,(v(K^*)/v(K'^*)) \leq [K : K']$.

(ii) $\mathrm{rg}\,(v(K^*)/v(K'^*)) \leq \mathrm{tr.\,deg}(K/K')$.

Démonstration. — (i) [ZS60, p. 52] Soient $f_1, ..., f_m \in K^*$ telles que les $v(f_i)$ soient 2 à 2 distincts dans $v(K^*)/v(K'^*)$. Il suffit de montrer que les f_i sont linéairement indépendantes sur K'. Supposons qu'il existe $g_1, ..., g_m \in K'$ non tous nuls tels que $g_1 f_1 + ... + g_m f_m = 0$. Par le lemme 2.2, il doit alors exister deux indices $i \neq j$ tels que $g_i, g_j \neq 0$ et $v(g_i f_i) = v(g_j f_j)$, et on en déduit que $v(f_i) - v(f_j) = v(g_j) - v(g_i)$ est nul dans $v(K^*)/v(K'^*)$, contradiction.

(ii) [ZS60, p. 50] Soient $f_1, ..., f_m$ telles que les $v(f_i)$ soient $\mathbb{Z}$-linéairement indépendantes dans $v(K^*)/v(K'^*)$. Il suffit de montrer que les f_i sont algébriquement indépendantes sur K'. Si ce n'est pas le cas, on peut trouver un nombre fini de coefficients non tous nuls $a_\alpha \in K'$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$, tels que $\sum_\alpha a_\alpha f_1^{\alpha_1} ... f_m^{\alpha_m} = 0$. Par le lemme 2.2, il existe alors $\alpha \neq \beta$ tels que

$$v(a_\alpha f_1^{\alpha_1} ... f_m^{\alpha_m}) = v(a_\beta f_1^{\beta_1} ... f_m^{\beta_m}),$$

et on en déduit $\sum_i (\beta_i - \alpha_i) v(f_i) = v(a_\alpha) - v(a_\beta) \in v(K'^*)$, ce qui fournit une relation de dépendance $\mathbb{Z}$-linéaire des $v(f_i)$ dans $v(K^*)/v(K'^*)$. □

En appliquant le point (ii) avec $K' = k$, on obtient :

Corollaire 2.21. — *Pour toute valuation v sur K, on a* $\mathrm{rg.\,rat}(v) \leq n$.

Définition 2.22. — *Soit v une valuation sur K. On dit que v est* de rang rationnel maximal *si* $\mathrm{rg.\,rat}(v) = n$.

La proposition suivante décrit les propriétés essentielles des valuations de rang rationnel maximal (du moins en ce qui nous concerne).

Proposition 2.23. — *Soit v une valuation sur K de rang rationnel maximal.*

(i) *Le groupe des valeurs Λ_v est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang n.*

(ii) *Pour tout k-espace vectoriel $E \subset K$ de dimension finie, on a*

$$\dim_k E = \operatorname{card} v(E \setminus \{0\}).$$

(iii) *Pour toute sous-extension de corps K'/k, la restriction de v à K' est encore de rang rationnel maximal.*

À propos du point (iii), rappelons au passage que l'extension de corps K'/k est automatiquement de type fini, puisque K/k l'est.

On commence par montrer que toutes les valuations de rang rationnel maximal sont des extensions finies de valuations monomiales.

Lemme 2.24. — *Une valuation v sur K est de rang rationnel maximal ssi il existe une extension finie $K/k(T_1, ..., T_n)$ telle que la restriction de v à $k(T_1, ..., T_n)$ soit monomiale, avec les $v(T_i)$ $\mathbb{Z}$-linéairement indépendantes.*

Démonstration. — Soit v une valuation sur K de rang rationnel maximal. Par définition, ceci signifie qu'il existe $f_1, ..., f_n \in K^*$ telles que les $v(f_i)$ soient $\mathbb{Z}$-linéairement indépendantes. D'après le lemme 2.20, les fonctions f_i sont algébriquement indépendantes sur k, donc induisent un plongement $k(T_1, ..., T_n) \hookrightarrow K$ qui est fini, puisque K/k est de type fini avec $\operatorname{tr.deg}(K/k) = n$. Comme les $v(T_i) = v(f_i)$ sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendantes, la restriction de v à $k(T_1, ..., T_n)$ est monomiale par le lemme 2.14.

Réciproquement, une valuation monomiale v sur $k(T_1, ..., T_n)$ avec les $v(T_i)$ $\mathbb{Z}$-linéairement équivalentes a pour groupes des valeurs $\mathbb{Z}v(T_1) + ... + \mathbb{Z}v(T_n)$, donc est de rang rationnel n, qui est aussi le rang rationnel de toute extension de v à une extension finie de $k(T_1, ..., T_n)$, d'après le lemme 2.20. □

Démonstration de la proposition 2.23. — D'après le lemme 2.11, (ii) équivaut à

(ii)′ $k(v) = k$.

D'après le lemme 2.24, il existe une extension finie K/K' avec $K' = k(T_1, ..., T_n)$ telle que la restriction v' de v à K' soit monomiale, avec les $v(T_i)$ $\mathbb{Z}$-linéairement indépendantes.

Le lemme 2.14 montre donc que

$$\Lambda_{v'} = \mathbb{Z}v(T_1) + ... + \mathbb{Z}v(T_n) \simeq \mathbb{Z}^n$$

et $k(v') = k$.

On va maintenant remonter ces propriétés à K. Puisque K est fini sur K', le lemme 2.20 montre que $\Lambda_{v'}$ est d'indice fini dans Λ_v, ce qui donne (i). Par ailleurs, le fait que l'extension K/K' est finie implique facilement que l'extension de corps résiduels $k(v)/k(v')$ est aussi finie. Mais on a vu que $k(v') = k$; ce dernier étant algébriquement clos, on obtient (ii)′.

Enfin, la propriété de transitivité (iii) résulte immédiatement du point (ii) du lemme 2.20, en utilisant

$$\operatorname{rg} v(K^*) = \operatorname{rg}\left(v(K^*)/v(K'^*)\right) + \operatorname{rg} v(K'^*)$$

et

$$\operatorname{tr.deg}(K/k) = \operatorname{tr.deg}(K/K') + \operatorname{tr.deg}(K'/k).$$

□

Remarque 2.25. — L'inégalité d'Abhyankar-Zariski [ZS60, p. 331] stipule qu'on a en fait

$$\operatorname{rg.rat}(v) + \operatorname{tr.deg}(k(v)/k) \leq n, \tag{13}$$

ce qui montre directement que $\operatorname{rg.rat}(v) = n \Longrightarrow k(v) = k$. La propriété (i) de la proposition 2.23 est plus généralement vraie pour les valuations v telles que (13) soit une égalité, parfois appelées *valuations d'Abhyankar* ([ZS60, p. 355], voir aussi [Vaq06, p. 16]).

Remarque 2.26. — Dans [KK09, §2.2], deux types de conditions sont considérées pour une valuation v sur K :

(i) ≪*faithful* $\mathbb{Z}^n$*-valued valuation*≫, qui veut dire que le groupe des valeurs est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$;

(ii) ≪*one-dimensional leaves*≫, qui signifie que $\dim \operatorname{Gr}_v^\lambda K \leq 1$ pour tout $\lambda \in \Lambda_v$.

Bien que ce ne soit pas explicitement mentionné dans [KK09], on a en fait (i)$\Longrightarrow$(ii) (si k est algébriquement clos, comme on le suppose) . En effet, d'après la proposition 2.23, (i) équivaut à la condition de rang rationnel maximal. Le lemme 2.20 énonce quant à lui que (ii) équivaut à $k(v) = k$, et la proposition 2.23 montre donc que (i) implique (ii).

Exemple 2.27. — Pour tout modèle X de K, la proposition 2.12 (et en particulier les valuations de drapeau et de drapeau infinitésimal des exemples 2.17 et 2.18), fournissent des exemples de valuations sur K de rang rationnel maximal, centrées sur X. Il suffit en effet de choisir n éléments positifs $\lambda_1, ..., \lambda_n$ $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants dans un groupe totalement ordonné Λ adéquat, et d'appliquer la proposition 2.12 à $S := \sum_i \mathbb{N}\lambda_i$.

Par construction, ces exemples ont la propriété que $S_v(X) = S$ est de type fini, mais on donnera plus loin un exemple de valuation de rang rationnel maximal dont le semigroupe des valeurs sur un modèle X de K n'est pas de type fini (cf. exemple 3.13).

3. CORPS D'OKOUNKOV

Cette partie décrit le cœur de la théorie des corps d'Okounkov, selon un point de vue proche de celui de [KK09].

Dans tout ce qui suit, X désigne une variété algébrique *propre* sur un corps algébriquement clos k de caractéristique arbitraire. On note n la dimension de X et $K := k(X)$ son corps de fonctions. On utilise la notation additive pour les produits tensoriels de fibrés en droites ; en particulier, pour tout fibré en droites L sur X, on écrit $mL = L^{\otimes m}$ pour $m \in \mathbb{Z}$. L'*algèbre des sections* de L est la k-algèbre graduée

$$R(X, L) := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} H^0(X, mL).$$

3.1. Semigroupe gradué des valeurs sur un fibré en droites

Soit v une valuation sur K, de centre $\xi \in X$ (dont l'existence est garantie par la propreté de X). Rappelons que l'on note $S_v(X) = v(\mathcal{O}_{X,\xi} \setminus \{0\})$ le semigroupe des valeurs de v sur X, $\Lambda_v = v(K^*)$ le groupe des valeurs de v, et $V_v = \Lambda_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré, de dimension $\operatorname{rg.rat}(v)$.

Pour tout fibré en droites L sur X et toute section non nulle $\sigma \in H^0(X, L) \setminus \{0\}$, on peut définir $v(\sigma) \in S_v(X)$ de la façon suivante. On choisit une trivialisation τ de L au voisinage du centre $\xi \in X$ de v. Toute section non nulle σ de L s'écrit, au voisinage de ξ, $\sigma = f \cdot \tau$ avec $f \in \mathcal{O}_{X,\xi}$. Toute autre trivialisation locale de L en ξ est de la forme $u \cdot \tau$ où u est une unité de $\mathcal{O}_{X,\xi}$, et $v(\sigma) := v(f)$ est donc bien définie puisque $v(u) = 0$.

Notons que $v(\sigma) > 0$ ssi σ s'annule en ξ. Si L' est un second fibré en droites sur X et $\sigma' \in H^0(X, L') \setminus \{0\}$, alors $v(\sigma \otimes \sigma') = v(\sigma) + v(\sigma')$.

Définition 3.1. — *Soient v une valuation sur K, et L un fibré en droites sur X tel que $R(X, L) \neq k$. Le* semigroupe gradué des valeurs de v sur L *est défini comme*

$$S_v(X, L) := \left\{(m, v(\sigma)) \mid m \in \mathbb{N},\, \sigma \in H^0(X, mL) \setminus \{0\}\right\},$$

semigroupe gradué de $\mathbb{N} \times V_v$.

Pour toute sous-algèbre graduée A de $R(X, L)$ qui est non triviale (i.e. $A \neq k$), on introduit plus généralement le semigroupe gradué $S_v(A) \subset \mathbb{N} \times V$ des valeurs de v sur A, défini par

$$S_v(A) := \{(m, v(\sigma)) \mid m \in \mathbb{N},\, \sigma \in A_m \setminus \{0\}\}.$$

En d'autres termes, on pose pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$S_v(A)_m = v\left(A_m \setminus \{0\}\right). \tag{14}$$

En particulier, le semigroupe

$$\mathbb{N}(S_v(A)) = \{m \in \mathbb{N} \mid S_v(A)_m \neq \emptyset\}$$

coïncide avec

$$\mathbb{N}(A) := \{m \in \mathbb{N} \mid A_m \neq 0\}.$$

Remarque 3.2. — Si L est un fibré en droites sur X, on note $K(L)$ le corps de fonctions de l'espace total du fibré dual L^*, qui contient en particulier $R(X, L)$. Puisque L est trivial sur un ouvert de Zariski de X, on a $K(L) \simeq K(T)$, et tout élément de $K(L)$ s'écrit comme quotient de fonctions rationnelles sur L^* du type $\sigma(x, \tau) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sigma_m(x) \cdot \tau^m$, où chaque σ_m est une section rationnelle de mL, nulle sauf pour un nombre fini d'indices m.

Soit v une valuation sur K, et munissons $\mathbb{Z} \times \Lambda_v$ de l'ordre lexicographique produit, défini par

$$(m_1, \lambda_1) \leq (m_2, \lambda_2) \Longleftrightarrow (m_1 < m_2) \text{ ou } (m_1 = m_2 \text{ et } \lambda_1 \leq \lambda_2).$$

On étend v en une valuation

$$\hat{v}_L : K(L)^* \to \mathbb{Z} \times \Lambda_v$$

en posant pour $\sigma(x, \tau) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sigma_m(x) \cdot \tau^m$ comme ci-dessus

$$\hat{v}(\sigma) := (m_0, v(\sigma_{m_0}))$$

avec $m_0 := \min\{m \in \mathbb{N} \mid \sigma_m \neq 0\}$. On vérifie alors sans peine que

$$\hat{v}_L(A \setminus \{0\}) = S_v(A) \tag{15}$$

pour toute sous-algèbre graduée A de $R(X, L)$.

Si A est de type fini sur k (par exemple si $A = R(X, L)$ avec L ample), $\hat{X} := \operatorname{Spec} A$ est une variété affine sur k, munie d'une action du groupe multiplicatif correspondant à la graduation de A (un cône). La valuation $\hat{v}_L$ se restreint en une valuation sur le corps de fonctions de $\hat{X}$, centrée en son sommet, et son semigroupe des valeurs coïncide avec $S_v(A)$.

La proposition suivante recense les propriétés essentielles des semigroupes gradués de valeurs relatifs à une valuation de rang rationnel maximal. Rappelons que l'on pose, pour tout semigroupe gradué S, $\kappa(S) := \dim_{\mathbb{R}}(S) - 1$. Si A est une sous-algèbre graduée non triviale de $R(X, L)$, on note $K(A)$ son corps des fractions, et on pose

$$\kappa(A) := \operatorname{tr.deg}(K(A)/k) - 1.$$

PROPOSITION 3.3. — *Soit v une valuation sur K de rang rationnel maximal. Pour tout fibré en droites L sur X et toute sous-algèbre graduée A non triviale de $R(X, L)$, on a alors :*

(i) $S_v(A) \subset \mathbb{N} \times V_v$ *est un semigroupe gradué* discret *(au sens de 1.2) ;*

(ii) $\operatorname{card} S_v(A)_m = \dim_k A_m$ *pour tout* $m \in \mathbb{N}$ *;*

(iii) $\kappa(S_v(A)) = \kappa(A)$ *;*

(iv) *si L est gros, $S_v(X, L)$ engendre $\mathbb{Z} \times \Lambda_v$.*

Rappelons qu'un fibré en droites L sur X est *gros* ssi, pour tout fibré ample H, on a $H^0(X, mL - H) \neq 0$ pour $m \gg 1$. On renvoie à [Laz04] pour plus de détails.

Démonstration. — (i) Comme v est de rang rationnel maximal, Λ_v est un réseau de V_v d'après le point (i) de la proposition 2.23. Le semigroupe $S_v(A)$, étant contenu dans $\mathbb{Z} \times \Lambda_v$, engendre donc un sous-groupe discret de $\mathbb{R} \times V_v$, ce qui signifie par définition que $S_v(A)$ est un semigroupe gradué discret.

(ii) Ceci résulte directement de (14) et du point (ii) de la proposition 2.23.

(iii) Soit $\hat{v}_L : K(L)^* \to \mathbb{Z} \times \Lambda_v$ la valuation définie dans la remarque 3.2. Puisque v est de rang rationnel maximal sur K et que L est trivial sur un voisinage de Zariski du centre de v sur X, il est facile de voir que $\hat{v}_L$ est elle aussi de rang rationnel maximal.

Par la propriété de transitivité (iii) de la proposition 2.23, c'est donc encore le cas de la restriction de $\hat{v}_L$ à $K(A)$. Mais (15) implique que $\hat{v}_L(K(A)^*) = \mathbb{Z}S_v(A)$, et on obtient (iii).

(iv) Le point (iii) donne déjà que $\mathbb{Z}S_v(X, L)$ est d'indice fini dans $\mathbb{Z} \times \Lambda_v$. Pour avoir le résultat plus précis de (iv), on adapte l'argument de [LM09, Lemma 2.2]. Puisque Λ_v est un groupe abélien libre de rang n, on peut choisir des fonctions rationnelles $f_1, ..., f_n \in K^*$ telles que le groupe Λ_v soit engendré par les $v(f_i)$.

Le conducteur $\mathfrak{c} := \{g \in \mathcal{O}_X \mid g \cdot f_i \in \mathcal{O}_X,\ i = 1, ..., n\}$ étant un faisceau cohérent d'idéaux, on peut trouver un fibré ample H tel que $\mathcal{O}_X(H) \otimes \mathfrak{c}$ admette une section globale non nulle τ. Pour $i = 1, ..., n$, $\tau \cdot f_i$ définit donc une section $\sigma_i \in H^0(X, H)$. On note que $v(f_i) = v(\sigma_i) - v(\tau)$.

Comme L est gros, on peut maintenant choisir $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $mL - H$ admette une section non nulle s ; il en résulte que $S_v(X, L)$ contient $(m, v(s)+v(\tau))$ et $(m, v(s)+v(\sigma_i))$ pour $i = 1, ..., n$, et donc que $\mathbb{Z}S_v(X, L)$ contient $(0, v(f_i))$ pour $i = 1, ..., n$.

Ceci montre que $\mathbb{Z}S_v(X, L)$ contient $\{0\} \times \Lambda_v$, et il reste donc à vérifier qu'il contient aussi $(1, 0)$. On peut choisir H très ample tel que $H' := L + H$ soit aussi très ample. Une section non nulle $s \in H^0(X, mL - H)$ avec $m \gg 1$ peut alors aussi être vue comme une section de $(m+1)L - H' = mL - H$. Puisque H et H' sont tous deux très amples, chacun d'eux admet une section ne s'annulant pas sur le centre de v ; on voit donc que $(m, v(s))$ et $(m+1, v(s))$ sont dans $S_v(X, L)$, ce qui donne bien $(1, 0) \in \mathbb{Z}S_v(X, L)$. □

3.2. Corps d'Okounkov et multiplicité

On fixe dorénavant une valuation v sur K *de rang rationnel maximal*. On se donne également un fibré en droites L sur X et une sous-algèbre graduée non triviale A de $R(X, L)$.

DÉFINITION 3.4. — *Le* corps d'Okounkov $\Delta_v(A)$ *de A relatif à v est défini comme la base du semigroupe gradué $S_v(A) \subset \mathbb{N} \times V_v$ (cf. définition 1.9).*

Pour $A = R(X, L)$, on note simplement $\Delta_v(X, L) := \Delta_v(R(X, L))$. Plus concrètement, on a par (5)

$$\Delta_v(A) = \overline{\bigcup_{m \geq 1} \left\{\tfrac{1}{m} v(s) \mid s \in A_m \setminus \{0\}\right\}} \subset V_v. \tag{16}$$

Il s'agit d'un convexe fermé de V_v. Mieux :

LEMME 3.5. — *Le corps d'Okounkov $\Delta_v(A)$ est compact.*

Démonstration. — Puisque $\Delta_v(A)$ est contenu dans $\Delta_v(X, L)$, il suffit de montrer le résultat pour $A = R(X, L)$. Par le lemme de Chow [Har77, p.107], il existe un morphisme birationnel $\pi : Y \to X$ avec Y projective. On peut alors trouver un fibré en droites ample H sur Y tel que $H - \pi^* L$ admette une section globale s sur Y. Identifiant v avec une valuation sur $k(Y) \simeq k(X)$, on vérifie facilement que $v(s) + \Delta_v(X, L) \subset \Delta_v(Y, H)$, ce qui nous ramène à montrer que $\Delta_v(Y, H)$ est compact.

Le théorème de Hilbert-Serre implique que $\dim H^0(Y, mH) = O(m^n)$, et donc $\operatorname{card} S_v(Y,H)_m = O(m^n)$ par le point de (ii) de la proposition 3.3. Mais le point (iii) de la même proposition donne $\kappa(S_v(X,L)) = n$, et le corollaire 1.14 montre donc que $\Delta_v(Y,H)$ est compact. □

Comme on l'a vu au §1.2, le sous-espace affine de V_v engendré par $\Delta_v(A)$ est naturellement muni d'une structure entière, ce qui permet de normaliser sa mesure de Lebesgue $\mu_{S_v(A)}$. On note le cas particulier important suivant :

LEMME 3.6. — *Si on note μ_v la mesure de Lebesgue de V_v normalisée par son réseau Λ_v, alors $\mu_{S_v(X,L)} = \mu_v$ pour tout fibré en droites gros L.*

Démonstration. — Posons $S = S_v(X,L)$. La structure entière sur l'enveloppe affine $\mathrm{Aff}(S)$ de $\Delta(S)$ ne dépend que du groupe $\mathbb{Z}S$ engendré par S ; or on a $\mathbb{Z}S = \Lambda_v$ par le point (iii) de la proposition 3.3, et le résultat suit. □

Grâce au corollaire 1.14, on peut maintenant énoncer le résultat fondamental suivant :

THÉORÈME 3.7. — *Soient X une variété propre sur k et L un fibré en droites sur X. Pour toute sous-algèbre graduée non triviale $A \subset R(X,L)$, la limite*

$$\lim_{m\in\mathbb{N}(A), m\to+\infty} \frac{\dim_k A_m}{m^{\kappa(A)}}$$

existe dans $]0,+\infty[$.

Pour toute valuation v sur $k(X)$ de rang rationnel maximal, on a de plus

$$\lim_{m\in\mathbb{N}(A), m\to+\infty} \frac{\dim A_m}{m^{\kappa(A)}} = \mu_{S_v(A)}\left(\Delta_v(A)\right).$$

Rappelons qu'on a posé $\kappa(A) = \operatorname{tr.deg}(K(A)/k) - 1$, et que ceci coïncide avec $\kappa(S_v(A))$ d'après le point (iii) de la proposition 3.3.

DÉFINITION 3.8. — *La* multiplicité *de A est définie comme*

$$e(A) := \lim_{m\in\mathbb{N}(A), m\to+\infty} \frac{\dim_k A_m}{m^{\kappa(A)}/\kappa(A)!}.$$

On prendra garde au fait que la multiplicité n'est en général pas un entier, ni même un rationnel. Le choix de normalisation est dicté par le

COROLLAIRE 3.9. — *Si L est un fibré en droites gros, de volume* $\mathrm{vol}(L)$, *alors*

$$e(R(X,L)) = \mathrm{vol}(L) = n!\, \mu_v\left(\Delta_v(X,L)\right),$$

avec μ_v la mesure de Lebesgue de V_v normalisée par son réseau Λ_v.

Ici encore, on renvoie à [Laz04] pour la définition et les propriétés du volume $\mathrm{vol}(L)$.

Démonstration. — L'égalité $e(R(X,L)) = \mathrm{vol}(L)$ vaut par définition. Le second point résulte alors du théorème 3.7 combiné à l'égalité $\mu_{S_v(X,L)} = \mu_v$ du lemme 3.6. □

Remarque 3.10. — Il existe en particulier une constante $C > 0$ telle que

$$C^{-1}m^{\kappa(A)} \leq \dim A_m \leq Cm^{\kappa(A)}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}(A)$ suffisamment grand. Pour $A = R(X, L)$ et k de caractéristique zéro, ce résultat de croissance polynomiale fut établi pour la première fois par Shigeru Iitaka dans [Iit71].

Remarque 3.11. — Avant [KK09], l'existence de la limite dans le théorème 3.7 n'était connue que dans les deux cas suivants :

- A est de type fini (comme conséquence du théorème de Hilbert-Serre, voir le lemme 3.14 ci-dessous).
- le corps de base k est de caractéristique zéro, et $A = R(X, L)$ est l'algèbre des sections d'un fibré L gros (cf. [Laz04]).

Exemple 3.12 (Le cas des courbes). — Soit C une courbe projective lisse, et notons g son genre. Toute valuation sur $K = k(C)$ est dans ce cas une valuation discrète, multiple positif de l'ordre d'annulation $v_p : k(C)^* \to \mathbb{Z}$ en un point $p \in C$.

Un fibré en droites L tel que $R(C, L) \neq k$ est nécessairement ample, de degré $d > 0$. Pour tout $m \gg 1$, on affirme que $S_{v_p}(C, L)_m$ est constitué de $md + 1 - g$ entiers situés entre 0 et md (la *suite des valeurs d'annulation* de mL au point p).

En effet, dès que $md > 2g - 2$, on a $h^1(C, mL) = h^0(C, K_C - mL) = 0$ par dualité de Serre, d'où $h^0(C, mL) = md + 1 - g$ par Riemann-Roch ; la proposition 3.3 montre donc que $S_{v_p}(X, L) \subset \mathbb{N}$ est de cardinal $md + 1 - g$. On a de plus $v_p(\sigma) \leq md$ pour toute section $\sigma \in H^0(C, mL) \setminus \{0\}$, ce qui démontre l'assertion.

On déduit aisément de ce qui précède que $\Delta_{v_p}(C, L) = [0, d] \subset \mathbb{R}$. Il est cependant remarquable que, même dans un cas aussi simple, le semigroupe $S_{v_p}(C, L)$ n'est pas de type fini en général.

Plus précisément, la remarque 1.16 montre que $S_{v_p}(C, L)$ est de type fini ssi il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $[0, d] = \operatorname{Conv}\left(\frac{1}{m}S_{v_p}(C, L)_m\right)$, ce qui signifie qu'il existe une section $\sigma \in H^0(C, mL)$ telle que $v_p(\sigma) = md$. On en déduit que

$$S_{v_p}(C, L) \text{ est de type fini} \iff L - dp \text{ est de torsion dans } \operatorname{Pic}^0(C).$$

Si $g \geq 1$ et si k est un corps non dénombrable de caractéristique 0, $S_{v_p}(C, L)$ n'est donc pas de type fini pour $p \in C$ très général (i.e. en dehors d'un ensemble au plus dénombrable).

Exemple 3.13. — En combinant l'exemple ci-dessus avec la remarque 3.2, on va construire une surface affine X sur $\mathbb{C}$ et une valuation v centrée sur X, de groupe des valeurs $\mathbb{Z}^2$ muni de l'ordre lexicographique (et donc de rang rationnel maximal), mais dont le semigroupe des valeurs $S_v(X)$ n'est pas de type fini.

Pour ce faire, on considère une courbe projective lisse $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, de degré au moins 3, donc de genre $g \geq 1$. On pose $X := \hat{C} = \operatorname{Spec} R(C, \mathcal{O}(1))$, le cône affine sur C. Pour $p \in C$ très général, soit $\hat{v}_p$ la valuation sur X à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$ induite par v_p, comme dans la remarque 3.2. Alors $\hat{v}_p$ est centrée au sommet de X, et $S_{\hat{v}_p}(X) = S_{v_p}(C, \mathcal{O}(1))$ n'est pas de type fini.

3.3. Interprétation géométrique de la multiplicité

Soit A une sous-algèbre graduée non triviale de l'algèbre des sections $R(X, L)$ d'un fibré en droites L sur X. Le but de cette partie est de donner une interprétation géométrique de la multiplicité $e(A)$, en suivant [KK09, §3.1]. On commence par le cas particulier suivant, celui où la k-algèbre A est de type fini, engendrée en degré 1.

LEMME 3.14. — *Soit $V \subset H^0(X, L)$ un sous-espace vectoriel non nul, et soit $\Phi_V : X \dashrightarrow \mathbb{P}(V^*)$ l'application rationnelle définie par V. Si l'on note $\langle V \rangle$ la sous-algèbre de $R(X, L)$ engendrée par V, alors*

$$\kappa\left(\langle V \rangle\right) = \dim \Phi_V(X)$$

et

$$e(\langle V \rangle) = \deg \Phi_V(X).$$

On entend par $\Phi_V(X)$ l'adhérence de l'image d'un ouvert de Zariski non vide sur lequel Φ_V est définie.

Démonstration. — D'après le théorème de Hilbert-Serre [Har77, p. 51–52], il suffit de vérifier que $\langle V \rangle$ est isomorphe à l'anneau des coordonnées homogènes de $\Phi_V(X)$.

Soit $(\sigma_1, ..., \sigma_N)$ une base de V, de sorte que $\Phi_V : X \dashrightarrow \mathbb{P}(V^*) \simeq \mathbb{P}^{N-1}$ est donnée en coordonnées homogènes par $\Phi_V(x) = [\sigma_1(x) : ... : \sigma_N(x)]$. Si l'on note $I \subset k[T_1, ..., T_n]$ l'idéal homogène de $\Phi_V(X)$, on voit donc que $P(\sigma_1, ..., \sigma_N) = 0 \Leftrightarrow P \circ \Phi_V = 0 \Leftrightarrow P \in I$ pour tout polynôme homogène P. Comme on a par définition

$$\langle V \rangle_m = \{P(\sigma_1, ..., \sigma_N) \mid P \in k[T_1, ..., T_N]_m\}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$, on obtient bien $\langle V \rangle \simeq k[T_1, ..., T_N]/I$. □

On considère maintenant le cas général :

THÉORÈME 3.15. — *Soit A une sous-algèbre graduée non triviale de $R(X, L)$. Pour tout $m \in \mathbb{N}(A)$, notons*

$$\Phi_m : X \dashrightarrow \mathbb{P}(A_m^*)$$

l'application rationnelle définie par le système linéaire $A_m \subset H^0(X, mL)$. On a alors $\kappa(A) = \dim \Phi_m(X)$ pour tout $m \in \mathbb{N}(A)$ suffisamment grand, et

$$e(A) = \lim_{m \in \mathbb{N}(A), m \to \infty} \frac{\deg \Phi_m(X)}{m^{\kappa(A)}}.$$

Démonstration. — Pour chaque $m \in \mathbb{N}(A)$, notons $\langle A_m \rangle$ la sous-algèbre de A engendrée par A_m, qui satisfait $\mathbb{N}(\langle A_m \rangle) = \mathbb{N}m$ et

$$\langle A_m \rangle_{lm} = \operatorname{Im}\left(\operatorname{Sym}^l A_m \to A_{lm}\right)$$

pour tout $l \in \mathbb{N}$.

Étape 1. Montrons d'abord que

$$\kappa(A) = \kappa(\langle A_m \rangle) = \dim \Phi_m(X)$$

pour tout $m \in \mathbb{N}(A)$ assez grand, qui est un fait bien connu. Si l'on note $K(A)_0$ le sous-corps de $K(A)$ formé des quotients f/g avec $f, g \in A_m$ de même degré, on voit facilement que $K(A) \simeq K(A)_0(T)$, et donc

$$\operatorname{tr.deg}(K(A)_0/k) = \operatorname{tr.deg}(K(A)/k) - 1 = \kappa(A).$$

Mais puisque $K(A)$ est de type fini sur k, en tant que sous-corps de K, il est également clair qu'on a $K(\langle A_m \rangle)_0 = K(A)_0$ pour tout $m \in \mathbb{N}(A)$ assez grand. Le lemme 3.14 nous permet alors de conclure, puisqu'il implique que $K(\langle A_m \rangle)_0$ est le corps de fonctions de $\Phi_m(X)$.

Étape 2. On vérifie maintenant que

$$\lim_{m \in \mathbb{N}(S), m \to \infty} e\left(\langle A_m \rangle\right) = e(A).$$

Soit v une valuation sur K de rang rationnel maximal, et posons $S := S_v(A)$. Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, le semigroupe $T(m) := S_v\left(\langle A_m \rangle\right)$ contient $\{m\} \times S_m$. Comme on a

$$\kappa(\langle A_m \rangle) = \kappa(T(m)),\ \kappa(A) = \kappa(S),$$

et

$$e(\langle A_m \rangle) = \frac{\mu_{T(m)}(\Delta(T(m)))}{\kappa(\langle A_m \rangle)!},\ e(A) = \frac{\mu_S(\Delta(S))}{\kappa(A)!}$$

par le théorème 3.7, on conclut par le théorème 1.15.

Étape 3. En appliquant, à $m \in \mathbb{N}(A)$ fixé, le lemme 3.14 à mL et $A_m \subset H^0(X, mL)$, on obtient par le théorème de Hilbert-Serre (ou par le théorème 3.7)

$$\dim \langle A_m \rangle_{lm} = e_m \frac{l^{d_m}}{d_m!} + o\left(l^{d_m}\right)$$

avec $d_m := \dim \Phi_m(X)$ et $e_m := \deg \Phi_m(X)$. Il en résulte que $\kappa(\langle A_m \rangle) = d_m$ et $m(\langle A_m \rangle) = e_m / m^{d_m}$, et on conclut grâce à l'étape 2. $\square$

Remarque 3.16. — On trouvera dans [Jow12, Theorem C] une variante du théorème 3.15, exprimée en termes de nombres d'intersection génériques, dans le cas où Φ_m est birationnelle sur son image pour tout $m \in \mathbb{N}$ suffisamment grand.

4. GÉOMÉTRIE DES CORPS D'OKOUNKOV

Le but de cette partie est d'étudier de façon plus détaillée la géométrie des corps d'Okounkov, suivant l'approche de [LM09]. On décrit dans un premier temps une variante des corps d'Okounkov pour les classes d'équivalence numérique de diviseurs ; suivant [KLM12, AKL12, Sep12], on s'intéresse ensuite à la forme possible que peuvent revêtir les corps d'Okounkov, en particulier ceux associés aux valuations de drapeau.

On désigne par X une variété algébrique *normale et projective* sur un corps algébriquement clos k de caractéristique quelconque, et on se donne une valuation v sur $k(X)$ de rang rationnel maximal.

4.1. Corps d'Okounkov numériques

4.1.1. Positivité numérique. — On note $\mathrm{Div}(X)$ le groupe des diviseurs de Cartier de X, qui se plonge dans le groupe abélien libre $Z^1(X)$ des cycles de codimension 1 (diviseurs de Weil), puisque X est supposée normale. On note $\mathrm{Div}_{\geq 0}(X)$ le sous-semigroupe des diviseurs effectifs. On note également $\equiv$ l'équivalence numérique sur $\mathrm{Div}(X)_{\mathbb{R}}$, définie par $D \equiv D'$ ssi $D \cdot C = D' \cdot C$ pour toute courbe propre $C \subset X$, et $N^1(X)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel quotient, qui est de dimension finie par le théorème de la base.

Rappelons qu'une classe numérique $\delta \in N^1(X)$ est *grosse* s'il existe un $\mathbb{R}$-diviseur effectif E tel que $\delta - E$ soit ample. Un fibré en droites L est gros ssi sa classe numérique $c_1(L) \in N^1(X)$ est grosse (cf. [Laz04]).

On note $\mathrm{Big}(X) \subset N^1(X)$ le cône formé des classes grosses (*big* en anglais), qui est convexe et ouvert. Une classe $\delta \in N^1(X)$ dans son adhérence $\overline{\mathrm{Big}}(X)$ est dite *pseudoeffective*.

Enfin, une classe $\delta \in N^1(X)$ est *nef* si $\delta \cdot C \geq 0$ pour toute courbe propre $C \subset X$. Le cône $\mathrm{Nef}(X) \subset N^1(X)$ des classes nef est convexe et fermé, et son intérieur coïncide avec le cône des classes amples d'après le théorème de Kleiman.

4.1.2. Corps d'Okounkov et équivalence numérique. — Toute valuation v sur $k(X)$ définit une application $\mathbb{Z}$-linéaire $v : \mathrm{Div}(X) \to \Lambda_v$, définie par $v(D) := v(f)$ avec $f \in K^*$ une équation locale de D au voisinage du centre de v sur X. On note que $v(\mathrm{Div}_{\geq 0}(X)) \subset S_v(X)$. Par linéarité, on obtient une application $\mathbb{R}$-linéaire $v : \mathrm{Div}(X)_{\mathbb{R}} \to V_v$.

Si L est un fibré en droites sur X, alors

$$R(X, L) \neq k \Longleftrightarrow \{D \in \mathrm{Div}_{\geq 0}(X)_{\mathbb{Q}} \mid D \sim_{\mathbb{Q}} L\} \neq \emptyset,$$

où $D \sim_{\mathbb{Q}} L$ signifie qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m(D - L) = \mathrm{div}(f)$ avec $f \in k(X)^*$. L'équation (16) montre que

$$\Delta_v(X, L) = \overline{v\left(\{D \in \mathrm{Div}_{\geq 0}(X)_{\mathbb{Q}} \mid D \sim_{\mathbb{Q}} L\}\right)}. \tag{17}$$

Proposition 4.1 ([LM09], Proposition 4.1). — *Si L est un fibré en droites* gros, *alors*

$$\Delta_v(X, L) = \overline{v\left(\{D \in \mathrm{Div}_{\geq 0}(X)_{\mathbb{R}} \mid D \equiv L\}\right)}.$$

En particulier, $\Delta_v(X,L)$ ne dépend que de la classe d'équivalence numérique de L.

Démonstration. — L'inclusion

$$\Delta_v(X,L) \subset \overline{v\left(\{D \in \mathrm{Div}_{\geq 0}(X)_{\mathbb{R}} \mid D \equiv L\}\right)}$$

est claire par (17).

Réciproquement, soit D un $\mathbb{R}$-diviseur effectif numériquement équivalent à L. Pour voir que $v(D)$ est dans $\Delta_v(X,L)$, on se ramène d'abord au cas où D est un $\mathbb{Q}$-diviseur, de la façon suivante. Notons $W \subset Z^1(X)_{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension finie) engendré par les composantes irréductibles de D. Notons que tout élément de W suffisamment proche de D est un diviseur effectif. L'ensemble

$$N := \{D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbb{R}} \mid D \in W,\, D \equiv L\}$$

est un espace affine défini sur $\mathbb{Q}$, et $D \in N$ est limite d'une suite $(D_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $N_{\mathbb{Q}}$. Mais on a alors $v(D) = \lim_j v(D_j)$, et D_j est un $\mathbb{Q}$-diviseur numériquement équivalent à L, et effectif pour $j \gg 1$.

On suppose donc que D est un $\mathbb{Q}$-diviseur $\mathbb{Q}$-Cartier numériquement équivalent à L, et on veut voir que $v(D) \in \Delta_v(X,L)$. D'après [Fuj83, Corollary 6.10] (voir aussi [Laz04, Lemma 2.2.42]), on peut trouver un fibré en droites H sur X tel que $H+P$ soit très ample pour tout fibré en droites nef P.

Puisque D est gros, on peut ensuite choisir $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que m_0D soit Cartier et que $m_0D - H$ admette une section non nulle $\sigma \in H^0(X, m_0D-H)\setminus\{0\}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose $P_m := (m+m_0)(L-D)$, et on observe que

$$(m+m_0)L = mD + (m_0D - H) + (H + P_m).$$

Si m est suffisamment divisible, alors P_m est un fibré en droites numériquement trivial ; $H + P_m$ est donc très ample, et admet par conséquent une section ne s'annulant pas sur le centre de v dans X, ce qui montre que

$$\frac{mv(D) + v(\sigma)}{m+m_0} \in \Delta_v(X,L).$$

Ceci étant vrai pour tout m suffisamment divisible, on obtient bien à la limite $v(D) \in \Delta_v(X,L)$. □

Remarque 4.2. — Le résultat ci-dessus admet une réciproque [Jow12, Theorem A] : si L_1, L_2 sont deux fibrés en droites gros sur X tels que $\Delta_v(X,L_1) = \Delta_v(X,L_2)$ pour toute valuation v sur K de rang rationnel maximal (les valuations de drapeau suffisent), alors $L_1 \equiv L_2$.

4.1.3. Définition des corps d'Okounkov numériques. — La proposition 4.1 permet déjà de définir par homogénéité le *corps d'Okounkov numérique* d'une classe grosse $\delta \in N^1(X)_{\mathbb{Q}}$, en choisissant $m \in \mathbb{N}^*$ et un fibré gros L tel que $c_1(L) = m\delta$, et en posant

$$\Delta_v^{\mathrm{num}}(X, \delta) := \tfrac{1}{m} \Delta_v(X, L).$$

On étend maintenant cette définition à toute classe pseudoeffective, en suivant [LM09, Remark 4.14].

Définition 4.3. — *Le* corps d'Okounkov numérique global $\Delta_v^{\mathrm{num}}(X)$ *de* X *relatif à* v *est défini comme l'adhérence dans* $V_v \times N^1(X)$ *de*

$$\bigcup_{\delta \in N^1(X)_{\mathbb{Q}} \cap \mathrm{Big}(X)} \Delta_v(X, \delta) \times \{\delta\}.$$

Si $\delta \in \overline{\mathrm{Big}}(X)$ *est une classe pseudoeffective, on définit son* corps d'Okounkov numérique *comme la fibre*

$$\Delta_v^{\mathrm{num}}(X, \delta) := \{x \in V_v \mid (x, \delta) \in \Delta_v^{\mathrm{num}}(X)\}$$

de $\Delta_v^{\mathrm{num}}(X)$ *au-dessus de* δ*.*

On vérifie que $\Delta_v^{\mathrm{num}}(X)$ est un cône convexe fermé (et donc pas du tout un corps convexe au sens usuel de la géométrie convexe !). On a ainsi

$$\Delta_v^{\mathrm{num}}(X, \delta) + \Delta_v^{\mathrm{num}}(X, \delta') \subset \Delta_v^{\mathrm{num}}(X, \delta + \delta'), \tag{18}$$

$$\Delta_v^{\mathrm{num}}(X, t\delta) = t \Delta_v^{\mathrm{num}}(X, \delta) \tag{19}$$

pour $\delta, \delta' \in N^1(X)$ pseudoeffectives et $t \in \mathbb{R}_+$.

Les corps d'Okounkov numériques admettent la description plus directe suivante, dont la vérification ne pose pas de difficulté :

Proposition 4.4. — *Pour toute classe grosse* $\delta \in N^1(X)$*,* $\Delta_v^{\mathrm{num}}(X, \delta) \subset V_v$ *est un convexe compact d'intérieur non vide, et on a*

$$\Delta_v^{\mathrm{num}}(X, \delta) = \overline{v\left(\{D \in \mathrm{Div}_{\geq 0}(X)_{\mathbb{R}} \mid D \equiv \delta\}\right)}.$$

Si $\delta \in N^1(X)$ *est seulement pseudoeffective, alors* $\Delta_v(X, \delta) \subset V_v$ *est un convexe compact non vide, et*

$$\Delta_v^{\mathrm{num}}(X, \delta) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \Delta_v^{\mathrm{num}}(X, \delta + \varepsilon h)$$

pour toute classe ample $h \in N^1(X)$*.*

On en déduit par exemple que

$$\delta \in \mathrm{Nef}(X) \Longrightarrow 0 \in \Delta_v^{\mathrm{num}}(X, \delta). \tag{20}$$

Réciproquement, on note que si $0 \in \Delta_v^{\mathrm{num}}(X, \delta)$ pour tout v, alors δ est nef.

Un fibré en droites L sur X avec $R(X, L) \neq k$ est en particulier pseudoeffectif, et on a $\Delta_v(X, L) \subset \Delta_v^{\mathrm{num}}(X, L)$; cette inclusion est cependant stricte en général, même quand L est nef :

Exemple 4.5. — On se place sur $k = \mathbb{C}$. Une construction classique due à Serre (décrite par exemple dans [DPS94, Example 1.7]) exhibe un exemple de courbe projective lisse C dans une surface projective lisse X sur $\mathbb{C}$, avec la propriété que $X \setminus C$ soit Stein en tant que variété analytique complexe (i.e. réalisable comme une sous-variété analytique fermée d'un $\mathbb{C}^N$), sans être affine comme surface algébrique (i.e. non plongeable comme sous-variété algébrique fermée d'un $\mathbb{C}^N$).

On a en fait $(C^2) = 0$, de sorte que C est nef, et $X \setminus C$ n'admet aucune fonction régulière non constante, ce qui implique immédiatement que

$$\{D \in \mathrm{Div}_{\geq 0}(X)_{\mathbb{Q}} \mid D \sim_{\mathbb{Q}} C\}$$

est réduit à C elle-même. Si le centre de v sur X est contenu dans C, (17) montre donc que $\Delta_v(X, C) = \{v(C)\}$ avec $v(C) \neq 0$; mais $0 \in \Delta_v^{\mathrm{num}}(X, C)$ par (20), d'où $\Delta_v(X, C) \subsetneq \Delta_v^{\mathrm{num}}(X, C)$.

4.1.4. Volume et dimension numérique. — Rappelons que la fonction *volume* vol : $N^1(X) \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue, avec

$$\mathrm{vol}(\delta) > 0 \Longleftrightarrow \delta \in \mathrm{Big}(X)$$

pour toute classe $\delta \in N^1(X)$, et telle que $\mathrm{vol}(\delta) = (\delta^n)$ si δ est nef (cf. [Laz04]).

PROPOSITION 4.6. — *Si on note μ_v la mesure de Lebesgue de V_v normalisée par son réseau Λ_v, alors* $\mathrm{vol}(\delta) = n!\, \mu_v\left(\Delta_v^{\mathrm{num}}(X, \delta)\right)$ *pour toute classe grosse $\delta \in N^1(X)$.*

Démonstration. — Pour $\delta \in N^1(X)_{\mathbb{Q}} \cap \mathrm{Big}(X)$, le résultat découle du corollaire 3.9. Dans le cas général, (18), (19) et l'inégalité de Brunn-Minkowski montrent que $\delta \mapsto \mu_v(\Delta_v^{\mathrm{num}}(X, \delta))$ est log-concave sur $\mathrm{Big}(X)$, et donc continue puisque ce cône est un ouvert convexe. On conclut par densité. □

Rappelons également que la *dimension numérique* d'une classe nef $\delta \in N^1(X)$ est définie comme

$$\nu(\delta) = \max\left\{p \in \mathbb{N} \mid (\delta^p \cdot h^{n-p}) \neq 0\right\},$$

où $h \in N^1(X)$ est une classe ample quelconque. Comme $\mathrm{vol}(\delta + \varepsilon h) = (\delta + \varepsilon h)^n$, on a aussi

$$\nu(\delta) = \max\left\{p \in \mathbb{N} \mid \mathrm{vol}(\delta + \varepsilon h) \geq c\varepsilon^{n-p},\, c > 0\right\},$$

qu'on peut prendre comme définition de la dimension numérique $\nu(\delta)$ d'une classe pseudoeffective quelconque $\delta \in N^1(X)$ [Nak04]. On a en particulier $\nu(\delta) = n$ ssi δ est grosse.

Remarque 4.7. — D'après [Leh11], cette notion de dimension numérique coïncide avec celle de [BDPP04], i.e. on a

$$\nu(\delta) = \max\{p \in \mathbb{N} \mid \langle \delta^p \rangle \neq 0\},$$

où $\langle \delta^p \rangle \in N^p(X)$ désigne la classe d'intersection mobile définie dans [BDPP04] dans le cas complexe, et dans [BFJ09] en général.

Lemme 4.8. — *Pour toute classe pseudoeffective $\delta \in N^1(X)$ on a*

$$\dim \Delta_v^{\mathrm{num}}(X,\delta) \le \nu(\delta).$$

Démonstration. — Si on pose $d := \dim \Delta_v^{\mathrm{num}}(X,\delta)$ et $\Delta := \Delta_v^{\mathrm{num}}(X,h)$ pour une classe ample donnée $h \in N^1(X)$, l'existence des volumes mixtes montre que $\mu_v(\Delta_v^{\mathrm{num}}(X,\delta) + \varepsilon\Delta) \sim \varepsilon^d$. D'après la proposition 4.6, on a donc $\mathrm{vol}(\delta + \varepsilon h) \ge c\varepsilon^d$ avec $c > 0$, et on conclut par définition de $\nu(\delta)$. □

Si L est un fibré en droites sur X, sa dimension d'Iitaka $\kappa(L)$ coïncide avec la dimension de $\Delta_v(X,L)$, et l'inclusion $\Delta_v(X,L) \subset \Delta_v^{\mathrm{num}}(X,L)$ redonne donc l'inégalité standard $\kappa(L) \le \nu(L)$ entre dimension d'Iitaka et dimension numérique.

Comme on le verra dans l'exemple 4.14, l'inégalité $\dim \Delta_v^{\mathrm{num}}(X,\delta) \le \nu(\delta)$ est stricte en général lorsque $\delta \in \overline{\mathrm{Big}}(X)$ est pseudoeffective ; la proposition 4.15 ci-dessous donne cependant :

Proposition 4.9. — *Il existe une valuation v sur $k(X)$ de rang rationnel maximal, telle que* $\dim \Delta_v^{\mathrm{num}}(X,\delta) = \nu(\delta)$ *pour toute classe nef $\delta \in N^1(X)$.*

4.2. Corps d'Okounkov relatifs aux valuations de drapeau

Comme on l'a vu dans l'exemple 2.17, un drapeau de sous-variétés

$$X_\bullet = \{X = X_0 \supset X_1 \supset ... \supset X_n = \{p\}\}$$

définit une valuation de rang rationnel maximal $v_{X_\bullet} : k(X)^* \to \mathbb{Z}^n$, centrée en $p \in X$ et ayant $\mathbb{N}^n$ comme semigroupe des valeurs sur X. On supposera ici que X_i est globalement un diviseur de Cartier de X_{i-1} (et pas seulement au voisinage de p). On note pour simplifier $X_i|_Y$ la classe d'équivalence linéaire définie par $\mathcal{O}_{X_{i-1}}(X_i)|_Y$, pour toute sous-variété $Y \subset X_{i-1}$.

De même, d'après l'exemple 2.18, tout drapeau $F_\bullet$ en sous-espaces linéaires de $\mathbb{P}(T_{X,p})$ pour un point fermé régulier $p \in X$ définit une valuation de rang rationnel maximal $v_{p,F_\bullet} : k(X)^* \to \mathbb{Z}^n$, ayant également $\mathbb{N}^n$ comme semigroupe des valeurs sur X.

Pour toute classe pseudoeffective $\delta \in N^1(X)$, on notera simplement

$$\Delta_{X_\bullet}^{\mathrm{num}}(\delta),\ \Delta_{p,F_\bullet}^{\mathrm{num}}(\delta) \subset \mathbb{R}_+^n$$

les corps d'Okounkov numériques relatifs à $v_{X_\bullet}$ et $v_{p,F_\bullet}$.

Proposition 4.10. — *Posons, pour tout drapeau $X_\bullet$ de sous-variétés de X et toute classe pseudoeffective $\delta \in N^1(X)$,*

$$\Delta_{X_\bullet}^{\mathrm{nef}}(\delta) := \bigcap_{1\le i\le n} \left\{x \in \mathbb{R}_+^n \mid (\delta - x_1X_1 - ... - x_iX_i)\,|_{X_{i-1}} \in \mathrm{Nef}(X_{i-1})\right\}$$

et

$$\Delta_{X_\bullet}^{\mathrm{psef}}(\delta) := \bigcap_{1\le i\le n} \left\{x \in \mathbb{R}_+^n \mid (\delta - x_1X_1 - ... - x_iX_i)\,|_{X_{i-1}} \in \overline{\mathrm{Big}}(X_{i-1})\right\}.$$

Alors $\Delta^{\mathrm{nef}}_{X_\bullet}(\delta)$ *et* $\Delta^{\mathrm{psef}}_{X_\bullet}(\delta)$ *sont des convexes compacts, et on a*

$$\Delta^{\mathrm{nef}}_{X_\bullet}(\delta) \subset \Delta^{\mathrm{num}}_{X_\bullet}(\delta) \subset \Delta^{\mathrm{psef}}_{X_\bullet}(\delta).$$

Démonstration. — Puisque les cônes nef et psef de $N^1(X_i)$ sont convexes et fermés, $\Delta^{\mathrm{nef}}_{X_\bullet}(L)$ et $\Delta^{\mathrm{psef}}_{X_\bullet}(L)$ le sont aussi. Il suffit donc de montrer que $\Delta^{\mathrm{psef}}_{X_\bullet}(L)$ est borné. Choisissons pour ce faire un diviseur ample H sur X. Si $(x_1, ..., x_n)$ appartient à $\Delta^{\mathrm{psef}}_{X_\bullet}(L)$, alors le nombre d'intersection $((L - x_1X_1) \cdot H^{n-1})_X$, calculé sur X, est positif, donc

$$0 \le x_1 \le \frac{(L \cdot H^{n-1})_X}{(X_1 \cdot H^{n-1})_X}$$

est borné ; on obtient de même que

$$0 \le x_i \le \frac{((L - x_1X_1 - ... - x_{i-1}X_{i-1}) \cdot H^{n-i})_{X_{i-1}}}{(X_i \cdot H^{n-i})_{X_{i-1}}},$$

ce qui montre par récurrence sur $i = 1, ..., n$ que les x_i sont bornés.

En utilisant la proposition 4.4, on voit facilement que les deux inclusions à montrer se ramènent au cas où δ est la classe d'un fibré en droites gros L.

On commence par vérifier que $\Delta_{X_\bullet}(L) \subset \Delta^{\mathrm{psef}}_{X_\bullet}(L)$. Soit $\sigma \in H^0(X, mL)\backslash\{0\}$ et posons $v(\sigma) = (a_1, ..., a_n)$. D'après (16), il s'agit de voir que $(\frac{a_1}{m}, ..., \frac{a_n}{m}) \in \Delta^{\mathrm{psef}}_{X_\bullet}(L)$, ce qui revient à dire que $(mL - a_1X_1 - ... - a_iX_i)|_{X_{i-1}}$ est pseudoeffectif pour $i = 1, ..., n$. Mais σ induit, par définition de $v_{X_\bullet}$, une section non nulle dans $H^0(X_{i-1}, mL - a_1X_1 - ... - a_iX_i)$ pour chaque $i = 1, ..., n$, et le résultat suit.

Montrons maintenant que $\Delta^{\mathrm{nef}}_{X_\bullet}(L) \subset \Delta_{X_\bullet}(L)$. On peut bien supposer qu'il existe $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ tel que $(L - x_1X_1 - ... - x_iX_i)|_{X_{i-1}}$ soit nef pour $i = 1, ..., n$. Quitte à remplacer L par $L + \varepsilon H$ avec H ample et $\varepsilon > 0$, on se ramène donc au cas où l'ouvert

$$\bigcap_{1 \le i \le n} \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid (L - x_1X_1 - ... - x_iX_i)|_{X_{i-1}} \text{ ample}\right\}$$

est non vide ; dans ce cas,

$$\bigcap_{1 \le i \le n} \left\{x \in \mathbb{Q}^n_+ \mid (L - x_1X_1 - ... - x_iX_i)\,|_{X_{i-1}} \text{ ample}\right\}$$

est dense dans $\Delta^{\mathrm{nef}}_{X_\bullet}(L)$; il suffit donc de montrer que tout $x \in \mathbb{Q}^n_+$ tel que $L - x_1X_1 - ... - x_iX$ est ample sur X_{i-1} pour $i = 1, ..., n$ appartient à $\Delta_{X_\bullet}(L)$. Puisque $L - x_1X_1 - ... - x_nX_n$ est ample sur X_{n-1}, on peut trouver m_n grand et divisible et une section dans $H^0(X_{n-1}, m_n(L - x_1X_1 - ... - x_nX_n))$ ne s'annulant pas en p, qui induit une section

$$\sigma_n \in H^0(X_{n-1}, m_n(L - x_1X_1 - ... - x_{n-1}X_{n-1}))$$

telle que $\mathrm{ord}_{X_n}(\sigma_n) = m_nx_n$. Puisque $L - x_1X_1 - ... - x_{n-1}X_{n-1}$ est ample sur X_{n-2}, on peut maintenant choisir m_{n-1} grand et divisible tel que $\sigma_n^{m_{n-1}}$ s'étende en une section dans $H^0(X_{n-2}, m_{n-1}m_n(L - x_1X_1 - ... - x_{n-1}X_{n-1}))$, qui induit une section

$$\sigma_{n-1} \in H^0(X_{n-2}, m_{n-1}m_n(L - x_1X_1 - ... - x_{n-2}X_{n-2}))$$

telle que $\mathrm{ord}_{X_{n-1}}(\sigma_{n-1}) = m_{n-1}m_n x_{n-1}$. En continuant de la sorte, on aboutit à une section

$$\sigma_1 \in H^0(X, m_1...m_n L)$$

telle que $v_{X_\bullet}(\sigma_1) = m_1...m_n(x_1, ..., x_n)$, et on en déduit que $x = (x_1, ..., x_n)$ appartient bien à $\Delta_{X_\bullet}(L)$. □

Ce résultat nous permet maintenant de préciser la géométrie de certains corps d'Okounkov, suivant [KLM12, AKL12, Sep12].

COROLLAIRE 4.11. — *Soit $\delta \in N^1(X)$ une classe pseudoeffective, et notons $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.*

(i) *Si δ est nef, et si le drapeau $X_\bullet$ vérifie $X_i = H_1 \cap ... \cap H_i$ pour $i = 1, ..., n-1$ avec $H_1, ..., H_{n-1} \equiv \delta$ des diviseurs effectifs, alors*

$$\Delta^{\mathrm{num}}_{X_\bullet}(\delta) = \mathrm{Conv}\left\{0, e_1, ..., e_{n-1}, (\delta^n)e_n\right\}.$$

(ii) *Si chaque X_i tel que* $\dim X_i \geq 2$ *est une variété homogène, alors*

$$\Delta^{\mathrm{num}}_{X_\bullet}(\delta) = \Delta^{\mathrm{nef}}_{X_\bullet}(\delta) = \Delta^{\mathrm{psef}}_{X_\bullet}(\delta).$$

(iii) *Soit $F_\bullet$ un drapeau de sous-espaces linéaires de $\mathbb{P}(T_{X,p})$ pour un point fermé régulier $p \in X$, et notons $\pi : X' \to X$ l'éclatement de X en p, de diviseur exceptionnel $E \simeq \mathbb{P}(T_{X,p})$. Pour toute classe nef $\delta \in N^1(X)$, $\Delta^{\mathrm{num}}_{p,F_\bullet}(\delta)$ est alors coincé entre*

$$\left\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n_+ \mid \pi^*\delta - x_1 E \in \mathrm{Nef}(X'),\ x_2 + ... + x_n \leq x_1\right\}$$

et

$$\left\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n_+ \mid \pi^*\delta - x_1 E \in \overline{\mathrm{Big}(X')},\ x_2 + ... + x_n \leq x_1\right\}.$$

Démonstration. — Sous l'hypothèse de (i), on a

$$\deg\left(\delta - x_1X_1 - ... - x_nX_n\right)|_{X_{n-1}} = (\delta^n)(1 - x_1 - ... - x_{n-1}) - x_n,$$

ce qui montre que $(\delta^n)(x_1 + ... + x_{n-1}) + x_n \leq (\delta^n)$ pour tout $x \in \Delta^{\mathrm{psef}}_{X_\bullet}(\delta)$, et donc aussi $x_1 + ... + x_i \leq 1$ pour $i = 1, ..., n-1$. Mais alors

$$(\delta - x_1X_1 - ... - x_iX_i)\,|_{X_{i-1}} \equiv (1 - x_1 - ... - x_i)\delta|_{X_{i-1}}$$

est aussi nef pour $i = 1, ..., n-1$. On voit donc que $\Delta^{\mathrm{psef}}_{X_\bullet}(\delta) \subset \Delta^{\mathrm{nef}}_{X_\bullet}(\delta)$, et on conclut grâce à la proposition 4.10 que

$$\Delta^{\mathrm{num}}_{X_\bullet}(\delta) = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid (\delta^n)(x_1 + ... + x_{n-1}) + x_n \leq (\delta^n)\right\} = \mathrm{Conv}\left\{0, e_1, ..., e_{n-1}, (\delta^n)e_n\right\}.$$

(ii) Si X_i est homogène, alors tout diviseur effectif sur X_i est automatiquement nef ; ceci est aussi vrai pour la courbe X_{n-1}. L'hypothèse donne donc $\Delta^{\mathrm{psef}}_{X_\bullet}(\delta) = \Delta^{\mathrm{nef}}_{X_\bullet}(\delta)$, et on conclut par la proposition 4.10.

(iii) Notons $X'_\bullet$ le drapeau de sous-variétés de X' défini par $F_\bullet$. On a alors $\mathcal{O}_{X'_0}(-X'_1)|_{X'_1} \simeq \mathcal{O}(1)$ sur $X'_1 \simeq \mathbb{P}^{n-1}$, et $\mathcal{O}_{X_{i-1}}(X_i) \simeq \mathcal{O}(1)$ pour $i > 1$; le résultat découle maintenant de la proposition 4.10. □

Exemple 4.12 (Corps d'Okounkov simplicial [Sep12, AKL12])

Le point (i) du corollaire 4.11 montre que, pour tout fibré en droites ample L sur X, il existe un drapeau $X_\bullet$ tel que $\Delta_{X_\bullet}(L)$ soit un simplexe.

Exemple 4.13 (Corps d'Okounkov non polyhédral [KLM12], Example 3.4)

On se place sur $k = \mathbb{C}$. On va construire un fibré ample L sur une variété projective lisse X de dimension 3 et un drapeau $X_\bullet$ de sous-variétés lisses tels que $\Delta_{X_\bullet}(L)$ ne soit pas polyhédral.

Soit $C \subset \mathbb{P}^2$ une cubique lisse générale, de sorte que le nombre de Picard de la surface abélienne $C \times C$ vaille 3. Posons $X := \mathbb{P}^2 \times C$, $X_1 := C \times C$, et choisissons une courbe lisse $X_2 \subset X_1$ linéairement équivalente à

$$F_1 + F_2 + \operatorname{diag}(C \times C),$$

avec F_1, F_2 les fibres des deux projections $C \times C \to C$. Le cône nef de X est de dimension 2, donc polyhédral ; celui de X_1 coïncide avec une des composantes du cône de lumière de la forme d'intersection, donc est un cône quadratique (non polyhédral).

En prenant par exemple $L := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2}(3, 1)|_X$, on vérifie alors facilement que $\Delta^{\mathrm{nef}}_{X_\bullet}(L)$ n'est pas polyhédral.

Comme X et X_1 sont homogènes, le point (ii) du corollaire 4.11 donne par ailleurs $\Delta^{\mathrm{num}}_{X_\bullet}(L) = \Delta^{\mathrm{nef}}_{X_\bullet}(L)$, et on a donc l'exemple souhaité.

Exemple 4.14. — On considère, comme dans l'exemple 4.5, l'exemple de Serre $C \subset X$. Pour tout $p \in X \setminus C$ et tout drapeau $F_\bullet = \{q \in \mathbb{P}(T_{X,p})\}$, on va montrer que $\Delta^{\mathrm{num}}_{p,F_\bullet}(C) = \{0\}$, de sorte que

$$\dim \Delta^{\mathrm{num}}_{p,F_\bullet}(C) < \nu(C) = 1.$$

D'après le point (iii) du corollaire 4.11, si l'on note $\pi : X' \to X$ l'éclatement de X en $p \in X \setminus C$, de diviseur exceptionnel E, il suffit de vérifier que $\pi^*C - x_1 E$ n'est pseudoeffectif sur X' pour aucun $x_1 > 0$.

On va montrer ceci via un argument analytique, en s'appuyant sur [DPS94, Example 1.7]. Rappelons pour ce faire que si Y est une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$, une classe $\delta \in N^1(Y) \hookrightarrow H^{1,1}(Y, \mathbb{C})$ est pseudoeffective ssi elle peut être représentée par un courant positif fermé. La propriété clé démontrée dans *loc. cit.* est que le courant d'intégration $[C]$ est le seul courant positif fermé cohomologue à C.

S'il existe $x_1 > 0$ tel que $\pi^*C - x_1 E$ est pseudoeffectif, on peut trouver un courant positif fermé T sur X' tel que $T + x_1[E]$ représente la classe de cohomologie de π^*C. Il est alors standard de voir que $T + x_1[E] = \pi^*S$ avec $S := \pi_*(T + x_1[E])$. Mais S est cohomologue à C, donc $S = [C]$ d'après la propriété clé. On obtient ainsi $[\pi^*C] = \pi^*[C] = T + x_1[E]$, d'où $\pi^*C \geq x_1 E$, ce qui contredit $p \notin C$.

Proposition 4.15. — *Soit $X_\bullet$ un drapeau* ample*, au sens où X_{i+1} est un diviseur ample de X_i pour $i = 0, ..., n-1$. Pour toute classe nef $\delta \in N^1(X)$, on a alors*

$$\dim \Delta^{\mathrm{num}}_{X_\bullet}(\delta) = \nu(\delta).$$

En utilisant les résultats de [Leh11], on peut sans doute étendre ce résultat à une classe pseudoeffective quelconque.

LEMME 4.16 ([LM09], Proposition 4.16). — *Soit $X_\bullet$ un drapeau de sous-variétés de X, et posons $Y := X_1$, avec le drapeau induit $Y_\bullet$ défini par $Y_i := X_{i+1}$. Pour toute classe nef $\delta \in N^1(X)$, on a*

$$\Delta^{\mathrm{num}}_{X_\bullet}(\delta) \cap \big(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}\big) = \Delta^{\mathrm{num}}_{Y_\bullet}(\delta|_Y).$$

Démonstration. — Par la proposition 4.4, on se ramène au cas où δ est la classe d'un fibré en droites ample L sur X. La flèche de restriction $H^0(X, mL) \to H^0(Y, mL)$ est alors surjective pour tout $m \gg 1$, et il est immédiat d'en déduire que

$$S_{X_\bullet}(L)_m \cap \big(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}\big) = S_{Y_\bullet}(L|_Y)_m$$

pour tout $m \gg 1$. On peut alors montrer sans trop de peine que

$$\Delta_{X_\bullet}(L) \cap \big(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}\big) = \Delta_{Y_\bullet}(L|_Y),$$

voir [LM09, Proposition A.1]. □

Démonstration de la proposition 4.15. — Le drapeau $Y_\bullet$ induit sur $Y := X_1$ est aussi ample. On peut supposer que $\nu(\delta) < n$. Puisque $Y \subset X$ est un diviseur ample, on voit alors que $\nu(\delta|_Y) = \nu(\delta)$. Par récurrence sur la dimension, on a donc

$$\dim \Delta^{\mathrm{num}}_{Y_\bullet}(\delta|_Y) = \nu(\delta|_Y) = \nu(\delta),$$

d'où $\dim \Delta^{\mathrm{num}}_{X_\bullet}(\delta) \geq \nu(\delta)$ par le lemme 4.16, et on conclut grâce au lemme 4.8. □

RÉFÉRENCES

[And11] D. ANDERSON – *Okounkov bodies and toric degenerations.* Prépublication (2011) arXiv :1001.4566.

[AKL12] D. ANDERSON, A. KÜRONYA, V. LOZOVANU – *Okounkov bodies of finitely generated divisors.* Prépublication (2012) arXiv :1206.2499.

[BC11] S. BOUCKSOM, H. CHEN – *Okounkov bodies of filtered linear series.* Compositio Math. **147** (2011), 1205–1229.

[BDPP04] S. BOUCKSOM, J.-P. DEMAILLY, M. PĂUN, T. PETERNELL – *The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension.* Prépublication (2004) arXiv :math/0405285. À paraître dans J. Algebraic Geom.

[BFJ09] S. BOUCKSOM, C. FAVRE, M. JONSSON – *Differentiability of volumes of divisors and a problem of Teissier.* J. Algebraic Geom. **18** (2009), 279–308.

[BG09] W. BRUNS, J. GUBELADZE – *Polytopes, rings, and K-theory.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, Dordrecht, 2009.

[dBP12] L. DI BIAGIO, G. PACIENZA – *Restricted volumes of effective divisors.* Prépublication (2012) arXiv :1207.1204.

[CS12a] S.D. CUTKOSKY – *Multiplicities Associated to Graded Families of Ideals.* Prépublication (2012) arXiv :1206.4077.

[CS12b] S.D. CUTKOSKY – *The asymptotic growth of graded linear series on arbitrary projective schemes* . Prépublication (2012) arXiv :1212.6186.

[CS93] S.D. CUTKOSKY, V. SRINIVAS – *On a problem of Zariski on dimensions of linear systems.* Ann. Math. **137** (1993), 531–559.

[DPS94] J.-P. DEMAILLY, T. PETERNELL, M. SCHNEIDER – *Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles.* J. Algebraic Geom. **3** (1994), 295–345.

[ELS03] L. EIN, R. LAZARSFELD, K. SMITH – *Uniform approximation of Abhyankar valuation ideals in smooth function fields.* Amer. J. Math. **125** (2003), 409–440.

[Eis] D. EISENBUD – *Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry.* Graduate Texts in Math. **150.** Springer-Verlag, New York, 1995.

[Fuj83] T. FUJITA – *Semipositive line bundles.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **30** (1983), 353–378.

[HK12] M. HARADA, K. KAVEH – *Integrable systems, toric degenerations and Okounkov bodies.* Prépublication (2012) arXiv :1205.5249v1.

[Har77] R. HARTSHORNE – *Algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics **52**. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[Iit71] S. IITAKA – *On D-dimensions of algebraic varieties.* J. Math. Soc. Japan **23** (1971), 356–373.

[Jow12] S.Y. JOW – *Okounkov bodies and restricted volumes along very general curves.* Adv. Math. **223** (2010), 1356–1371.

[KK09] K. KAVEH, A. KHOVANSKII – *Newton-Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory.* Prépublication (2012) arXiv :0904.3350v3. À paraître dans Ann. Math.

[KK12] K. KAVEH, A. KHOVANSKII – *Convex bodies associated to actions of reductive groups.* Prépublication (2012) arXiv :1001.4830v2.

[KLM12] A. KÜRONYA, V. LOZOVANU, C. MACLEAN – *Convex bodies appearing as Okounkov bodies of divisors.* Adv. Math. **229** (2012), 2622–2639.

[Laz04] R. LAZARSFELD – *Positivity in algebraic geometry. I.* Ergebnisse Math. Grenzg. **48**, Springer, 2004.

[LM09] R. LAZARSFELD, M. MUSTAŢĂ – *Convex bodies associated to linear series.* Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **42** (2009), 783–835.

[Leh11] B. LEHMANN – *Comparing numerical dimensions.* Prépublication (2011) arXiv :1103.0440v4. À paraître dans J. of Alg. and Num. Theory.

[Nak04] N. NAKAYAMA – *Zariski-decomposition and abundance.* MSJ Memoirs **14**, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004.

[Oda88] T. ODA – *Convex bodies and algebraic geometry—toric varieties and applications. I.* Algebraic Geometry Seminar (Singapore, 1987), 89–94, World Sci. Publishing, Singapore, 1988.

[Ok96] A. OKOUNKOV – *Brunn-Minkowski inequality for multiplicities.* Invent. math. **125** (1996), 405–411.

[Ok00] A. OKOUNKOV – *Why would multiplicities be log-concave ? in* The orbit method in geometry and physics (Marseille, 2000), 329–347. Progr. Math. **213**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.

[Sep12] H. SEPPÄNEN – *Okounkov bodies for ample line bundles.* Prépublication (2012) arXiv :1007.1915v3.

[Sze11] G. SZEKELYHIDI – *Filtrations and test configurations.* Prépublication (2011) arXiv :1111.4986v1.

[Tei03] B. TEISSIER – *Valuations, deformations, and toric geometry.* Proceedings of the Saskatoon Conference and Workshop on valuation theory (second volume), F-V. Kuhlmann, S. Kuhlmann, M. Marshall editors, Fields Institute Communications **33**, 2003, 361–459.

[Vaq06] M. VAQUIÉ – *Valuations and local uniformization*, *in* Singularity theory and its applications, 477–527. Adv. Stud. Pure Math. **43**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006.

[WN09] D. WITT-NYSTRÖM – *Transforming metrics on a line bundle to the Okounkov body.* Prépublication (2009) arXiv :0903.5167.

[WN10] D. WITT-NYSTRÖM – *Test configurations and Okounkov bodies.* Prépublication (2010) arXiv :1001.3286v1.

[Yua09] X. YUAN – *On volumes of arithmetic line bundles.* Compositio Math. **145** (2009), 1447–1464.

[ZS60] O. ZARISKI, P. SAMUEL – *Commutative Algebra, Vol. II.* Springer-Verlag (1960).

[Zar62] O. ZARISKI – *The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface.* Ann. Math. **76** (1962), 560–616.

Sébastien BOUCKSOM

CNRS-Université Pierre et Marie Curie
Institut de Mathématiques de Jussieu
F-75251 Paris Cedex 05
France
E-mail : `boucksom@math.jussieu.fr`