Séminaire BOURBAKI Octobre 2012
65ème année, 2012-2013, n$^{\text{o}}$ 1061

TECHNIQUES DE CONSTRUCTION DE DIFFÉRENTIELLES HOLOMORPHES ET HYPERBOLICITÉ

[d'après J.-P. Demailly, S. Diverio, J. Merker, E. Rousseau, Y.-T. Siu...]

par **Mihai PĂUN**

INTRODUCTION

Nous pouvons munir toute variété complexe compacte X d'une structure métrique en utilisant une partition de l'unité : sur chaque ouvert de coordonnées on dispose d'une métrique (provenant de l'espace euclidien selon lequel notre variété est modelée), qu'on globalise à l'aide d'une fonction tronquante. La somme de ces objets sera notre métrique. Malheureusement, cette construction est beaucoup trop *arbitraire* ; en général, on peut difficilement l'utiliser afin de mettre en évidence des propriétés remarquables de X.

Dans [Kob70], [Kob76], S. Kobayashi a introduit une pseudo-métrique intrinsèque, complètement déterminée par la structure complexe de X ; voici sa version infinitésimale.

Soit $x \in X$ un point, et soit $v \in T_{X,x}$ un vecteur tangent à X en x. La longueur de v par rapport à la *pseudo-métrique de Kobayashi-Royden* est donnée par

$$\mathbf{k}_{X,x}(v) := \inf\{\lambda > 0; \exists f : \Delta \to X, f(0) = x, \lambda f'(0) = v\},$$

où $\Delta \subset \mathbf{C}$ est le disque unité, et f est une application holomorphe.

Bien entendu, il se peut très bien que $\mathbf{k}_{X,x}(v) = 0$; toutefois, grâce au lemme de reparamétrisation de Brody (cf. [Bro78]), cette situation a une contrepartie géométrique bien comprise. S'il existe un point $x \in X$ et un vecteur non nul $v \in T_{X,x}$ tels que $\mathbf{k}_{X,x}(v) = 0$, alors il existe une application holomorphe non constante $\varphi : \mathbf{C} \to X$. Une telle fonction sera appelée *courbe entière*. Nous remarquons en passant que le point x ne se trouve pas nécessairement dans l'image de φ, voir l'exemple trouvé par J. Winkelmann, dans [Winkel].

Si la variété X ne possède pas de courbes entières non constantes, alors la pseudo-métrique infinitésimale de Kobayashi sera non dégénérée ; nous disons dans ce cas que X est *hyperbolique au sens de Brody*, ou tout simplement *hyperbolique* (car toutes les variétés dans cet exposé seront compactes).

En dimension 1, le théorème d'uniformisation montre que seules les courbes de genre supérieur ou égal à 2 sont hyperboliques. La situation devient beaucoup plus compliquée dès la dimension 2 ; toutefois, on espère que la non dégénérescence de la métrique de Kobayashi est intimement liée aux propriétés de positivité du fibré canonique de X.

Nous allons rappeler maintenant quelques notions qui vont intervenir par la suite. Un fibré en droites $L \to X$ est dit *ample* s'il existe un entier $m \geq 1$ tel que l'application naturelle vers l'espace projectif induite par les sections globales de $L^{\otimes m}$ est un plongement. La version birationnelle de cette notion est celle de fibré *gros* (ou *big*) : L est gros s'il existe un entier $m \geq 1$ tel que le degré de transcendance du corps des fonctions rationnelles sur X induites par les sections holomorphes de $L^{\otimes m}$ est maximal (i.e. égal à la dimension de X).

On se propose de présenter dans cet exposé quelques résultats récents en rapport avec l'hyperbolicité des variétés n-dimensionnelles X dont le fibré canonique K_X est ample. Ces résultats donnent des réponses partielles à la conjecture classique suivante, cf. [Kob70].

Conjecture 0.1 (Kobayashi). — *Une hypersurface générique X de l'espace projectif $\mathbf{P}^{n+1}$ de degré d supérieur à $2n+1$ est hyperbolique.*

Dans l'énoncé précédent, le terme *générique* a la signification suivante. Considérons la variété $\mathcal{X} \subset \mathbf{P}^{n+1} \times \mathbf{P}^{N_d}$ paramétrant les hypersurfaces de degré d dans $\mathbf{P}^{n+1}$. Alors il existe une réunion dénombrable $\mathcal{Y}$ de variétés algébriques de $\mathcal{X}$ telle que, si X correspond à un point dans $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$, alors elle est hyperbolique.

Une autre conjecture standard dans le domaine est celle formulée par Green-Griffiths dans [GG80] ; nous allons la rappeler maintenant.

Conjecture 0.2 (Green-Griffiths). — *Soit X une variété projective ; on suppose que son fibré canonique est gros. Alors il existe une sous-variété propre $Y \subsetneq X$ de X telle que l'image de toute courbe entière $\varphi : \mathbf{C} \to X$ se trouve dans Y.*

Si l'image d'une courbe entière $\varphi : \mathbf{C} \to X$ est contenue dans une sous-variété propre de X, on dit que φ est *algébriquement dégénérée*. On remarque que, dans ce cadre général, un énoncé de type Green-Griffiths est le meilleur qu'on puisse espérer obtenir, même si K_X est ample. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la surface de Fermat

$$X := \left(Z_0^d + \dots + Z_3^d = 0\right) \subset \mathbf{P}^3.$$

Si d est assez grand, le fibré canonique de cette variété est ample. Elle contient des courbes rationnelles, donc des courbes entières non constantes. La métrique de Kobayashi de X est donc partiellement dégénérée ; néanmoins, la conjecture 0.2 pour les hypersurfaces de Fermat est vérifiée dans [Gr75], [Dem95].

Afin de mettre en perspective les résultats des articles [DMR10], [Dem11] et [Siu12] qui constituent la colonne vertébrale de notre exposé, il convient de présenter en quelques mots une stratégie générale pour traiter les conjectures 0.1 et 0.2 qui remonte aux articles fondateurs de A. Bloch [Blo26a], [Blo26b] (voir également [Siu04] pour un compte rendu moderne de [Blo26a]).

Le premier pas dans la stratégie que A. Bloch a inventée pour étudier l'hyperbolicité des sous-variétés de tores consiste à utiliser l'amplitude de K_X pour construire des opérateurs différentiels d'ordre supérieur. Cette notion sera présentée de façon formelle plus loin ; en voici ici un bref aperçu.

Pour chaque entier $k \geq 1$, considérons l'espace des k-jets $J_k(X)$ dont les éléments sont des disques holomorphes $f : (\mathbf{C}, 0) \to X$ modulo la relation d'equivalence suivante : $f \sim g$ si et seulement si leurs dérivées en zéro jusqu'à l'ordre k coïncident. Nous appelons *différentielle holomorphe* d'ordre k et de degré m (ou simplement différentielle holomorphe, lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion) toute fonction holomorphe sur l'espace des k-jets $J_k(X)$ qui est polynomiale homogène de degré pondéré m par restriction aux fibres de la projection $J_k(X) \to X$.

Par exemple, si $k = 1$, les différentielles de degré m correspondent aux sections du fibré $S^m T^\star_X$. Signalons aussi que dans l'analyse de l'hyperbolicité d'une variété X il est indispensable de considérer des différentielles d'ordre $k \geq 2$. Leur existence et l'analyse de leurs propriétés se trouvent au cœur de notre exposé, principalement à cause du théorème d'annulation suivant : *si P est un opérateur différentiel d'ordre k et de degré m à valeurs dans le dual d'un fibré ample sur X, alors $P\big(\varphi', ..., \varphi^{(k)}\big) \equiv 0$ pour toute courbe entière $\varphi : \mathbf{C} \to X$.*

L'étape suivante dans la stratégie de Bloch serait de montrer qu'on peut construire beaucoup de k-différentielles holomorphes *algébriquement indépendantes*. Très vaguement, ceci veut dire qu'on peut « éliminer » successivement les dérivées $\varphi', ..., \varphi^{(k)}$ dans le système d'équations $P_j\big(\varphi', ..., \varphi^{(k)}\big) \equiv 0$ induit par les différentielles holomorphes, et obtenir ainsi une équation algébrique pour la courbe φ (plutôt que pour son jet d'ordre k).

Il nous semble que le degré de difficulté présent dans les deux étapes de cette stratégie est réparti de façon inégale : le deuxième pas est beaucoup plus délicat que le premier.

Dans les travaux qui font l'objet de cet exposé, ces idées ont été implémentées avec succès pour les hypersurfaces X de l'espace projectif. Un premier résultat qui sera discuté ici est le suivant.

Théorème 0.3 ([Div09], [DMR10], [Dem12], [Siu12]). — *Soit n un entier positif. Il existe un nombre entier explicite d^1_n avec la propriété suivante : toute hypersurface générique $X \subset \mathbf{P}^{n+1}$ de degré $d \geq d^1_n$ admet une n-différentielle holomorphe (non identiquement nulle) à valeurs dans le dual d'un fibré ample sur X.*

Voici quelques commentaires sur les diverses approches pour montrer ce théorème.

Dans les articles [Siu02], [Siu04] et [Siu12], Y.-T. Siu s'inspire de la construction explicite des formes différentielles pour les courbes planes de degré assez élevé. Il calcule l'ordre des pôles des n-différentielles *méromorphes* qu'on peut facilement construire sur l'espace projectif, puis il montre que la restriction à X de certaines différentielles ainsi obtenues sera *holomorphe*, pourvu que le polynôme définissant X soit générique et que son degré soit assez grand.

Dans l'article [DMR10], le théorème 0.3 est obtenu comme conséquence des inégalités de Morse holomorphes. Cette technique a été introduite par J.-P. Demailly dans [Dem85], et elle s'est montrée extrêmement utile dans beaucoup de situations : cela fait l'effet d'un *best seller* perpétuel... Son utilisation systématique dans le contexte actuel a été initiée par S. Diverio dans sa thèse de doctorat (cf. [Div08], [Div09]). En quelques mots, via la forme algébrique des inégalités de Morse, l'existence des n-différentielles est équivalente à la positivité d'un certain produit d'intersection. S. Diverio, J. Merker et E. Rousseau montrent dans [DMR10] que le produit d'intersection à calculer est un polynôme de degré $n+1$ en d, dont le coefficient dominant est un entier strictement positif. En estimant les autres coefficients, ils trouvent une borne effective pour d à partir de laquelle le polynôme en question sera strictement positif. Une partie de ce travail utilise des résultats obtenus antérieurement dans [Merk09], [Rou07a], [Div09]. Signalons également que J. Merker montre dans l'article [Merk10] que pour $k \gg 0$ on peut construire des k-différentielles holomorphes non nulles sur toute hypersurface X de $\mathbf{P}^{n+1}$, dès que K_X est ample. Les calculs effectifs qu'il déploie dans ce but sont impressionnants.

Très récemment dans [Dem11], J.-P. Demailly établit l'existence des différentielles holomorphes non nulles pour toute variété de type général ; en particulier, son résultat généralise amplement les travaux [GG80], [Merk10], [Rou06a] [Rou06b], [Rou07a], [Rou07b] [Siu02], [DMR10].

Théorème 0.4 ([Dem11]). — *Soit X une variété n-dimensionnelle de type général ; alors pour tous $\varepsilon > 0$, $k \geq k_0(\varepsilon)$ et $m \geq m_0(k, \varepsilon)$ il existe une k-différentielle d'ordre m sur X à valeurs dans $K_X^{-(\delta_k - \varepsilon)m}$, où on note $\delta_k := \dfrac{1 + 1/2 + ... + 1/k}{nk}$.*

Comme conséquence de ce travail, il obtient une preuve du théorème 0.3 dans des conditions numériques nettement meilleures que celles de [DMR10], [Siu12] ... Sa méthode utilise la version analytique des inégalités de Morse holomorphes, en exploitant de plus la nature « probabiliste » des k-jets, les dérivées successives étant vues comme des variables aléatoires indépendantes.

Avant d'aller plus loin dans cette thématique, signalons l'article de Y. Brunebarbe, B. Klingler et B. Totaro dans [BKT12]. C'est un travail très élégant, dans lequel l'existence des formes différentielles symétriques sur une variété kählérienne compacte X est établie en faisant une hypothèse sur le groupe fondamental de X. Dans cet article, la positivité nécessaire pour produire des différentielles symétriques est extraite de la variation des structures de Hodge. Nous ne pouvons pas présenter ici leur travail, mais les techniques qu'ils produisent dans le domaine semblent très prometteuses.

Il se trouve que dans le cas des hypersurfaces de $\mathbf{P}^{n+1}$ on peut analyser les points base des n-différentielles holomorphes d'une façon très précise.

Théorème 0.5 ([Siu02], [DMR10], [Dem12]). — *Soit $X \subset \mathbf{P}^{n+1}$ une hypersurface générique de degré $d \geq d_n$. Alors il existe une sous-variété $Y \subsetneq X$ telle que pour tout n-jet $\gamma : \Delta \to X$ de disque holomorphe tracé sur X il existe une n-différentielle holomorphe $\mathcal{P}$ à valeurs dans le dual d'un fibré ample telle que*

$$\mathcal{P}\big(\gamma'(0), ..., \gamma^{(n)}(0)\big) \neq 0$$

dès que $\gamma(0) \in X \setminus Y$.

Les grandes lignes de la preuve du théorème 0.5 ont été expliquées dans [Siu02], et traitées en détail dans [DMR10], [Siu12] ; l'observation importante repose sur des travaux antérieurs de C. Voisin, H. Clemens et L. Ein, cf. [Vois98], [Cle86], [Ein88], [Ein91].

Considérons la variété $\mathcal{X} \subset \mathbf{P}^{n+1} \times \mathbf{P}^{N_d}$ qui paramètre les hypersurfaces de degré d dans $\mathbf{P}^{n+1}$. En coordonnées homogènes, $\mathcal{X}$ est l'hypersurface donnée par l'équation suivante de bi-degré $(d, 1)$

$$\sum_\alpha a_\alpha Z^\alpha = 0.$$

Compte tenu du fait que le degré de $\mathcal{X}$ par rapport aux variables (a_α) vaut 1, on montre dans [Vois98] que le fibré $T_\mathcal{X} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n+1}}(1)$ est engendré par ses sections globales.

Afin de l'adapter pour l'étude des points base des différentielles holomorphes, ce résultat a été généralisé comme suit dans [Siu02], [Merk09]. Considérons la projection sur le second facteur

$$\pi : \mathcal{X} \to \mathbf{P}^{N_d};$$

pour chaque $k \geq 1$ on note $J_k^{\text{vert}}(\mathcal{X})$ l'espace des k-jets relatifs de $\mathcal{X}$ par rapport à π. Des calculs explicites (op. cit.) montrent que le fibré

$$T_{J_n^{\text{vert}}(\mathcal{X})} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n+1}}(n^2 + 2n) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{N_d}}(2) \tag{1}$$

est engendré par ses sections globales.

Soit $s_0 \in \mathbf{P}^{N_d}$; on note X_{s_0} l'hypersurface correspondante. Comme on l'a déjà evoqué, les n-différentielles holomorphes sur X_{s_0} peuvent être vues comme fonctions sur l'espace des n-jets de cette variété. Supposons maintenant que s_0 est suffisamment générique pour que les n-différentielles holomorphes sur X_{s_0} se prolongent au voisinage U de s_0 dans $\mathbf{P}^{N_d}$. Cela veut dire que la fonction définie sur la fibre $X_{s_0} = \pi^{-1}(s_0)$ admet un prolongement sur $\pi^{-1}(U)$. On produit de nouvelles n-différentielles holomorphes en dérivant cette fonction dans la direction des champs de vecteurs *obliques* sur $J_n^{\text{vert}}(\mathcal{X})$ obtenus dans (1), puis en restreignant le résultat à X_{s_0}. C'est en gros le mécanisme de la démonstration du théorème 0.5 ; les trois articles [Siu02], [DMR10], et [Dem12] en font usage.

En combinant le théorème 0.3 avec le procédé que nous venons d'expliquer, on obtient le résultat suivant.

Théorème 0.6 ([Siu02], [DMR10], [Dem12]). — *Soit n un entier positif ; il existe un entier d_n tel que toute courbe entière φ tracée sur une hypersurface générique $X \subset \mathbf{P}^{n+1}$ de degré $d \geq d_n$ est algébriquement dégénérée.*

Le nombre d_n obtenu dans ces travaux s'est trouvé progressivement amélioré. Dans [Siu02] et [Siu04], l'auteur indique le fait qu'on peut le calculer explicitement, laissant le soin de le faire aux lecteurs friands de calculs compliqués (voir toutefois les détails de son approche sur la Toile, cf. [Siu12]). Le degré d_n a été rendu effectif dans [DMR10] par S. Diverio, J. Merker et E. Rousseau ; comme on aura l'occasion de le voir un peu plus loin dans cet exposé, leur travail est un véritable tour de force, qui aboutit sur le degré $d_n = 2^{n^5}$. Cette borne a été considérablement améliorée par J.-P. Demailly dans [Dem12], suite à son travail [Dem11] ; le degré qu'il obtient est $d_n = \dfrac{n^4}{3}\big(n\log(n\log 24n)\big)^n$.

Comme on peut le constater, dans cette introduction nous avons pris la liberté de ne pas mentionner les résultats autour de la conjecture de Green-Griffiths en petites dimensions (surfaces, 3-variétés...). Pour les lecteurs intéressés, nous recommandons l'excellent exposé [Bru02], mené de main de maître par le regretté *Marco Brunella.*

Le texte qui suit est organisé en plusieurs parties. Tout d'abord nous présentons quelques résultats concernant les espaces de jets, la définition formelle des différentielles d'ordre k, les inégalités de Morse holomorphes et quelques calculs de classes de Chern. Ensuite nous discutons quelques résultats particulièrement frappants des travaux [Siu12], [DMR10], [Dem11].

1. VARIÉTÉS DIRIGÉES ET DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR

Nous allons rappeler dans ce paragraphe quelques faits concernant les différentielles d'ordre k et de degré m. Les grandes lignes de notre présentation suivent de près l'article [Dem95] (voir aussi [Gher41], [Semp54], [Mey89]).

1.1. Différentielles holomorphes

Pour commencer, considérons l'espace vectoriel

$$\mathbf{C}^{nk} = \mathbf{C}^n \times ... \times \mathbf{C}^n$$

et l'action de $\mathbf{C}^\star$ sur $\mathbf{C}^{nk} \setminus \{0\}$ donnée par

$$t \cdot (\xi_1, ..., \xi_k) = (t\xi_1, t^2\xi_2, ..., t^k\xi_k) \tag{2}$$

où les ξ_j sont des vecteurs de $\mathbf{C}^n$ pour tout $j = 1, ..., k$. On désignera le quotient de cette action par $\mathbf{P}(1^n, 2^n, ..., k^n)$; cette variété est appelée *espace projectif à poids.* Il existe un morphisme fini

$$\mathbf{P}^{kn-1} \to \mathbf{P}(1^n, 2^n, ..., k^n); \tag{3}$$

donc la variété $\mathbf{P}(1^n, 2^n, ..., k^n)$ est un quotient global de $\mathbf{P}^{kn-1}$.

Au-dessus de l'espace projectif à poids $\mathbf{P}(1^n, 2^n, ..., k^n)$ nous disposons d'un faisceau $\mathcal{L}$ dont l'image inverse par rapport à la projection (3) s'identifie avec le fibré tautologique usuel $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbf{P}^{kn-1}$. Si p est un entier divisible par le plus petit commun multiple de $(1, ..., k)$ alors $\mathcal{L}^{\otimes p}$ est inversible (voir [Dol81] pour une présentation exhaustive de ce sujet).

Via la projection $p_k : \mathbf{C}^{nk} \setminus \{0\} \to \mathbf{P}(1^n, 2^n, ..., k^n)$, une métrique h sur $\mathcal{L}$ correspond à une fonction positive $\Psi_h : \mathbf{C}^{nk} \to \mathbf{R}$ telle que

$$\Psi_h\big(t \cdot (\xi_1, ..., \xi_k)\big) = |t|^2 \Psi_h\big(\xi_1, ..., \xi_k\big).$$

La forme de courbure de $(\mathcal{L}, h)$ sera notée $\Theta_{\mathcal{L},h}$; c'est une forme de type (1,1) sur $\mathbf{P}(1^n, 2^n, ..., k^n)$ telle que

$$p_k^\star\big(\Theta_{\mathcal{L},h}\big) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\overline{\partial}\Psi_h. \tag{4}$$

En conclusion, même si $\mathcal{L}$ n'est pas un « vrai fibré », on peut définir la notion de *métrique* sur $\mathcal{L}$, respectivement de *courbure* associée au couple $(\mathcal{L}, h)$.

Nous allons considérer ensuite la version relative de cette construction. Soit X une variété complexe compacte. Pour chaque $k \geq 1$ on note $J_k(X)$ la variété des k-jets de disques holomorphes paramétrés de X, i.e. l'ensemble des classes d'équivalence des applications $f : (\mathbf{C}, 0) \to X$ modulo la relation $f \sim g$ si et seulement si $f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0)$ pour chaque $j = 0, ..., k$. Les dérivées de f et g sont calculées par rapport à un système de coordonnées, mais on voit facilement que la relation $f \sim g$ a un sens intrinsèque.

Soit f un élément de $J_k(X)$. Par rapport à un système de coordonnées défini sur un ouvert $\Omega \subset X$ centré en x les composantes de f s'écrivent

$$f = (f_1, ..., f_n) : (\mathbf{C}, 0) \to \Omega \subset \mathbf{C}^n.$$

Considérons la projection $J_k(X) \to X$, $f \mapsto x := f(0)$; on note $J_k(X)|_\Omega$ l'image inverse de l'ouvert Ω. Alors l'application

$$J_k(X)|_\Omega \to \Omega \times \mathbf{C}^{kn}, \quad f \to \big(f(0), f'(0), ..., f^{(k)}(0)\big)$$

est bien définie, et induit un système de coordonnées sur $J_k(X)|_\Omega$.

Si $k = 1$, la variété $J_1(X)$ s'identifie naturellement avec T_X, l'espace tangent de X. En général, si $k \geq 2$ l'espace $J_k(X)$ n'a pas une structure de fibré vectoriel sur X, car les fonctions de transition le définissant sont polynomiales non linéaires (de degré k).

Soit $\mathbf{G}_k$ le groupe de germes de k-jets d'automorphismes de $(\mathbf{C}, 0)$. Ce groupe agit sur la variété de jets $J_k(X)$ de façon naturelle : si $(f, \rho) \in J_k(X) \times \mathbf{G}_k$, alors on a l'application de reparamétrisation à la source

$$(f, \rho) \to f \circ \rho.$$

Plus particulièrement, l'action du sous-groupe des homothéties $\mathbf{C}^\star \subset \mathbf{G}_k$ est donnée par

$$\lambda \cdot (f', ..., f^{(k)}) = (\lambda f', ..., \lambda^k f^{(k)}).$$

Le quotient de $J_k(X) \setminus \{0\}$ par l'action de $\mathbf{C}^\star$ ainsi définie sera noté X_k^{GG}. C'est une variété singulière dès que $k \geq 2$: en fait, c'est la version relative de la construction de l'espace projectif à poids. Les singularités de X_k^{GG} sont de type quotient, elles sont bien comprises et ne vont pas nous poser de difficultés par la suite. Le faisceau tautologique sur X_k^{GG} (analogue de $\mathcal{L}$) sera noté $\mathcal{O}_{X_k^{GG}}(1)$. Si m est un entier assez divisible, alors le faisceau $\mathcal{O}_{X_k^{GG}}(m)$ est un fibré en droites. Nous notons

$$E_{k,m}^{GG} := \pi_{k\star}\mathcal{O}_{X_k^{GG}}(m)$$

son image directe ; c'est un fibré vectoriel sur X.

La notion centrale de notre exposé est la suivante.

Définition 1.1. — *On appelle différentielle holomorphe d'ordre k et de degré m sur X (ou tout simplement k-différentielle holomorphe) toute section globale du fibré $E_{k,m}^{GG}$.*

Soit $P \in H^0(X, E_{k,m}^{GG})$ une différentielle holomorphe ; par définition, sa restriction aux fibres de l'application de projection $J_k(X) \to X$ s'identifie à un polynôme homogène de degré pondéré m, i.e. on a l'égalité

$$P(\lambda f', ..., \lambda^k f^{(k)}) = \lambda^m P(f', ..., f^{(k)})$$

pour tout $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ et pour tout k-jet f. On remarque que la notion de *polynôme homogène sur les fibres de l'application de projection* a un sens intrinsèque, compte tenu du fait que les fonctions de transition de $J_k(X)$ sont polynomiales et respectent l'action de $\mathbf{C}^*$.

On peut exprimer P par rapport à un système de coordonnées $z = (z_1, ..., z_n)$ centré au point x. Considérons les symboles $\big(d^i z_j\big)$, où $i = 1, ..., k$ et $j = 1, ..., n$; alors on a

$$P = \sum_{|\alpha_1|+2|a_2|+...+k|\alpha_k|=m} a_\alpha(z) dz^{\alpha_1} ... d^k z^{\alpha_k}$$

où les $\alpha_j = (\alpha_{j1}, ..., \alpha_{jn})$ sont des multi-indices, et où on utilise la notation

$$d^p z^{\alpha_j} := \prod_{i=1}^{n} (d^p z_i)^{\alpha_{ji}}$$

ainsi que $|\alpha_j| = \sum_i \alpha_{ji}$. Si f est un k-jet de disque analytique en (X, x), alors chaque symbole $d^i z_j$ agit sur f de manière naturelle : $d^i z_j \cdot f := f_j^{(i)}(0)$, et ceci indique la façon dont P agit sur les k-jets. Pour plus de détails concernant ces notions, nous renvoyons à l'article [GG80].

1.2. Différentielles holomorphes invariantes

Nous allons nous concentrer dans ce paragraphe sur une classe plus particulière de différentielles holomorphes, notamment celles qui sont invariantes par tous les éléments du groupe $\mathbf{G}_k$, cf. [Dem95], [SY96a], [SY96b], [SY97].

DÉFINITION 1.2. — *Soit P une k-différentielle de degré m ; on dit qu'elle est invariante si*

$$P\big((f\circ\rho)', ..., (f\circ\rho)^{(k)}\big) = \rho'(0)^m P\big(f', ..., f^{(k)}\big)$$

pour tout k-jet f et pour tout élément $\rho \in \mathbf{G}_k$.

La notion suivante est importante, car elle permettra en particulier d'avoir une interprétation des différentielles holomorphes invariantes dans le langage des fibrés linéaires.

DÉFINITION 1.3. — *On appelle* variété dirigée *un couple (X, V), où X est une variété complexe compacte et $V \subset T_X$ est un sous-fibré de son fibré tangent.*

Le couple (X, V) engendre une nouvelle variété dirigée $(\widetilde{X}, \widetilde{V})$ (cf. [Semp54], [Dem95]), dont nous allons maintenant expliquer la construction : soit $\widetilde{X} := \mathbf{P}(V)$ la variété projectivisée des droites de V ; le fibré $\widetilde{V} \subset T_{X_1}$ est défini comme suit

$$\widetilde{V}_{(z,[v])} = \{\xi \in T_{X_1,z} : d\pi(\xi) \in \mathbf{C}v\}$$

où $\pi : \widetilde{X} \to X$ est la projection canonique. Au-dessus de la variété $\widetilde{X}$ on dispose d'un *fibré tautologique*

$$\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-1) \subset \pi^\star V$$

tel que $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-1)_{(z,[v])} = \mathbf{C}v$.

Soit $f : \Delta \to X$ un disque holomorphe non constant, tangent en tout point à V ; autrement dit, on a $f'(t) \in V_{f(t)}$ pour chaque t dans le domaine de définition de f. On définit le relèvement canonique de f à $\widetilde{X}$ par

$$\widetilde{f} : \Delta \to \widetilde{X}, \quad \widetilde{f}(t) = \big(f(t), [f'(t)]\big). \tag{5}$$

Dans l'expression (5), on suppose implicitement que le point t n'est pas stationnaire ; néanmoins, on voit facilement que $\widetilde{f}$ sera a posteriori bien défini sur Δ en simplifiant les zéros de $f'(t)$.

Une autre remarque importante par rapport à cette construction est que le disque $\widetilde{f}$ est tangent à $\widetilde{V}$. En effet, on a $\pi \circ \widetilde{f} = f$ et en dérivant cette égalité on obtient

$$\pi_\star \widetilde{f}'(t) = f'(t) \in V_{f(t)}.$$

Du point de vue géométrique, le fibré $\widetilde{V}$ est ainsi caractérisé : un disque holomorphe $\gamma : (\mathbf{C}, 0) \to \widetilde{X}$ est tangent à $\widetilde{V}$ si et seulement si ou bien il est contenu dans une des fibres de π, ou bien il coïncide avec le relevé $\widetilde{f}$ d'un disque holomorphe f de X tangent à V.

Du point de vue algébrique, le fibré $\widetilde{V}$ est caractérisé par les suites exactes suivantes

$$0 \to T_{\widetilde{X}/X} \to \widetilde{V} \to \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-1) \to 0 \tag{6}$$

et

$$0 \to \mathcal{O}_{\widetilde{X}} \to \pi^\star V \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(1) \to T_{\widetilde{X}/X} \to 0, \tag{7}$$

où $T_{\widetilde{X}/X}$ désigne le fibré tangent relatif associé à la fibration $\widetilde{X} \to X$. On déduit en particulier que le rang de $\widetilde{V}$ coïncide avec celui de V, et que $\dim(\widetilde{X}) = \dim(X) + \mathrm{rk}(V) - 1$.

En itérant cette construction à partir de $(X_0, V_0) := (X, T_X)$ nous obtenons une suite de variétés dirigées $(X_k, V_k)_{k \geq 0}$; nous avons donc

$$X_{k+1} := \mathbf{P}(V_k), \quad V_{k+1} := \widetilde{V}_k$$

pour chaque $k \geq 0$. La dimension de X_k est égale à $n + k(n-1)$.

On note $\mathcal{O}_{X_k}(-1) \to X_k$ le fibré tautologique induit par (X_{k-1}, V_{k-1}), et

$$u_k \in H^{1,1}(X_k, \mathbf{R}) \cap H^2(X_k, \mathbf{Z})$$

sa (première) classe de Chern. Pour chaque couple $k \geq l$ nous allons utiliser les notations $\pi_{k,l} : X_k \to X_l$ et $\pi_k : X_k \to X$ afin de désigner les projections naturelles respectives. Par la suite, il sera commode d'introduire la notation suivante : soit $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_k) \in \mathbf{Z}^k$ un k-uplet de nombres entiers. On pose

$$\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a}) := \otimes_{j=1}^k \pi_{k,j}^\star \big(\mathcal{O}_{X_j}(a_j)\big). \tag{8}$$

Pour $k \geq 2$, on définit le diviseur D_k sur la variété X_k de la façon suivante. Considérons la suite exacte (6) associée au couple (X_{k-1}, V_{k-1}) ; en particulier, on a l'injection naturelle

$$0 \to T_{X_{k-1}/X_{k-2}} \to \widetilde{V}_{k-1}.$$

On définit l'hypersurface $D_k := \mathbf{P}\big(T_{X_{k-1}/X_{k-2}}\big) \subset \mathbf{P}\big(V_{k-1}\big)$ comme projectivisé du fibré tangent relatif correspondant à la projection $\pi_{k-1,k-2}$. C'est une variété non singulière, et en utilisant la suite (6) on déduit l'égalité

$$\mathcal{O}(D_k) = \mathcal{O}_{X_k}(-1, 1)$$

(voir [Dem95]).

Dans ce contexte, on a le résultat suivant.

Théorème 1.4 ([Dem95]). — *Soit X une variété complexe compacte, et soit $J_k(X)$ l'espace de ses k-jets. On note $J_k^{\mathrm{reg}} \subset J_k(X)$ la sous-variété des jets réguliers (i.e. les classes d'équivalence des applications $f : (\mathbf{C}, 0) \to X$ telles que $f'(0) \neq 0$).*

(a) *Il existe un plongement holomorphe* $j_k : J_k^{\mathrm{reg}}(X)/\mathbf{G}_k \to X_k$*, dont l'image est l'ouvert de Zariski*

$$X_k^{\mathrm{reg}} := \bigcap_{j \le k} \pi_{k,j}^{-1}(X_j \setminus D_j).$$

Ainsi, la variété X_k *peut être vue comme compactification naturelle du quotient* $J_k^{\mathrm{reg}}(X)/\mathbf{G}_k$*.*

(b) *Pour chaque* $m \ge 1$*, le faisceau image directe*

(9)
$$(\pi_k)_\star \mathcal{O}_{X_k}(m) := E_{k,m}$$

est un fibré vectoriel sur X*, dont l'espace des sections globales s'identifie avec les différentielles holomorphes invariantes d'ordre* k *et de degré* m*.*

(c) *Plus généralement, pour chaque* $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_k) \in \mathbf{Z}_+^k$ *tel que* $a_1 + ... + a_k := m$*, l'image directe*

(10)
$$(\pi_k)_\star\big(\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a})\big) \subset \mathcal{O}(E_{k,m})$$

s'identifie au sous-fibré vectoriel dont les sections globales sont des différentielles invariantes

$$P = \sum_{\alpha \in S_{\mathbf{a}}} \xi_\alpha(z)(dz)^{\alpha_1} ... (d^k z)^{\alpha_k}$$

où on note $S_{\mathbf{a}} \subset \mathbf{Z}_+^{nk}$ *l'ensemble des* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ *défini par les relations*

$$|\alpha_1| + ... + k|\alpha_k| = m, \quad |\alpha_{p+1}| + ... + (k-p)|\alpha_k| \le a_{p+1} + ... + a_k$$

pour chaque $p = 0, ..., k-1$*.*

Nous n'allons pas reproduire ici la preuve de ce résultat ; néanmoins, voici les idées principales. Pour le premier point, on définit j_k comme suit : si $f \in J_k^{\mathrm{reg}}$ est le k-germe d'un disque holomorphe régulier, alors on considère l'application

$$f \to f_{[k]}(0) \in X_k$$

où $f_{[k]}$ désigne la k-ième relevée de f. Cette application est constante sur les orbites de $\mathbf{G}_k$ et j_k est obtenue par passage au quotient. Les points (b) et (c) sont démontrés en observant que pour toute section $u \in H^0\big(X_k, \mathcal{O}_{X_k}(m)\big)$ on obtient un opérateur d'ordre k et de degré m en posant

$$P(f', ..., f^{(k)}) := u\big(f_{[k]}(0)\big) \cdot \big(f'_{[k-1]}(0)\big)^{\otimes m};$$

il se trouve que P est une différentielle invariante. Nous invitons le lecteur à consulter l'article [Dem95] pour une preuve complète de ce théorème. □

D'après le résultat précédent, on voit que l'existence des différentielles holomorphes sur X est équivalente à l'existence des sections du fibré $\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a})$ sur X_k.

1.3. Les inégalités de Morse holomorphes

Soit $L \to Y$ un fibré holomorphe en droites sur une variété complexe compacte Y de dimension N. On se propose d'évaluer l'ordre de croissance de la dimension de l'espace des sections globales

$$h^0(Y, L^{\otimes m}) := \dim H^0\big(Y, L^{\otimes m}\big)$$

lorsque $m \to \infty$. Pour cela, on dispose de la célèbre formule de Riemann-Roch-Hirzebruch-Grothendieck, qui exprime la caractéristique d'Euler de $L^{\otimes m}$ comme suit

$$\int_Y \mathrm{ch}(L^{\otimes m}) \cdot \mathrm{Todd}(X) = \sum_{j=0}^{N} (-1)^j h^j(Y, L^{\otimes m}). \tag{11}$$

C'est un résultat évidemment fondamental ; toutefois, la présence des groupes de cohomologie supérieurs dans le membre de droite de (11) fait que son utilisation dans le but d'évaluer l'espace des sections globales de $L^{\otimes m}$ est a priori assez limitée.

Une version très raffinée de ce type de résultat permettant d'évaluer *individuellement* les groupes de cohomologie a été obtenue par J.-P. Demailly dans [Dem85].

Soit h une métrique hermitienne non singulière sur L, et soit $\Theta_{L,h}$ la forme de courbure correspondante. Pour chaque $0 \leq q \leq N$, on désigne par $Y(\Theta_{L,h}, q)$ l'ensemble des points $x \in Y$ en lesquels la forme de courbure $\Theta_{L,h}$ a précisément q valeurs propres négatives et $n - q$ valeurs propres positives. Nous remarquons ici que pour définir les valeurs propres de $\Theta_{L,h}$ on utilise une métrique de référence sur la variété Y, mais leur signe ne dépend pas de cette structure supplémentaire. Aussi, les valeurs propres nulles ne jouent aucun rôle.

Nous définissons également l'ensemble de points d'indice au plus q comme suit

$$Y(\Theta_{L,h}, \leq q) := \bigcup_{0 \leq r \leq q} Y(\Theta_{L,h}, r).$$

Le résultat suivant est un corollaire du théorème principal de [Dem85].

Théorème 1.5 ([Dem85]). — *Sous les hypothèses et notations précédentes, on a l'inégalité asymptotique*

$$h^0(Y, L^{\otimes m}) - h^1(Y, L^{\otimes m}) \geq \frac{m^N}{N!} \int_{Y(\Theta_{L,h}, \leq 1)} \Theta_{L,h}^N - o(m^n)\,;$$

en particulier, si $\displaystyle\int_{Y(\Theta_{L,h}, \leq 1)} \Theta_{L,h}^N > 0$*, alors* L *est gros.*

Les ensembles $Y(\Theta_{L,h}, \leq 1)$ sont difficiles à manipuler, et pour cette raison le résultat précédent est souvent utilisé dans sa version algébrique ([Tra95]). Par définition, un fibré L est *nef* (numériquement effectif) si sa classe de Chern $c_1(L)$ est limite de classes de $\mathbf{Q}$-fibrés amples.

Corollaire 1.6 ([Tra95]). — *Soit Y une variété projective, et soient F et G deux fibrés en droites nef sur Y, tels que $c_1(L) = c_1(F) - c_1(G)$. Si le produit d'intersection*

$$F^N - N\,F^{N-1}G \tag{12}$$

est strictement positif, alors L est gros, i.e. il existe une constante $C > 0$ telle que $h^0(Y, L^{\otimes m}) \geq Cm^N$, pour tout $m \geq 1$.

Le résultat suivant est une version ponctuelle de ce corollaire.

Corollaire 1.7 ([Dem85]). — *Soit g une forme réelle de type (1,1) sur une variété compacte Y de dimension N. Supposons qu'on puisse écrire*

$$g = \gamma_1 - \gamma_2$$

où γ_1 et γ_2 sont des formes semi-positives sur Y. Alors

$$\chi_{(g,\leq 1)} g^N \geq \gamma_1^N - N\gamma_1^{N-1}\gamma_2. \tag{13}$$

Donc s'il existe un $\mathbf{Q}$-fibré L tel que $\{g\} = c_1(L)$, et si

$$\int_Y \gamma_1^N - N\int_Y \gamma_1^{N-1}\gamma_2 > 0,$$

alors L est gros.

Dans la formule (13) ci-dessus, nous avons noté la fonction caractéristique de l'ensemble de points d'indice au plus 1 de g par $\chi_{(g,\leq 1)}$.

Nous désirons utiliser ces résultats pour montrer l'existence d'un vecteur $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_k) \in \mathbf{Z}_+^k$ tel que le fibré correspondant $\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a})$ soit gros. Le corollaire 1.6 montre qu'il suffit d'écrire ce fibré comme différence de fibrés nef, telle que le produit d'intersection (12) soit strictement positif. Nous allons analyser les propriétés numériques de $\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a})$; ce sera l'objet du paragraphe suivant.

1.4. Propriétés numériques et classes de Chern

On voit sans peine que le fibré $\mathcal{O}_{X_1}(1)$ est relativement ample (par rapport à la projection π_1), mais dès que $k \geq 2$, ceci n'est plus vrai. En effet, considérons une courbe rationnelle $C \subset X_1$ contenue dans une fibre de l'application $\pi_1 : X_1 \to X$. L'espace tangent à C est un sous-fibré de $V_1|_C$, et considérons la relevée canonique $C_1 := \mathbf{P}(T_C)$ de C dans X_2. Nous avons

$$\mathcal{O}_{X_2}(1) \cdot C_1 = T_C^\star \cdot C = -2$$

donc on en déduit que le fibré $\mathcal{O}_{X_2}(1)$ est très loin d'être relativement ample par rapport à la projection $\pi_2 : X_2 \to X$. Néanmoins, on a le résultat suivant, démontré dans [Dem95], [Div08], [DR11].

Lemme 1.8 ([Dem95], [Div08], [DR11]). — *Soit $X \subset \mathbf{P}^q$ une variété projective ; pour chaque entier $k \geq 2$ on note $\mathbf{a} := (a_1, ..., a_k) \in \mathbf{Z}_+^k$ un vecteur dont les composantes sont des entiers positifs tels que pour tout $j = 1, ..., k-2$ on ait*

$$a_j \geq 3a_{j+1} \quad a_{k-1} \geq 2a_k > 0 \ ; \tag{14}$$

on note également $|\mathbf{a}| := a_1 + ... + a_k$. Si $\mathcal{O}_X(1)$ désigne la restriction du diviseur hyperplan correspondant au plongement $X \subset \mathbf{P}^q$ à X, alors le fibré

$$\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a}) \otimes \mathcal{O}_X(2|\mathbf{a}|) \tag{15}$$

est nef.

Preuve (esquisse). Nous allons rappeler ici en quelques lignes les arguments de [Div08] ; on procède par récurrence sur k.

Rappelons d'abord que l'espace cotangent $T^\star_{\mathbf{P}^q} \otimes \mathcal{O}(2)$ est globalement engendré ; comme conséquence, on en déduit que $T^\star_X \otimes \mathcal{O}_X(2)$ a la même propriété. En particulier, le fibré

$$\mathcal{O}_{X_1}(1) \otimes \mathcal{O}_X(2)$$

est nef.

Supposons que pour un certain rang k nous ayons déterminé un fibré nef A_k sur X_{k-1}, tel que $\mathcal{O}_{X_k}(1) \otimes A_k$ soit nef. Nous voulons trouver A_{k+1} sur X_k ayant les mêmes propriétés ; pour cela, on utilise les suites exactes (6) et (7) associées à la variété dirigée (X_k, V_k) :

$$0 \to T_{X_k/X_{k-1}} \to V_k \to \mathcal{O}_{X_k}(-1) \to 0 \tag{16}$$

et respectivement

$$0 \to \mathcal{O}_{X_k} \to \pi^\star_{k,k-1} V_{k-1} \otimes \mathcal{O}_{X_k}(1) \to T_{X_k/X_{k-1}} \to 0. \tag{17}$$

En utilisant la suite (17) on montre l'existence d'un morphisme surjectif

$$\Lambda^2\big(\pi^\star_{k,k-1} V^\star_{k-1}\big) \to T^\star_{X_k/X_{k-1}} \otimes \mathcal{O}_{X_k}(2) \to 0$$

donc le fibré $T^\star_{X_k/X_{k-1}} \otimes \mathcal{O}_{X_k}(2) \otimes A_k^{\otimes 2}$ est nef. Considérons la suite duale à (16) ; on en déduit que le fibré

$$V_k^\star \otimes A_{k+1}$$

est nef, et on note $A_{k+1} := A_k^{\otimes 3} \otimes \mathcal{O}_{X_k}(2)$.

En conclusion, le fibré

$$M_k := \mathcal{O}_{X_k}(2 \cdot 3^{k-2}, ..., 2, 1) \otimes \mathcal{O}_X(2 \cdot 3^{k-1})$$

est nef – ceci est un cas particulier de l'énoncé 1.8. Le cas général s'en déduit aisément en observant que le fibré $\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a}) \otimes \mathcal{O}_X(2|\mathbf{a}|)$ peut s'exprimer en fonction de $M_1, ..., M_k$ comme combinaison linéaire à coefficients positifs, grâce aux inégalités (14). Pour une preuve complète de ce lemme, nous renvoyons à [Div08]. $\square$

Considérons maintenant $\mathbf{a} \in \mathbf{Z}^k$ un vecteur dont les composantes vérifient les relations algébriques (14). Il sera important par la suite (cf. [DMR10]) d'avoir un critère pour l'existence des sections des multiples du $\mathbf{Q}$-fibré

$$\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a}) \otimes K_X^{-\delta|\mathbf{a}|}$$

où δ est un nombre rationnel positif. Pour cela on écrit le fibré

$$\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a}) \otimes K_X^{-\delta|\mathbf{a}|} = \big(\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a}) \otimes \mathcal{O}_X(2|\mathbf{a}|)\big) \otimes \big(\mathcal{O}_X(-2|\mathbf{a}|) \otimes K_X^{-\delta|\mathbf{a}|}\big)$$

comme différence de deux fibrés nef (cf. le lemme précédent), et les inégalités de Morse holomorphes montrent que le fibré $\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a}) \otimes K_X^{-\delta|\mathbf{a}|}$ sera gros dès que le produit d'intersection

$$\big(\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a}) \otimes \mathcal{O}_X(2|\mathbf{a}|)\big)^{n_k} - n_k\big(\mathcal{O}_{X_k}(\mathbf{a}) \otimes \mathcal{O}_X(2|\mathbf{a}|)\big)^{n_k-1} \cdot \big(\mathcal{O}_X(2|\mathbf{a}|) \otimes K_X^{\delta|\mathbf{a}|}\big)$$

est strictement positif, où $n_k := n + k(n-1)$.

Pour le reste de ce texte nous allons adopter les notations et conventions suivantes. Soient $l \geq k$ deux entiers positifs. La classe de Chern du fibré $\mathcal{O}_{X_k}(1)$, ainsi que son image inverse sur X_l par l'application $\pi_{l,k} : X_l \to X_k$, sera notée u_k. La classe de Chern de la section hyperplane $\mathcal{O}_X(1)$, ainsi que ses images inverses, sera désignée par le symbole h. Le produit d'intersection précédent devient

$$\Big(\sum_{j=1}^{k} a_j u_j + 2|\mathbf{a}|h\Big)^{n_k} - n_k|\mathbf{a}|\Big(\sum_{j=1}^{k} a_j u_j + 2|\mathbf{a}|h\Big)^{n_k-1}\big(2h - \delta c_1(X)\big) \tag{18}$$

et on voit clairement que pour déterminer son signe on va devoir évaluer les nombres

$$h^p u_1^{i_1} u_2^{i_2} ... u_k^{i_k}$$

où $i_1 + ... + i_k + p = n_k$. Pour cela, nous allons employer une récurrence à de multiples reprises, et nous rappelons maintenant à cet effet les relations algébriques entre $(u_j)_{j=1,...k}$ et les classes de Chern de X. Par construction, pour chaque $k \geq 1$, on a

$$u_k^n + \sum_{s_0=1}^{n} c_{s_0}(V_{k-1}) u_k^{n-s_0} = 0. \tag{19}$$

Les suites exactes (16) et (17) permettent d'exprimer les classes de Chern de V_{k-1} en fonction de u_{k-1} et des classes de Chern de V_{k-2} (cf. [Dem95], [Div08]) : pour chaque $l = 1, ..., n$ on a

$$c_{s_0}(V_{k-1}) = \sum_{s_1=1}^{l} b(s_0, s_1) u_{k-1}^{s_0-s_1} c_{s_1}(V_{k-2}) \tag{20}$$

où on note $b(s_0, s_1) := \binom{n-s_1}{s_0-s_1} - \binom{n-s_1}{s_0-s_1-1}$. En itérant cette égalité, on obtient

$$c_{s_0}(V_{k-1}) = \sum_{s_0 \geq s_1 \geq ... \geq s_{k-1} \geq 1} b(s_0, s_1, ..., s_{k-1}) u_{k-1}^{s_0-s_1} u_{k-2}^{s_1-s_2} ... u_1^{s_{k-2}-s_{k-1}} c_{s_{k-1}}(X) \tag{21}$$

avec $b(s_0, s_1, ..., s_{k-1}) := b(s_0, s_1)b(s_1, s_2)...b(s_{k-2}, s_{k-1})$. Un calcul immédiat montre que

$$b(s_0, s_1, ..., s_{k-1}) = \varepsilon(s)(n - s_0 + 1)^{s_0 - s_{k-1}} \prod_{j=0}^{k-2} \frac{1}{(s_j - s_{j+1})!} \tag{22}$$

où $\varepsilon(s)$ est un nombre rationnel, dont la valeur absolue est inférieure à 1. On peut donc écrire l'égalité (20) sous la forme

$$c_{s_0}(V_{k-1}) = \sum_{p+|i|=s_0} \varepsilon(i) \frac{(n - s_0 + 1)^{s_0 - p}}{i!} u^i c_p(X), \tag{23}$$

où $i := (i_1, ..., i_{k-1})$, $u^i := \prod_{q=1}^{k-1} u_q^{i_q}$ et $|i| := i_1 + ... + i_{k-1}$. Par substitution dans (19), on obtient

$$u_k^n + \sum_{p+|i|+i_k=n} \varepsilon(i) \frac{(i_k + 1)^{n - i_k - p}}{i!} u^i u_k^{i_k} c_p(X) = 0\ ; \tag{24}$$

dans la somme précédente, on a $i := (i_1, ..., i_{k-1})$ et $i_k < n$.

2. DIFFÉRENTIELLES HOLOMORPHES SUR LES HYPERSURFACES DE L'ESPACE PROJECTIF, I

Nous allons présenter dans la suite la construction des différentielles holomorphes *dans l'ordre chronologique*, selon [Siu02], [Siu12], [DMR10] et [Dem11], respectivement.

Dans l'article [Siu12] publié très récemment sur la Toile, Y.-T. Siu apporte des précisions au sujet de son ancien projet dans [Siu02], [Siu04]. Compte tenu de la taille impressionnante du manuscrit, il nous est difficile de présenter ici toutes les subtilités des arguments invoqués dans la preuve. Cependant, dans ce chapitre nous allons essayer de tracer le fil rouge des idées contenues dans l'article [Siu12], lesquelles impliqueraient *in fine* une preuve de la conjecture de S. Kobayashi pour les hypersurfaces génériques de grand degré de $\mathbf{P}^{n+1}$.

Soit $X = (P = 0)$ une hypersurface de degré d dans l'espace projectif. Nous fixons des coordonnées homogènes $z_0, ..., z_{n+1}$ sur $\mathbf{P}^{n+1}$, et pour chaque $j = 1, ..., n+1$ soient $x_j = \dfrac{z_j}{z_0}$ les coordonnées affines associées. Étant donné un couple d'entiers positifs (m_0, m) tel que

$$m_0 + 2m < d, \tag{25}$$

considérons l'espace vectoriel $\mathcal{V}(m_0, m)$ des polynômes

$$\mathcal{P} = \sum_{|\alpha_1|+...+n|\alpha_n|=m} p_\alpha(z) dz_1^{\alpha_1} ... dz_n^{\alpha_n}$$

où pour chaque indice α le coefficient p_α est un polynôme de degré inférieur ou égal à m_0. La dimension de cet espace est minorée par

$$\binom{m_0+n+1}{m_0}\binom{\lfloor\frac{m}{n}\rfloor+n(n+1)-1}{n(n+1)-1},$$

comme on le voit immédiatement par des calculs élémentaires.

Il se trouve que $\mathcal{P}$ définit une différentielle méromorphe d'ordre n sur $\mathbf{P}^{n+1}$; en utilisant les changements de coordonnées usuels de l'espace projectif, on déduit dans [Siu12] que l'ordre des pôles de la restriction $\mathcal{P}|_X$ n'excède pas m_0+2m.

Ensuite, Y.-T. Siu montre (cf. proposition 3.8, page 58, op. cit.) que l'espace vectoriel $\mathcal{V}(m_0,m)$ contient un élément $\mathcal{P}$ qui s'annule identiquement sur la sous-variété S de X décrite en coordonnées affines par l'équation

$$P_{x_1}=1 \tag{26}$$

(on note ici P_{x_1} la dérivée partielle de P par rapport à la variable x_1). Si P est assez général, alors S sera non singulière, et on en déduit que le quotient

$$\left(P_{x_1}-1\right)^{-1}\mathcal{P}$$

est une différentielle *holomorphe* sur X, à valeurs dans $\mathcal{O}(m_0+2m-d)$.

La condition d'annulation de $\mathcal{P}$ le long de S se traduit par un système d'équations linéaires homogènes (où les inconnues sont les coefficients des p_α). Afin de montrer que le système en question admet une solution non triviale, on tient compte du fait que les 1-formes $dx_1,...,dx_n$ ne sont pas indépendantes par restriction à X, car

$$\sum_{i=1}^{n}P_{x_i}(x)dx_i=0. \tag{27}$$

Par la relation (27) et celles obtenues en la dérivant on peut donc éliminer $dx_1,...,d^nx_1$ dans l'expression de $\mathcal{P}$ (quitte à multiplier $\mathcal{P}$ avec une puissance adéquate de P_{x_1}). Suite à cette opération, le nombre d'équations de notre système diminue considérablement, ce qui est crucial.

Ces arguments entraînent le résultat suivant.

Proposition 2.1 ([Siu02]). — *Considérons les paramètres réels $\varepsilon,\varepsilon',\theta_0,\theta',\theta$ tels que*

$$n\theta_0+\theta>n+\varepsilon,\quad \theta'<1-\varepsilon'. \tag{28}$$

Alors il existe $m_0\le d^{\theta_0}$ et $m\le d^{\theta}$, ainsi qu'un entier positif explicitement calculable $d(n,\varepsilon,\varepsilon')$, tel que pour toute hypersurface $X\subset\mathbf{P}^{n+1}$ de degré $d\ge d(n,\varepsilon,\varepsilon')$ il existe une différentielle holomorphe $\mathcal{P}\in\mathcal{V}(m_0,m)$ non identiquement nulle, à valeurs dans le fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n+1}}(-d^{\theta'})$.

Nous remarquons que les inégalités (28) sont nécessaires dans la preuve du résultat précédent, ceci afin de montrer que le nombre d'équations du système d'équations linéaires homogène mentionné auparavant est inférieur au nombre des inconnues. Aussi, il se trouve que sous la condition

$$m_0 + 2m < d,$$

la restriction à X de tout élément de $\mathcal{V}(m_0, m)$ non identiquement nul sera non triviale, cf. Lemma 3.4, page 51. La quantité $d(n, \varepsilon, \varepsilon')$ peut être donnée explicitement, voir page 61 dans [Siu12].

Les origines de la construction des différentielles holomorphes telle qu'elle est envisagée dans [Siu02] se trouvent dans la construction classique des 1-formes holomorphes sur les courbes planes. Soit $C := (P = 0) \subset \mathbf{P}^2$ une courbe non singulière. Alors on définit la forme λ (en coordonnées affines)

$$\frac{dx}{P_y} = -\frac{dy}{P_x};$$

elle sera holomorphe dès que le degré de P sera assez élevé.

En conclusion, grâce à la proposition 2.1, on contrôle parfaitement les degrés de p_α, i.e. $m_0 \leq d^{\theta_0}$. Ceci marque une différence de taille par rapport aux énoncés analogues dans [DMR10]..., obtenus « abstraitement », e.g. par les inégalités de Morse holomorphes, et c'est une information particulièrement précieuse (cf. les commentaires dans l'introduction de [Siu12], et dans le dernier paragraphe de ce texte). En contrepartie, le degré $d(n, \varepsilon, \varepsilon')$ est *beaucoup* plus grand que celui obtenu dans [DMR10] (encore plus grand que celui de [Dem12]).

3. DIFFÉRENTIELLES HOLOMORPHES SUR LES HYPERSURFACES DE L'ESPACE PROJECTIF, II

Soit X une hypersurface non singulière de degré d de l'espace projectif $\mathbf{P}^{n+1}$. Nous allons suivre dans ce paragraphe l'approche de S. Diverio, J. Merker et E. Rousseau dans [DMR10] pour montrer l'existence des différentielles holomorphes d'ordre n et de degré m à valeurs dans $K_X^{-\delta_n m}$ sur X, sous l'hypothèse $d \geq d_n^1$. Ici d_n^1 et δ_n désignent des nombres rationnels positifs explicitement calculables en fonction de $n = \dim(X)$. Signalons également l'article très intéressant [BeKi10] qui traite de questions voisines, et que nous n'allons malheureusement pas pouvoir présenter ici.

L'idée de [DMR10] est d'utiliser la version algébrique des inégalités de Morse (cf. corollaire 1.6) ; on doit montrer que le produit d'intersection (12) est positif si $k = n$ (et si le degré $d \geq d_n^1$ est assez grand). Ce choix n'est pas arbitraire : suite aux résultats de [Div08], [Rou06a], on sait que l'ordre $k = n$ est le minimum pour lequel on puisse espérer montrer que le groupe

$$H^0\big(X, E_{k,m}\big)$$

n'est pas réduit à zéro, si $m \gg 0$.

Les classes de Chern de l'hypersurface $X \subset \mathbf{P}^{n+1}$ s'écrivent ainsi (voir e.g. [DR11])

$$c_p(X) = Q_p(d)h^p \tag{29}$$

où $Q_p(d) = \sum_{r=0}^{p} (-1)^{r+p} \binom{n+2}{r} d^{p-r}$ est un polynôme de degré p en d. Il sera commode d'introduire la notation

$$Q_p(d) = \sum_{r=0}^{p} q_r d^{p-r} \tag{30}$$

où $|q_r| \leq \dfrac{(n+2)^r}{r!}$ pour chaque $r = 0, ..., p$. En combinant les égalités (24) et (29) nous obtenons la formule

$$u_k^n + \sum_{p+|i|+i_k=n} \sum_{r=0}^{p} \varepsilon(i) \frac{(i_k+1)^{n-i_k-p}}{i!} q_r d^{p-r} h^p u^i u_k^{i_k} = 0, \tag{31}$$

où on pose $\varepsilon(i) = 0$ si $i_k = n$.

Les arguments de [DMR10] visant à démontrer le théorème 0.3 s'articulent autour des trois lemmes suivants.

Lemme 3.1 ([Div09]). — *Soit $j := (j_1, ..., j_n) \in \mathbf{Z}_+^n$ un vecteur dont les coefficients sont des entiers positifs et soit $s \in \mathbf{Z}_+$ tels que $s + |j| = n^2$. Alors le produit d'intersection*

$$h^s u_1^{j_1} ... u_n^{j_n} \tag{32}$$

est un polynôme en d de degré inférieur à $n+1-s$. Ainsi, on peut écrire (18) *sous la forme*

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{t=1}^{n} a_t u_t + 2|\mathbf{a}|h\Big)^{n^2} - \ & n^2|\mathbf{a}|\Big(\sum_{t=1}^{n} a_t u_t + 2|\mathbf{a}|h\Big)^{n^2-1}\big(2h - \delta c_1(X)\big) \\ = \ & \sum_{q=0}^{n+1} b_q(\mathbf{a}) d^q + \delta \sum_{q=0}^{n+1} \widetilde{b}_q(\mathbf{a}) d^q.\end{aligned}$$

où les b_q et $\widetilde{b}_q$ de la formule précédente sont des polynômes homogènes de degré n^2 en $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)$.

Preuve (esquisse). On prouve ce lemme par une double récurrence sur n et j_n : si $j_n < n-1$, la quantité (32) vaut zéro, car la classe $h^s u_1^{j_1} \dots u_{n-1}^{j_{n-1}}$ vit en codimension

$$s + j_1 + \dots + j_{n-1} = s + |n| - j_n > n^2 - n + 1 = \dim(X_{n-1}).$$

Si $j_n = n-1$, on a

$$h^s u_1^{j_1} ... u_{n-1}^{j_{n-1}} u_n^{n-1} = h^p u_1^{j_1} ... u_{n-1}^{j_{n-1}} \tag{33}$$

(car la restriction du fibré en droites $\mathcal{O}_{X_n}(1)$ aux fibres du morphisme $X_n \to X_{n-1}$ coïncide avec le fibré tautologique sur l'espace projectif) et on poursuit le raisonnement. Si $i_n \geq n$, alors on a

$$h^s u_1^{j_1} ... u_n^{j_n} = - \sum_{p+|i|+i_n=n} \sum_{r=0}^{p} \varepsilon(i) q_r d^{p-r} \frac{(i_n+1)^{n-i_n-p}}{i!} h^{p+s} u^{i+j} u_n^{j_n+i_n-n}$$

et le lemme est démontré grâce à l'hypothèse de récurrence, car dans la somme ci-dessus on a $j_n + i_n - n < j_n$. □

Dans le lemme suivant, nous allons analyser le coefficient b_{n+1} du polynôme

$$B_{\delta,\mathbf{a}}(d) := \sum_{q=0}^{n+1} \big(b_q(\mathbf{a}) + \delta \widetilde{b}_q(\mathbf{a})\big) d^q.$$

Pour cela, il sera utile de définir le pavé

$$\mathcal{C} := \Big\{(a_1, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n : 3^{n-j} + ... + 3 \leq \frac{a_j}{n^2} \leq 3^{n-j} + ... + 3 + 1, \quad j = 1, ..., n-1\Big\}$$

et $1 \leq a_n \leq n^2$.

Lemme 3.2 ([Div09]). — *Il existe un élément* $\mathbf{a} \in \mathcal{C} \cap \mathbf{Z}^n$ *tel que* $b_{n+1}(\mathbf{a}) \geq 1$.

Preuve (esquisse). Tout d'abord, remarquons que, si $\mathbf{a} \in \mathcal{C}$, alors le fibré

$$\mathcal{O}_{X_n}(\mathbf{a}) \otimes \mathcal{O}_X(2|\mathbf{a}|)$$

est nef, car les composantes de $\mathbf{a}$ satisfont les relations algébriques requises par le lemme 1.8. Ceci combiné avec le lemme 3.1 montre que

$$b_{n+1}(\mathbf{a}) \geq 0$$

pour tout $\mathbf{a} \in \mathcal{C}$. Si le polynôme b_{n+1} est identiquement nul par restriction à l'ensemble $\mathcal{C} \cap \mathbf{Z}^n$, alors il est aisé de voir que ceci entraîne l'annulation de tous ses coefficients. Mais cette éventualité ne peut pas se produire, car

$$u_1^n ... u_n^n > 0$$

dès que $d \geq n+2$ (i.e. dès que K_X est ample). □

Il nous reste à majorer de façon effective les autres coefficients de $B_{\delta,\mathbf{a}}$. Les composantes de $\mathbf{a}$ sont bornées explicitement par rapport à n, car $\mathbf{a} \in \mathcal{C}$. Par la formule du binôme, on voit qu'il suffit d'estimer les coefficients des puissances de d dans les expressions

$$h^\alpha u_1^{j_1} ... u_n^{j_n}$$

où $\alpha + |j| = n^2$ (cf. théorème 5.1 dans [DMR10]).

Lemme 3.3 ([DMR10]). — *Soit $k \geq 1$ un entier positif. On note $c(k)$ le maximum des valeurs absolues des coefficients des polynômes $h^\alpha u_1^{j_1}...u_k^{j_k}$, où $\alpha + |j| = n + k(n-1)$. Alors nous avons l'inégalité*

$$c(k) \leq \big(n(n+2)(k+n+2)\big)^{k(n-1)+1} c(k-1);$$

en particulier, $c(n) \leq 2^{\frac{3}{2}(n^3+n)} n^{\frac{3}{2}(n^3+n)}$.

Preuve (esquisse). L'argument est une « version itérée » de la preuve du lemme 3.1. Considérons un vecteur $j := (j_1, ..., j_k)$ et un entier α tels que $\alpha + |j| = n + k(n-1)$. Comme nous l'avons déjà vu, le produit correspondant $h^\alpha u_1^{j_1}...u_k^{j_k}$ est un polynôme de degré au plus $n+1$ par rapport à d. Sans perte de généralité on peut supposer $j_k \geq n$, et comme dans la preuve de 3.1 on écrit

$$h^\alpha u_1^{j_1}...u_k^{j_k} = -h^\alpha u_1^{j_1}...u_{k-1}^{j_{k-1}} \sum_{l=1}^{n} u_k^{j_k - l} c_l(V_{k-1})$$

en utilisant la formule (19). On applique ce procédé à plusieurs reprises, afin de diminuer la puissance de u_k jusqu'à $n-1$; ceci donne

$$h^\alpha u_1^{j_1}...u_k^{j_k} = \pm h^\alpha u_1^{j_1}...u_{k-1}^{j_{k-1}} \sum_{s=0}^{j_k - n+1} \sum_{l_1+...+l_s = j_k - n+1} c_{l_1}(V_{k-1})...c_{l_s}(V_{k-1}). \tag{34}$$

Les indices l_p figurant dans la somme varient entre 1 et n ; par la formule (23), nous obtenons

$$c_l(V_{k-1}) = \sum_{p+|i|=l} \sum_{r=0}^{p} \varepsilon(i) \frac{(n-l+1)^{l-p}}{i!} q_r d^{p-r} h^r u^i. \tag{35}$$

Très grossièrement, d'après la formule (34), pour trouver un majorant de $c(k)$, il suffit de multiplier $c(k-1)$ par le nombre

$$\sum_{s=0}^{j_k-n+1} \sum_{l_1+...+l_s=j_k-n+1} \prod_{\beta=1}^{s} \Big(\sum_{p_\beta + |i_\beta| = l_\beta} \sum_{r_\beta=0}^{p_\beta} |\varepsilon(i_\beta)| \frac{(n-l_\beta+1)^{l_\beta - p_\beta}}{i_\beta!} q_{r_\beta} \Big).$$

La quantité sous le signe produit est majorée par

$$\big(nk+3\big)^{l_\beta} \ ;$$

on peut vérifier cette affirmation comme suit. Pour chaque $\beta = 1, ..., s$ et $l_\beta \leq n$ on doit évaluer le nombre

$$\sum_{p_\beta=1}^{l_\beta} \sum_{r_\beta=1}^{p_\beta} \sum_{|i_\beta|=l_\beta-p_\beta} \frac{(n-l_\beta+1)^{l_\beta-p_\beta}}{i_\beta!} q_{r_\beta}. \tag{36}$$

L'inégalité $\sum_{r_\beta=1}^{p_\beta} q_{r_\beta} \leq (n+3)^{p_\beta}$ est une conséquence directe du fait que $q_{r_\beta} \leq \dfrac{(n+2)^{r_\beta}}{r_\beta!}$, par (30). Ensuite, par la formule du binôme on obtient l'égalité

$$\sum_{|i_\beta|=l_\beta-p_\beta} \frac{1}{i_\beta!} = \frac{(k-1)^{l_\beta-p_\beta}}{(l_\beta-p_\beta)!},$$

et la quantité (36) sera donc majorée par

$$\sum_{p_\beta=1}^{l_\beta} \frac{(n+3)^{p_\beta}(k-1)^{l_\beta-p_\beta}(n-l_\beta+1)^{l_\beta-p_\beta}}{(l_\beta-p_\beta)!} \leq (3+k+nk)^{l_\beta}; \tag{37}$$

en conclusion, on doit majorer la somme

$$\sum_{s=0}^{j_k-n+1} \binom{j_k-n+1}{s} \big(3+k+nk\big)^s. \tag{38}$$

Mais ceci est vite fait, car l'expression (38) vaut

$$\big(nk+k+4\big)^{j_k-n+1} \tag{39}$$

et finalement, pour tout $k \leq n$, nous obtenons l'inégalité

$$c(k) \leq \big(n^2+n+4\big)^{kn} c(k-1), \tag{40}$$

à partir de laquelle on déduit immédiatement la majoration de $c(n)$. $\square$

Nous nous retrouvons à présent dans la situation suivante. Le produit d'intersection figurant dans le lemme 3.1 s'écrit

$$\sum_{q=0}^{n+1} b_q(\mathbf{a})d^q + \delta \sum_{q=0}^{n+1} \widetilde{b}_q(\mathbf{a})d^q \ ;$$

d'après le lemme 3.2, nous pouvons choisir un vecteur $\mathbf{a_0} \in \mathcal{C}$ tel que

$$b_{n+1}(\mathbf{a_0}) \geq 1.$$

Le lemme 3.3 et la relation $\mathbf{a_0} \in \mathcal{C}$ fournissent une majoration explicite en fonction de n pour les quantités $\big(b_q(\mathbf{a_0})\big)_{0\leq q\leq n}$ et $\big(\widetilde{b}_q(\mathbf{a_0})\big)_{0\leq q\leq n+1}$. On peut donc choisir un nombre rationnel positif $\delta = \delta_n$ tel que

$$b_{n+1}(\mathbf{a_0}) + \delta_n \widetilde{b}_{n+1}(\mathbf{a_0}) \geq 1/2.$$

Ensuite, dans [DMR10] les auteurs déterminent une quantité effective d_n^1 telle que la positivité du (18) sera vérifiée dès lors que $d \geq d_n^1$; ceci se fait par des considérations élémentaires sur l'estimation des valeurs absolues des racines des polynômes d'une variable en fonction de la valeur absolue de leurs coefficients.

Pour résumer, il existe $(d_n^1, \delta_n) \in \mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Q}_+$ tel que pour toute hypersurface non singulière X de $\mathbf{P}^{n+1}$ de degré $d \geq d_n^1$ on ait

$$H^0(X, E_{n,m}T_X^\star \otimes K_X^{-\delta_n m}) \neq 0. \tag{41}$$

4. DIFFÉRENTIELLES HOLOMORPHES SUR UNE VARIÉTÉ DE TYPE GÉNÉRAL

L'étude des questions qui nous intéressent dans cet exposé a enregistré un progrès important grâce aux travaux de J.-P. Demailly dans [Dem11], [Dem12]. Ceux-ci montrent que le fibré $\mathcal{O}_{X_k^{GG}}(1)$ est gros, pour toute variété de type général X, à condition que $k \gg 0$. Un résultat analogue dans le cas des hypersurfaces de $\mathbf{P}^{n+1}$ avait été établi auparavant par J. Merker dans [Merk10], par des méthodes différentes. L'article [Dem11] est très riche en contenu ; nous nous proposons de n'illustrer ici que quelques aspects qui nous paraissent particulièrement frappants.

4.1. Métriques sur le Q-fibré $\mathcal{O}_{X_k^{GG}}(1)$

Tour d'abord on cherche à munir le $\mathbf{Q}$-fibré $\mathcal{O}_{X_k^{GG}}(1)$ d'une métrique, afin d'utiliser la version analytique des inégalités de Morse holomorphes (cf. [Dem85], et théorème 1.5 dans le premier paragraphe de ce texte).

Si $k = 1$, l'espace $J_1(X)$ s'identifie avec l'espace tangent T_X de X, et une métrique sur $\mathcal{O}_{X_1^{GG}}(1)$ est simplement ce qu'on appelle une *métrique de Finsler* sur X. Par exemple, si on fixe une métrique hermitienne ω sur X, alors elle induit naturellement une métrique sur $\mathcal{O}_{X_1^{GG}}(1)$.

Si $k \geq 2$, la seule donnée (X, ω) n'est pas suffisante pour munir $\mathcal{O}_{X_k^{GG}}(1)$ d'une métrique. Soit $X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$ un recouvrement de X par un nombre fini d'ouverts de coordonnées ; pour chaque $\alpha \in \Lambda$ on fixe les coordonnées $z_\alpha = (z_\alpha^1, ..., z_\alpha^n) : U_\alpha \to \mathbf{C}^n$. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 2.1, ceci induit une carte pour la variété de jets $J_k(X)|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbf{C}^{nk}$, définie comme suit :

$$f \mapsto \big(f(0), f'_\alpha(0), ..., f_\alpha^{(k)}(0)\big)$$

où $f_\alpha := z_\alpha \circ f$ est l'image du k-jet f par l'application z_α.

La définition de la métrique sur $\mathcal{O}_{X_k^{GG}}(1)$ fait intervenir des paramètres $(\varepsilon_j)_{j=1,...k}$ tels que $1 = \varepsilon_1 \gg \varepsilon_2 \gg ... \gg \varepsilon_k > 0$, un nombre entier p assez divisible, une métrique hermitienne ω sur X ainsi qu'une partition de l'unité $(\theta_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ subordonnée à (U_α). Étant donné un k-jet $f \in J_{k,x}(X)$ en $x \in X$, on définit sa norme par la formule

$$\Psi_{\varepsilon,\omega}(f) := \Big(\sum_{\alpha\in\Lambda} \theta_\alpha \sum_{s=1}^{k} \varepsilon_s^{2p} |f_\alpha^{(s)}(0)|_{\omega_x}^{2p/s}\Big)^{1/p}. \tag{42}$$

La fonction $\Psi_{\varepsilon,\omega}$ définit une exhaustion de la variété des k-jets $J_k(X)$ de X, et elle induit une métrique h_ε sur $\mathcal{O}_{X_k^{GG}}(1)$ dont la forme de courbure sera désignée par $\Theta_{\varepsilon,k}$. Si on note p_k la projection de $J_k(X) \setminus \{0\}$ sur X_k^{GG}, on a

$$p_k^\star(\Theta_{\varepsilon,k}) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\Psi_{\varepsilon,\omega}.$$

Afin de montrer que $\mathcal{O}_{X_k^{GG}}(1)$ est gros, il suffit de montrer l'inégalité

$$\int_{X_k^{GG}(\Theta_{\varepsilon,k},\le 1)} \Theta_{\varepsilon,k}^{n(k+1)-1} > 0. \tag{43}$$

En regardant la définition (42) de la fonction $\Psi_{\varepsilon,\omega}$ on pourrait a priori émettre des doutes sur les propriétés de positivité de la forme de courbure associée. En effet, si L est un fibré en droites et si on se donne une famille de fonctions indéfiniment dérivables $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{R}$, on peut construire une métrique h sur L en recollant des métriques locales $e^{-\varphi_\alpha}$ par la partition de l'unité θ_α. En général, la courbure de (L,h) peut être substantiellement différente de la hessienne des fonctions locales φ_α.

Cependant, nous nous trouvons ici dans une situation spéciale : si les paramètres $\varepsilon_2, ..., \varepsilon_k$ tendent vers zéro, la limite de $\Psi_{\varepsilon,\omega}$ se trouve être indépendante de la partition de l'unité (θ_α). Donc, si les (ε_j) sont petits, on peut espérer que l'influence des (θ_α) sera réduite. C'est ce qu'on va montrer ensuite, cf. [Dem11].

Soit $\alpha \in \Lambda$, et supposons qu'on dispose d'un biholomorphisme

$$\rho_\alpha : \pi_k^{-1}(U_\alpha) \to \pi_k^{-1}(U_\alpha),$$

où $\pi_k : X_k^{GG} \to X$ est la projection naturelle. On peut appliquer la formule de changement de variables, et l'intégrale à calculer

$$\int_{X_k^{GG}(\Theta_{\varepsilon,k},\le 1)|_{U_\alpha}} \Theta_{\varepsilon,k}^{n(k+1)-1} \tag{44}$$

est égale à

$$\int_{X_k^{GG}(\Theta_{\varepsilon,k},\le 1)|_{U_\alpha}} \rho_\alpha^\star\left(\Theta_{\varepsilon,k}^{n(k+1)-1}\right), \tag{45}$$

où on utilise la même notation $X_k^{GG}(\Theta_{\varepsilon,k},\le 1)|_{U_\alpha}$ pour désigner l'ensemble des points d'indice au plus 1 dans X_k^{GG} qui se projettent sur U_α pour les deux formes sous le signe de la somme dans (44) et (45) respectivement.

En utilisant la carte $J_k(X)|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbf{C}^{kn}$, on définit le biholomorphisme $\rho_{\alpha,\varepsilon} : J_k(X)|_{U_\alpha} \to J_k(X)|_{U_\alpha}$ fibre à fibre

$$\rho_{\alpha,\varepsilon}(x,\xi_1,\xi_2...,\xi_k) = (x,\varepsilon_1^{-1}\xi_1,\varepsilon_2^{-2}\xi_2...,\varepsilon_k^{-k}\xi_k). \tag{46}$$

L'importance de cette application réside dans le fait que la fonction

$$\Psi_{\varepsilon,\omega}\circ\rho_{\alpha,\varepsilon}$$

est *presque indépendante* de la partition de l'unité ! Pour étayer ces propos, on esquisse maintenant la vérification de cette affirmation pour le cas particulier $k = 2$.

On note $g_{\alpha\beta}$ la fonction de transition correspondant aux coordonnées (z_α) et (z_β), i.e. $z_\beta = g_{\alpha\beta}(z_\alpha)$; la fonction de transition induite sur l'espace des 2-jets est

$$(\xi^1_\beta, \xi^2_\beta) = \big(dg_{\alpha\beta}\xi^1_\alpha, dg_{\alpha\beta}\xi^2_\alpha + d^2 g_{\alpha\beta}(\xi^1_\alpha, \xi^1_\alpha)\big) \tag{47}$$

où les dérivées sont calculées en z_α.

Soit f un 2-jet en z_α ; les composantes du 2-jet $\rho_{\alpha,\varepsilon} \circ f$ par rapport aux coordonnées α sont $\big(f'_\alpha, \varepsilon_2^{-2} f''_\alpha\big)$ et, d'après la formule (47), ses composantes par rapport aux coordonnées β sont

$$\big(dg_{\alpha\beta} f'_\alpha, \varepsilon_2^{-2} dg_{\alpha\beta} f''_\alpha + d^2 g_{\alpha\beta}(f'_\alpha, f'_\alpha)\big)\,.$$

Alors en comparant les expressions

$$\big|f'_\alpha\big|^{2p}_\omega + \varepsilon_2^{2p}\big|\varepsilon_2^{-2} f''_\alpha\big|^p_\omega, \quad \big|dg_{\alpha\beta} f'_\alpha\big|^{2p}_\omega + \varepsilon_2^{2p}\big|\varepsilon_2^{-2} dg_{\alpha\beta} f''_\alpha + d^2 g_{\alpha\beta}(f'_\alpha, f'_\alpha)\big|^p_\omega$$

on voit qu'elles coïncident à l'ordre $\mathcal{C}^\infty$, modulo des termes d'erreur en ε.

En conclusion, cet argument montre que dans l'évaluation de l'intégrale (43) on peut supposer que la fonction $\Psi_{\varepsilon,\omega}$ est réduite à son expression locale (avec changement d'échelle)

$$\Psi(z, \xi^1, ..., \xi^k) = \Big(\sum_{j=1}^k \big|\xi^j\big|^{2p/j}_\omega\Big)^{\frac{1}{p}},$$

où chaque ξ^j est interprété comme vecteur tangent en z.

En utilisant des coordonnées géodésiques pour la métrique ω, on a

$$\big|\xi^j\big|^2_\omega = \sum_\alpha \big|\xi^j_\alpha\big|^2 + \sum_{m,p,\alpha,\beta} c_{p\overline{m}\beta\overline{\alpha}} z_p \overline{z_m} \xi^j_\beta \overline{\xi^j_\alpha}\,,$$

modulo des termes d'ordre 3 en z et, grâce à cette formule, on montre (cf. proposition 2.13 dans [Dem11]) que la forme de courbure associée à Ψ s'écrit

$$\Theta_{\varepsilon,k} = \omega_k(\xi) + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{i=1}^k \frac{1}{i}\frac{|\xi_i|^{2p/i}}{\sum_{j=1}^k \big|\xi^j\big|^{2p/j}} \sum_{m,j,\alpha,\beta} c_{j\overline{m}\beta\overline{\alpha}} \frac{\xi^i_\beta \overline{\xi^i_\alpha}}{|\xi^i|^2} dz^j \wedge dz^{\overline{m}}\ ;$$

on a noté ici

$$\omega_k(\xi) := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\Big(\sum_{i=1}^k |\xi^i|^{2p/i}\Big)^{1/p}$$

l'analogue de la forme de Fubini-Study pour l'espace projectif à poids, et les coefficients $(c_{j\overline{m}\beta\overline{\alpha}})$ sont ceux de la forme de courbure de $(T^\star_X, \omega)$ au point z.

À présent, il est clair que la positivité relative du fibré $\mathcal{O}_{X_k^{GG}}(1)$ est cruciale : l'ouvert des points où sa forme de courbure est d'indice au plus 1 est entièrement déterminé par la courbure de (X, ω). En anticipant un peu sur la suite, on peut montrer que, lorsque $k \gg 0$, ce n'est pas l'intégralité du tenseur de courbure qui contribue aux termes dominants, mais seulement sa trace, à savoir la courbure de Ricci (voir aussi le calcul de la caractéristique d'Euler dans [GG80]).

Une fois cette situation comprise, le calcul de l'intégrale (43) dans [Dem11] ne présente plus de complications importantes, mais il est assez long et comporte quelques points délicats. Avant d'en donner un très bref aperçu dans le paragraphe suivant, une observation générale voisine se dégage quant aux techniques discutées ici.

Remarque 4.1. — Considérons une suite exacte de fibrés

$$0 \to F \to E \to G \to 0$$

et supposons F et G munis de métriques hermitiennes h_F et h_G respectivement. Via un scindage C^∞ (non holomorphe en général) $E \simeq F \oplus G$, on obtient une métrique sur E, dont la forme de courbure s'exprime en fonction de $\Theta_{F,h_F}, \Theta_{G,h_G}$ *et de la seconde forme fondamentale* de la suite précédente. Cette dernière quantité (i.e. son analogue pour les applications entre espaces fibrés) semble absente de nos considérations dans ce paragraphe ; bien entendu, ce n'est pas le cas. N'oublions pas que c'est la forme de courbure du fibré $\mathcal{O}_E(1)$ qui nous intéresse, et dans son expression on a la courbure de E évaluée dans les directions $[\xi]$ du fibré dual $E^\star$. Ainsi, la seconde forme fondamentale apparaît dans les termes *non diagonaux*, qui ne sont pas perceptibles lorsqu'on fait agir les changements d'échelle ρ_ε, mais apparaissent certainement dans les termes d'erreur.

Comme conséquence, on en déduit l'énoncé suivant : *supposons que F (ou G) est muni d'une métrique dont la forme de courbure est semi-positive, et que G (ou F) est gros (au sens de Hartshorne). Alors E est gros.*

4.2. Les calculs

En travaillant en coordonnées polaires (cf. [Dem11], page 18), on voit que l'intégrale (43) devient

$$\frac{(n+kn-1)!}{n!(k!)^n}\int_{z\in X}\int_{(x,u)\in\Delta_{k-1}\times(S^{2n-1})^k}\chi_{g_k}(z,x,u)g_k(z,x,u)^n d\nu d\mu \tag{48}$$

où on utilise les notations

$$\Delta_{k-1} := \Big\{(x_1,...,x_k)\in\mathbf{R}_+^k : \sum_{i=1}^n x_i = 1\Big\};$$

les mesures par rapport auxquelles on intègre sont

$$d\nu := (x_1...x_k)^{n-1}d\lambda, \quad d\mu := \text{mesure produit sur } \big(S^{2n-1}\big)^k.$$

Finalement, on note

$$g_k(z,x,u) := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{i=1}^k \frac{x_i}{i}\sum_{m,j,\alpha,\beta} c_{j\overline{m}\beta\overline{\alpha}}u_\beta^i\overline{u_\alpha^i}dz^j\wedge dz^{\overline{m}} \tag{49}$$

et χ_{g_k} est la fonction caractéristique correspondant à l'ouvert des points $(z,x,u)\in X\times\Delta\times\big(S^{2n-1}\big)^k$ où l'indice de g_k est au plus 1.

Pour déterminer la valeur asymptotique de la quantité (48) lorsque $k\to\infty$, on propose deux méthodes dans [Dem12].

– On commence par observer que le calcul est immédiat si les coefficients du tenseur de courbure $(c_{j\overline{m}\beta\overline{\alpha}})_{j,m,\alpha,\beta}$ de $(T_X^\star, \omega)$ vérifient

$$c_{j\overline{m}\beta\overline{\alpha}} = r_{j\overline{m}}\delta_{\alpha\beta} \tag{50}$$

(autrement dit, si la matrice de courbure est diagonale et telle que les formes sur la diagonale coïncident). Dans ce cas, la forme g_k est particulièrement simple, nous avons une parfaite corrélation entre les points d'indice au plus 1 sur X_k^{GG} et sur X, et on obtient

$$\int_{X_k^{GG}(\Theta_{\varepsilon,k},\leq 1)} \Theta_{\varepsilon,k}^{n(k+1)-1} = \frac{(\log k)^n}{n!(k!)^n}\int_X \chi_\theta \theta^n + \mathcal{O}\big((\log k)^{-1}\big) \tag{51}$$

où θ est la courbure du fibré canonique, muni de la métrique déduite de ω. Étant donné que par hypothèse K_X est ample (ou au moins gros, mais nous n'allons pas discuter cette version ici), on peut supposer que θ est définie positive.

En général il n'y pas de raison que la courbure de $(T_X^\star, \omega)$ ait une forme aussi particulière que celle demandée dans (50). Mais on peut toujours décomposer la forme g_k en

$$g_k = g_k^{\mathrm{diag}} + \widetilde{g}_k$$

où dans la définition de g_k^{diag} on remplace chaque coefficient $c_{j\overline{m}\beta\overline{\alpha}}$ par

$$\theta_{j\overline{m}} := 1/n\delta_{\alpha\beta}\sum_{\alpha=1}^n c_{j\overline{m}\alpha\overline{\alpha}},$$

et dans celle de $\widetilde{g}_k$ par $\widetilde{c}_{j\overline{m}\beta\overline{\alpha}} := c_{j\overline{m}\beta\overline{\alpha}} - \theta_{j\overline{m}}\delta_{\alpha\beta}$. On montre (cf. [Dem11]) que la contribution de la forme de trace nulle $\widetilde{g}_k$ dans le calcul de (48) est de l'ordre de grandeur $\dfrac{(\log k)^{n-1}}{n!(k!)^n}$, ce qui marque la fin de la preuve. Bien entendu, au cours de la « vraie » démonstration de [Dem11] il y a quelques points délicats – des estimées de déviation de nature probabiliste – que nous ne pouvons pas évoquer ici.

Observons pour finir que malgré sa souplesse, cette méthode ne permet pas de déterminer un ordre optimal k à partir duquel on obtient des sections du fibré $\mathcal{O}_{X_k^{GG}}(m)$, bien qu'elle permette tout de même d'obtenir des bornes explicites pour k en fonction des invariants de X.

– La deuxième méthode fait intervenir une *borne inférieure* pour le tenseur de courbure du fibré cotangent, dans le sens suivant.

Soit E un fibré vectoriel sur X, muni d'une métrique h dont la forme de courbure en un point $x_0 \in X$ s'écrit

$$\Theta_h(E)_{x_0} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{i,j,\alpha,\beta} R_{j\bar{i}\beta\overline{\alpha}} dz^j \wedge dz^{\bar{i}} \otimes e_\beta \otimes e_\alpha^\star.$$

On dit que (E, h) est positif au sens de Griffiths si on a

$$\sum_{i,j,\alpha,\beta} R_{j\bar{i}\beta\overline{\alpha}} v^j \overline{v^i} \xi^\beta \overline{\xi^\alpha} \geq 0$$

pour tout couple de vecteurs $(v, \xi) \in T_{X,x_0} \times E_{x_0}$.

Soit ω une métrique sur X ; supposons qu'il existe une forme γ sur X telle que

$$\sum_{i,j,\alpha,\beta} c_{j\bar{i}\beta\overline{\alpha}} v^j \overline{v^i} \xi^\beta \overline{\xi^\alpha} \geq -\gamma_{j\bar{i}} v^j \overline{v^i} |\xi|^2$$

où on note $c_{j\bar{i}\beta\overline{\alpha}}$ les coefficients de la courbure de $T_X^\star$ par rapport à la métrique déduite de ω. Ici v est un vecteur tangent et ξ est un vecteur cotangent en x_0.

Dans ce cas on écrit la forme g_k comme différence de deux formes définies semi-positives sur X_k, notamment $g_k := g_k^1 - g_k^2$; on note

$$g_k^{(1)} := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{i} \sum_{m,j,\alpha,\beta} \big(c_{j\overline{m}\beta\overline{\alpha}} + \gamma_{j\overline{m}} \delta_{\alpha\beta} \big) u^i_\beta \overline{u^i_\alpha} dz^j \wedge d\overline{z^m}$$

et respectivement

$$g_k^{(2)} := |u|^2 \sum_{i,j} \gamma_{j\bar{i}} v^j \overline{v^i} dz^j \wedge d\overline{z^i}.$$

On contrôle l'intégrale sur l'ensemble des points d'indice au plus 1 de g_k sur X_k en appliquant le corollaire 1.7. En fait, il sera utile de travailler dans un cadre un peu plus général, et de considérer le fibré $L_k := \mathcal{O}_{X_k^{GG}}(1) \otimes A^{-\delta_k}$ (cf. notations dans le théorème 0.4) ; on montre dans [Dem12], pages 52-53 que si $k \geq n$ on a

$$\begin{aligned} N(n,k) &\int_{X_k^{GG}(h_k, \leq 1)} \Theta^{n+kn-1}_{L_k,h_k} \\ &\geq \int_X (\Theta_{K_X,\omega} + n\gamma)^n - c(n,k) \int_X (\Theta_{K_X,\omega} + n\gamma)^{n-1} (\Theta_{A,h_A} + n\gamma) \end{aligned}$$

où les symboles $N(n,k)$ et $c(n,k)$ sont des nombres rationnels positifs explicites tels que

$$c(n,n) \leq \frac{1}{3} \big(n \log(n \log 24n) \big)^n$$

(cf. [Dem12], pages 52-53).

En conclusion, le fibré L_k sera gros dès que la condition numérique suivante est satisfaite :

$$\int_X (\Theta_{K_X,\omega} + n\gamma)^n > c(n,n) \int_X (\Theta_{K_X,\omega} + n\gamma)^{n-1} (\Theta_{A,h_A} + n\gamma). \tag{52}$$

5. LA CONJECTURE DE GREEN-GRIFFITHS POUR LES HYPERSURFACES GÉNÉRIQUES DE L'ESPACE PROJECTIF

Pour montrer que toute courbe transcendante tracée sur une hypersurface générique X de $\mathbf{P}^{n+1}$ est algébriquement dégénérée, dans [DMR10] les auteurs utilisent une stratégie mise au point par Y.-T. Siu dans [Siu02], [Siu04], et écrite en détail très récemment dans [Siu12]. Nous allons la présenter brièvement par la suite, mais d'abord nous rappelons le théorème d'annulation fondamental mis en jeu.

THÉORÈME 5.1 ([Siu97], [Dem97]). — *Soit $\mathcal{P}$ une k-différentielle holomorphe de degré m à valeurs dans le dual d'un fibré ample sur X. Alors*

$$\mathcal{P}(\varphi', ..., \varphi^{(k)}) \equiv 0$$

pour toute courbe entière $\varphi : \mathbf{C} \to X$.

Les résultats présentés dans les paragraphes précédents montrent l'existence de sections non-triviales du fibré $E_{n,m}T_X^\star \otimes A^{-1}$ si le degré de $X \subset \mathbf{P}^{n+1}$ est assez élevé. Par le théorème 5.1 ci-dessus, l'image de la dérivée d'ordre n de toute courbe entière φ se situe dans une sous-variété propre $Y \subsetneq X_n$. Nous voudrions cependant montrer qu'il existe une sous-variété Y *verticale* par rapport à la projection $X_n \to X$ (i.e. telle que son image dans X n'est pas dense).

Soit $\mathcal{X} \subset \mathbf{P}^{n+1} \times \mathbf{P}^{N_d}$ l'hypersurface donnée par la relation

$$\mathcal{X} := \{(z, A) \in \mathbf{P}^{n+1} \times \mathbf{P}^{N_d} : \sum_\alpha a_\alpha z^\alpha = 0\},$$

où $N_d := \binom{n+d+1}{d} - 1$. Il se trouve que $\mathcal{X}$ est une variété non-singulière, de bidegré $(d, 1)$. Comme conséquence du fait que le degré de $\mathcal{X}$ par rapport aux variables A est égal à 1, on peut construire des champs de vecteurs méromorphes sur $\mathcal{X}$ dont l'ordre des pôles est indépendant de d ; en fait, C. Voisin montre dans [Vois98] que le fibré

$$T_\mathcal{X} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n+}}(1) \tag{53}$$

est engendré par ses sections globales. Bien entendu, les vecteurs construits dans le théorème 5.2 ne seront pas tangents au point générique des fibres de la projection $\pi_N : \mathcal{X} \to \mathbf{P}^{N_d}$ (c'est en référence à cela que Siu les appelle *obliques*), mais néanmoins, leur existence sera déterminante pour montrer le théorème 0.5. En fait, on aura besoin d'une généralisation des résultats de [Vois98], dans le contexte des jets.

Pour chaque entier positif k, on définit la variété $J_k^{\mathrm{reg}}(\mathcal{X})$ des k-jets relatifs de $\mathcal{X}$ qui consiste en classes d'équivalence des disques holomorphes contenus dans les fibres de la projection π_N. Le résultat suivant est démontré dans [Merk09] et [Siu12] (voir également [Pa08] pour un argument « à la main » dans le cas $n = 2$). On prend ici $k = n$.

THÉORÈME 5.2 ([Merk09], [Siu12]). — *Le fibré vectoriel*

$$T_{J_n^{\mathrm{reg}}(\mathcal{X})} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n+1}}(n^2 + 2n) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{N_d}}(2) \tag{54}$$

est engendré par ses sections globales $\mathbf{G}_n$-invariantes.

La preuve de ce résultat ne sera pas esquissée ici ; on se contentera de mentionner que la construction de champs de vecteurs est explicite, selon un algorithme très bien expliqué dans [Merk09].

En utilisant le théorème précédent, le résultat de non-annulation 0.5 procède comme suit (à quelques virgules près, les arguments sont identiques dans les trois articles [Siu02], [DMR10], [Dem12]).

Soit X une hypersurface non-singulière de degré d dans $\mathbf{P}^{n+1}$; nous supposons que X est générique, dans le sens suivant. Soit $a_0 \in \mathbf{P}^{N_d}$ tel que $X = \mathcal{X}_{a_0}$. Alors toute différentielle holomorphe d'ordre n et de degré arbitraire se prolonge au voisinage de a_0.

Nous avons vu dans les paragraphes 3 et 4 que si d est assez grand, il existe une différentielle holomorphe $\mathcal{P}$ d'ordre n et de degré $m \gg 0$ à valeurs dans $K_X^{-\delta_n m}$. Dans les articles cités précédemment la constante δ_n n'est pas la même, mais ce n'est pas important ici.

Localement, en tant que fonction sur $J_n(X)$ on peut écrire $\mathcal{P}$ sous la forme

$$\mathcal{P}(z, \xi) = \sum_{|\alpha_1| + \ldots + n|\alpha_n| = m} p_\alpha(z)(\xi^1)^{\alpha_1} \ldots (\xi^n)^{\alpha_n}$$

(on utilise ici les notations multi-indices) ; pour $z \in X$ générique, le polynôme $\mathcal{P}(z, \cdot)$ n'est pas identiquement zéro, donc son ordre d'annulation en un point (disons (ξ_0), correspondant au jet γ dans le théorème 1.5) est au plus m. La différentielle holomorphe $\mathcal{P}$ se prolonge au voisinage de a_0, car X est générique. Donc une nouvelle différentielle holomorphe sera produite en dérivant l'extension de $\mathcal{P}$ dans la direction d'un champ de vecteurs, puis en considérant la restriction du résultat à X_n. Si on a

$$v \in H^0\big(\mathcal{X}, T_{J_n^{\mathrm{reg}}(\mathcal{X})} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n+1}}(n^2 + 2n) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{N_d}}(2)\big)\,, \tag{55}$$

alors la dérivée de l'extension de $\mathcal{P}$ dans la direction v sera une différentielle holomorphe de degré n à valeurs dans

$$K_X^{-\delta_n m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n+1}}(n^2 + 2n).$$

Afin de montrer le résultat de non-annulation 0.5, on doit dériver au plus m fois, compte tenu de la discussion précédente concernant les singularités de $\mathcal{P}$ par rapport aux variables ξ. La différentielle ainsi construite induira une équation pour la courbe entière $\varphi : \mathbf{C} \to X$ à condition que

$$\delta_n(d - n - 2) > n^2 + 2n. \tag{56}$$

• Conjointement avec la condition nécessaire pour produire la différentielle holomorphe $\mathcal{P}$ dans le paragraphe 3, l'inégalité (56) impose dans l'article [DMR10] la contrainte

$$d \geq 2^{n^5}. \tag{57}$$

Ceci marque la fin de notre survol de ce travail. Nous remarquons que la seule raison qui empêche les auteurs de [DMR10] de montrer l'hyperbolicité de X (et non pas « seulement » la dégénérescence des courbes entières) est l'absence de contrôle de la taille des singularités des coefficients p_α dans (2.1).

• Dans l'article [Dem12] que nous décrivons brièvement, J.-P. Demailly obtient une amélioration considérable du degré obtenu dans (57), que nous décrivons brièvement.

Soit $X \subset \mathbf{P}^N$ une sous-variété. On a déjà vu dans la démonstration du lemme 1.8 que le fibré vectoriel $T_X^\star \otimes \mathcal{O}(2)$ est engendré par ses sections globales. L'observation suivante est qu'un fibré vectoriel engendré par ses sections globales admet une métrique hermitienne telle que la forme de courbure associée soit positive au sens de Griffiths.

En conséquence, les résultats présentés dans le paragraphe 4 montrent qu'il suffit de satisfaire l'inégalité (52), avec des données qui sont les suivantes. La forme γ est la restriction à X de $2\omega_{FS}$, la forme de Fubini-Study et $A := \mathcal{O}(n^4 - 2n)$ (ce choix est dicté par l'ordre des pôles des champs de vecteurs construits dans le théorème 5.2). Ainsi, [Dem12] prouve que la conjecture de Green-Griffiths est vérifiée à partir du degré

$$d_n := \frac{n^4}{3}\big(n \log(n \log 24n)\big)^n.$$

Remarquons que dans l'article [DMR10] on doit écrire le fibré tautologique comme différence de fibrés nef *directement* sur la variété X_n, ce qui induit un manque de précision considérable et se traduit par une augmentation substantielle de la borne d_n.

• Y.-T. Siu annonce dans l'article [Siu12] *l'hyperbolicité* des hypersurfaces de grand degré de $\mathbf{P}^{n+1}$. En reprenant les notations du paragraphe 3, son idée est de montrer que les polynômes $(p_\alpha)_\alpha$ ne sont pas trop singuliers par restriction à X (comme nous l'avons vu dans ce paragraphe, ceci est une information cruciale, qui a un impact direct sur le nombre de fois que doivent dériver les différentielles holomorphes pour obtenir 0.5). Nous rappelons que pour chaque indice α on a $p_\alpha \in H^0\big(X, \mathcal{O}_X(\delta)\big)$, où $\delta \leq d^{\theta_0}$ est un entier positif, et l'assertion dans [Siu12] est que le degré δ sera une borne supérieure pour les singularités de $p_\alpha|_X$. En principe, il est très probable que cela soit ainsi, car X est générique. Cependant, cette affirmation nous semble loin d'être immédiate (ou banale), car les coefficients p_α des différentielles holomorphes construites dans [Siu12] *dépendent* de l'élément $a \in \mathbf{P}^{N_d}$ correspondant à X. Les arguments qu'il invoque dans sa démonstration sont actuellement en cours de vérification.

Remarque 5.3. — L'analyse des points base des différentielles holomorphes telle que décrite dans ce paragraphe fait intervenir des objets « extérieurs » à la variété X, notamment les champs de vecteurs obliques dans le théorème 5.2. Il serait plus que souhaitable de disposer d'une approche complémentaire pour cette partie de la preuve de la conjecture de Green-Griffiths relative au cas des hypersurfaces de $\mathbf{P}^{n+1}$.

Remarque 5.4 (communiquée par S. Diverio). — Remarquons pour finir qu'il n'est pas raisonnable d'espérer que l'abondance des différentielles holomorphes (théorème 0.5) dans le cas des hypersurfaces de l'espace projectif se produise pour *toutes* les variétés de type général. En effet, il existe des surfaces complexes S dont le revêtement universel est le bidisque, telles que $c_1^2 = 2c_2$ et qui ont la propriété suivante. Pour tout point $x \in S$ et pour tout $k \geq 1$ il existe un k-jet j_x de S en x qui se trouve dans l'ensemble des zéros de toute différentielle holomorphe d'ordre k et de degré arbitraire (ce résultat est à comparer avec le théorème de S. Lu, cf. [Lu91], compte tenu des propriétés des classes de Chern de S). Nous renvoyons le lecteur à l'article de S. Lang cf. [Lan86] ; une analyse détaillée des exemples dans cet article a été récemment faite dans [DR12].

RÉFÉRENCES

[BeKi10] Bérczi, G., Kirwan, F. – *A geometric construction for invariant jet differentials*, arXiv: 1012.1797, 42p.

[Blo26a] Bloch, A. – *Sur les systèmes de fonctions uniformes satisfaisant à l'équation d'une variété algébrique dont l'irrégularité dépasse la dimension*, J. Math. **5** (1926), 19–66.

[Blo26b] Bloch, A. – *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires*, Ann. Éc. Norm. Sup. **43** (1926), 309–362.

[Bog77] Bogomolov, F.A. – *Families of curves on a surface of general type*, Soviet Math. Dokl. **18** (1977), 1294–1297.

[Bog79] Bogomolov, F.A. – *Holomorphic tensors and vector bundles on projective varieties*, Math. USSR Izvestija **13/3** (1979), 499–555.

[Bro78] Brody, R. – *Compact manifolds and hyperbolicity*, Trans. Amer. Math. Soc. **235** (1978), 213–219.

[BrGr77] Brody, R., Green, M. – *A family of smooth hyperbolic surfaces in P3*, Duke Math. J. **44** (1977), 873–874.

[Bru02] Brunella, M. – *Courbes entières dans les surfaces algébriques complexes (d'après McQuillan, Demailly-El Goul,...)*, Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001, Exp. No. 881. Astérisque **282** (2002), 39–61.

[BKT12] Brunebarbe, Y., Klingler, B., Totaro, B. – *Symmetric differentials and the fundamental group*, arXiv:1204.6443.

[Car28] Cartan, H. – *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications*, Thèse, Paris. Ann. Éc. Norm. Sup. **45** (1928), 255–346.

[Cle86] Clemens, H. – *Curves on generic hypersurfaces*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **19** (1986), 629–636.

[Dem85] Demailly, J.-P. – *Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d''-cohomologie,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **35** (1985), 189–229.

[Dem95] Demailly, J.-P. – *Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials*, AMS Summer School on Algebraic Geometry, Santa Cruz 1995, Proc. Symposia in Pure Math., ed. by J. Kollár and R. Lazarsfeld, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1997), 285-360.

[Dem97] Demailly, J.-P. – *Variétés hyperboliques et équations différentielles algébriques*, Gaz. Math. **73** (juillet 1997), 3–23.

[Dem11] Demailly, J.-P. – *Holomorphic Morse Inequalities and the Green-Griffiths-Lang Conjecture*, Pure and Applied Math. Quarterly **7** (2011), 1165–1208.

[Dem12] Demailly, J.-P. – *Hyperbolic algebraic varieties and holomorphic differential equations*, texte disponible sur la page web de l'auteur, 2012.

[DLu01] Dethloff, G., Lu, S. – *Logarithmic jet bundles and applications*, Osaka J. Math. **38** (2001), 185–237.

[Div08] Diverio, S. – *Differential equations on complex projective hypersurfaces of low dimension*, Compos. Math. **144** (2008), 920–932.

[Div09] Diverio, S. – *Existence of global invariant jet differentials on projective hypersurfaces of high degree*, Math. Ann. **344** (2009), 293–315.

[DMR10] Diverio, S., Merker, J., Rousseau, E. – *Effective algebraic degeneracy*, Invent. Math. **180** (2010), 161–223.

[DR11] Diverio, S., Rousseau, E. – *A survey on hyperbolicity of projective hypersurfaces*, Series of lectures at IMPA, Rio de Janeiro, September 2010, arXiv:1107.1263, Publicações Matemáticas do IMPA. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2011.

[DR12] Diverio, S., Rousseau, E. – *Communication personnelle*, Octobre 2012.

[DT10] Diverio, S., Trapani, S. – *A remark on the codimension of the Green-Griffiths locus of generic projective hypersurfaces of high degree*, J. reine angew. Math. **649** (2010), 55-61.

[Dol81] Dolgachev, I. – *Weighted projective varieties*, Proceedings Polish-North Amer. Sem. on Group Actions and Vector Fields, Vancouver, 1981, J.B. Carrels editor, Lecture Notes in Math. **956**, Springer-Verlag (1982), 34–71.

[Ein88] Ein, L. – *Subvarieties of generic complete intersections*, Invent. Math. **94** (1988), 163–169.

[Ein91] Ein, L. – *Subvarieties of generic complete intersections II*, Math. Ann. **289** (1991), 465–471.

[Gher41] Gherardelli, G. – *Sul modello minimo della varieta degli elementi differenziali del 2 ordine del piano projettivo*, Atti Accad. Italia. Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (7) **2** (1941), 821–828.

[Grau89] Grauert, H. – *Jetmetriken und hyperbolische Geometrie*, Math. Zeitschrift **200** (1989), 149–168.

[Gr75] Green, M. – *Some Picard theorems for holomorphic maps to algebraic varieties*, Amer. J. Math. **97** (1975), 43–75.

[GG80] Green, M., Griffiths, P. – *Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings* The Chern Symposium 1979, Proc. Internal. Sympos. Berkeley, CA, 1979, Springer- Verlag, New York (1980), 41–74.

[Lan86] Lang, S. – *Hyperbolic and Diophantine analysis* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 14 (2) : 159-205, 1986.

[Kob70] Kobayashi, S. – *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*, Marcel Dekker, New York (1970).

[Kob76] Kobayashi, S. – *Intrinsic distances, measures and geometric function theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 357–416.

[Lu91] Lu, S.S.Y. – *On meromorphic maps into varieties of log-general type*, Proc. Symposia Pure Math. **52**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1991), 305–333.

[Merk09] Merker, J. – *Low pole order frames on vertical jets of the universal hypersurface*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **59** (2009), 1077–1104.

[Merk10] Merker, J. – *Complex projective hypersurfaces of general type : toward a conjecture of Green and Griffiths*, arXiv:1005.0405.

[Mey89] Meyer, P.-A. – *Qu'est-ce qu'une différentielle d'ordre n ?*, Expositiones Math. **7** (1989), 249–264.

[Nogu77] Noguchi, J. – *Holomorphic curves in algebraic varieties*, Hiroshima Math. J. **7** (1977), 833–853.

[Nogu81] Noguchi, J. – *Lemma on logarithmic derivatives and holomorphic curves in algebraic varieties*, Nagoya Math. J. **83** (1981), 213–233.

[Pac04] Pacienza, G. – *Subvarieties of general type on a general projective hypersurface*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), 2649–2661.

[Pa08] Păun, M. *Vector fields on the total space of hypersurfaces in the projective space and hyperbolicity*, Math. Ann. **340** (2008), 875–892.

[PacR] Pacienza G., Rousseau, E. – *On the logarithmic Kobayashi conjecture*, J. reine angew. Math. **611** (2007), 221–235.

[Rou06a] Rousseau, E. – *Équations différentielles sur les hypersurfaces de* $\mathbf{P}^4$, J. Math. Pures Appl. **86** (2006), 322–341.

[Rou06b] Rousseau, E. – *Étude des jets de Demailly-Semple en dimension 3*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), 397–421.

[Rou07a] Rousseau, E. – *Weak analytic hyperbolicity of generic hypersurfaces of high degree in* $\mathbf{P}^4$, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **16** (2007), 369–383.

[Rou07b] Rousseau, E. – *Weak analytic hyperbolicity of complements of generic surfaces of high degree in projective 3-space*, Osaka J. Math. **44** (2007), 955–971.

[Sak78] Sakai, F. – *Symmetric powers of the cotangent bundle and classification of algebraic varieties*, Algebraic geometry (Proc. Summer Meeting, Univ. Copenhagen, 1978), Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, vol. **732** (1979), 545–563.

[Semp54] Semple, J.G. – *Some investigations in the geometry of curves and surface elements*, Proc. London Math. Soc. (3) **4** (1954), 24–49.

[Siu97] Siu, Y.-T. – *A proof of the general Schwarz lemma using the logarithmic derivative lemma*, Letter to J.-P. Demailly, April 1997.

[Siu02] Siu, Y.-T. – *Some recent transcendental techniques in algebraic and complex geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002), Higher Ed. Press, Beijing (2002), 439–448.

[Siu04] Siu, Y.-T. – *Hyperbolicity in complex geometry. The legacy of Niels Henrik Abel*, Springer, Berlin (2004), 543–566.

[Siu12] Siu, Y.-T. – *Hyperbolicity of generic high-degree hypersurfaces in complex projective spaces*, arXiv:1209.2723.

[SY96a] Siu, Y.-T., Yeung, S.K. – *Hyperbolicity of the complement of a generic smooth curve of high degree in the complex projective plane*, Invent. Math. **124** (1996), 573–618.

[SY96b] Siu, Y.-T., Yeung, S.K. – *A generalized Bloch theorem and the hyperbolicity of the complement of an ample divisor in an abelian variety*, Math. Annalen, 1996.

[SY97] Siu, Y.-T., Yeung, S.K. – *Defects for ample divisors of Abelian varieties, Schwarz lemma and hyperbolic surfaces of low degree*, Amer. J. Math. **119** (1997), 1139–1172.

[Tra95] Trapani, S. – *Numerical criteria for the positivity of the difference of ample divisors*, Math. Z. **219** (1995), 387–401.

[Vois98] Voisin, C. – *On a conjecture of Clemens on rational curves on hypersurfaces*, J. Diff. Geom. **44** (1996), 200–213, Correction : J. Diff. Geom. **49** (1998), 601–611.

[Winkel] Winkelmann, J. – *On Brody and entire curves*, Bull. Soc. Math. France **135** (2007), 25–46.

Mihai PĂUN

Korea Institute for Advanced Study
School of Mathematics
85 Hoegiro, Dongdaemun-gu,
Seoul 130-722, Korea.
E-mail : `paun@kias.re.kr`