

L'ÉQUATION DE KARDAR-PARISI-ZHANG [d'après Martin Hairer]

par **Lorenzo ZAMBOTTI**

1. INTRODUCTION

Dans cet exposé, nous présentons les résultats de Martin Hairer [6] sur l'équation de KPZ (Kardar-Parisi-Zhang, à ne pas confondre avec la formule de Knizhnik-Polyakov-Zamolodchikov en gravité quantique, qui a été l'objet d'un Séminaire Bourbaki en mars 2012). Cette équation a été introduite en 1986 dans [8] pour décrire les fluctuations d'une interface dans un modèle de croissance aléatoire et a été ensuite reconnue comme un objet universel, censé être la limite d'échelle de nombreux modèles en mécanique statistique, comme les fluctuations du WASEP (weakly asymmetric simple exclusion process) [2], ou la fonction de partition de polymères dirigés en milieu aléatoire [7, 1] : voir [3] pour plus de résultats et détails dans ce contexte.

Formellement, l'équation de KPZ s'écrit

$$(1) \quad \partial_t h = \partial_x^2 h + (\partial_x h)^2 - \infty + \xi, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{S}^1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$

où $h = h(t, x)$ est une fonction continue aléatoire sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1$ et $\xi = \xi(t, x)$ est une distribution aléatoire sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1$ avec loi gaussienne (qui sera précisée ci-dessous). Il s'agit d'une équation parabolique non-linéaire avec un terme aléatoire, en d'autres termes d'une *équation aux dérivées partielles stochastique* (EDPS).

Dans le membre de droite de (1) on voit une constante infinie, dont le rôle est de renormaliser la non-linéarité quadratique, censée diverger car la solution h ne peut pas être différentiable en espace. L'équation de KPZ n'est en effet pas une EDPS standard ; paradoxalement, depuis une vingtaine d'années, on connaît un candidat explicite pour h , la solution de Cole-Hopf décrite ci-dessous, mais on ne sait pas prouver rigoureusement qu'il satisfait (1) ! Tous les résultats récents où intervient l'équation de KPZ sont en effet fondés sur la connaissance de cette solution explicite, pas sur la forme de l'équation qu'elle est censée résoudre.

Malheureusement cette approche a plusieurs défauts, notamment l'impossibilité de développer des méthodes robustes d'approximation de (1) et de montrer que des limites d'échelle d'objets discrets sont solutions de cette équation : cela a été accompli par exemple pour le WASEP car il est l'un des rares processus discrets à posséder une version discrète de la transformation de Cole-Hopf ; dès que ce miracle ne se produit pas, on est dans l'impasse.

Toutes les tentatives de donner une théorie d'existence et d'unicité pour les solutions de (1) sans passer par la transformation de Cole-Hopf ont jusque-là échoué. Le travail récent [6] résout ce problème et ouvre des perspectives passionnantes ; les deux problématiques principales, a priori non directement reliées à l'équation (1), sont les suivantes : 1) comment définir le produit d'une distribution (au sens de Schwartz) et d'une fonction de régularité très faible, et résoudre des EDP ou EDPS contenant de tels produits ; 2) comment prouver l'existence d'une classe, indexée par des arbres binaires, de fonctions polynomiales d'un champ aléatoire gaussien. Le premier problème est de nature analytique, et il est résolu avec la théorie des *chemins rugueux* ; le second est de nature probabiliste mais il requiert une étude combinatoire d'une classe de graphes associés, inspirés des *diagrammes de Feynman*.

Un aspect intrigant est que les résultats "à la Cole-Hopf" et ceux de Hairer restent à peu près orthogonaux, car il semble aujourd'hui impossible de prouver les uns dans le contexte des autres. Cependant les deux théories se développent actuellement très rapidement et on ne peut qu'attendre avec impatience les nouvelles avancées qui se préparent déjà.

2. PREMIERS PAS VERS KPZ

Le prototype d'EDPS est l'équation de la chaleur stochastique avec bruit additif :

$$(2) \quad \partial_t Y = \partial_x^2 Y + \xi, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{S}^1,$$

où $Y = Y_t(x)$ est une fonction continue aléatoire sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1$ et $\xi = \xi(t, x)$ est un bruit blanc en espace-temps, c'est-à-dire un champ aléatoire à valeurs dans les distributions sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1$ avec loi gaussienne centrée et fonction de corrélation

$$(3) \quad \mathbb{E}(\xi(x, t)\xi(y, s)) = \delta(x - y) \delta(t - s), \quad t, s \geq 0, x, y \in \mathbb{S}^1.$$

Par les propriétés des vecteurs gaussiens, $\xi(x, t)$ et $\xi(y, s)$ sont indépendants lorsque $(x, t) \neq (y, s)$. Une façon standard de construire un tel champ aléatoire consiste à considérer la base de Fourier $(e_k(\cdot))_{k \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{S}^1)$ et une suite indépendante de mouvements browniens réels $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}}$; on définit alors pour tous $t \geq 0$ et $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$

$$\int_{[0, t] \times \mathbb{S}^1} \psi(x) \xi(s, x) ds dx \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k B_k(t) \langle e_k, \psi \rangle,$$

où nous notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique dans $L^2(\mathbb{S}^1)$. On voit facilement que la série dans le terme de droite converge p.s. et que la fonction de corrélation de ξ est donnée par (3). Pour toute condition initiale $Y_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$, l'équation (2) a une unique solution explicite qui s'écrit par la méthode de variation des constantes

$$Y_t \stackrel{\text{def}}{=} P_t Y_0 + S_t, \quad S_t \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \int_0^t e^{-k^2(t-s)} dB_k(s) e_k = \int_0^t P_{t-s} \xi(s, \cdot) ds,$$

où $(P_t)_{t \geq 0}$ est le semigroupe de la chaleur sur \mathbb{S}^1 . La fonction $S = S_t(x)$ est appelée la *convolution stochastique* et il est bien connu [4] que presque sûrement elle admet une version dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+; \mathcal{C}^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\mathbb{S}^1))$ pour tout $\varepsilon > 0$ mais pas mieux.

Quand $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est une application lipschitzienne, on peut donner une théorie d'existence et unicité de solutions de l'EDPS non-linéaire

$$(4) \quad \partial_t X = \partial_x^2 X + f(X) + \xi, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{S}^1,$$

en s'appuyant sur la formulation *mild*

$$(5) \quad X_t = P_t X_0 + \int_0^t P_{t-s} f(X_s) ds + S_t$$

et sur une méthode de point fixe, voir par exemple [4]. La régularité de $X = X_t(x)$ est évidemment la même que celle de $S = S_t(x)$. On peut remarquer que tout l'aléa dans (5) est concentré dans S ; on peut donc considérer S comme une fonction continue générique, résoudre (5) pour tout $S \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1)$, montrer que l'application $S \mapsto X$ est mesurable et ensuite remplacer S par l'expression de la convolution stochastique donnée ci-dessus.

2.1. La solution à la Cole-Hopf

Comme nous l'avons vu pour (4), les solutions des EDPS avec bruit blanc en espace-temps ne sont pas plus que höldériennes en espace, donc le terme $(\partial_x h)^2$ dans (1) ne peut pas être défini de façon classique, et la constante infinie " ∞ " est censée renormaliser ce terme divergent. Une formulation *mild* comme (5) n'est pas possible pour KPZ.

Une autre justification de la nécessité d'une telle renormalisation du terme quadratique est donnée par la transformation de Cole-Hopf. Si l'on pose

$$(6) \quad \partial_t Z = \partial_x^2 Z + Z\xi, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{S}^1,$$

où $Z\xi$ est à interpréter comme une intégrale stochastique à la Ito donnée par

$$Z\xi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \langle e_k, Z \rangle e_k dB_k,$$

alors un résultat dû à Mueller [10] montre que p.s. $Z(t, x) > 0$ pour tous $t > 0, x \in \mathbb{S}^1$ si $Z(0, \cdot) > 0$; une application formelle de la formule d'Ito montre alors que $h \stackrel{\text{def}}{=} \log Z$ est une solution de KPZ. Pour justifier ce calcul formel, nous pouvons considérer une régularisation en espace ξ_ε de ξ , définie pour tous $t \geq 0$ et $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ par

$$(7) \quad \int_{[0,t] \times \mathbb{S}^1} \psi(x) \xi_\varepsilon(s, x) ds dx \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \varphi(\varepsilon k) B_k(t) \langle e_k, \psi \rangle,$$

où $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ est une fonction paire, régulière, décroissante sur \mathbb{R}_+ , avec support compact et telle que $\varphi(0) = 1$. Nous définissons alors Z_ε en remplaçant ξ par ξ_ε dans (6) et une application (cette fois-ci rigoureuse) de la formule d'Ito montre que $h_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \log Z_\varepsilon$ est solution classique de

$$(8) \quad \partial_t h_\varepsilon = \partial_x^2 h_\varepsilon + (\partial_x h_\varepsilon)^2 - C_\varepsilon + \xi_\varepsilon,$$

où $C_\varepsilon = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi^2(k\varepsilon) \approx \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(x) dx$. Puisque Z_ε converge vers Z et donc h_ε vers h , il est naturel de considérer $h = \log Z$ comme une solution de KPZ. Cependant le passage à la limite dans (8) reste impossible à cause du terme quadratique qui n'est pas bien défini à la limite et de la constante C_ε qui diverge lorsque $\varepsilon \downarrow 0$.

Pour les EDPS classiques comme (4), on se réduit à l'EDP (5) avec un terme aléatoire S et ensuite on applique une méthode "déterministe" de point fixe. Hairer a développé pour KPZ une version beaucoup plus sophistiquée de cette approche, en écrivant une équation différente mais équivalente à (8), où apparaît un nombre fini (cinq) de fonctions polynomiales du bruit sous-jacent ξ_ε et pour laquelle on peut écrire un problème de point fixe ; ensuite il montre que les (cinq) fonctions polynomiales convergent lorsque $\varepsilon \downarrow 0$ et que le problème de point fixe reste stable par ce passage à la limite. Plus précisément, il obtient

- un espace polonais \mathcal{X} ,
- une application $h : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1)$ continue,
- des variables aléatoires $\Psi_\varepsilon, \Psi \in \mathcal{X}$,

tels que presque sûrement $h(\Psi_\varepsilon)$ est la solution de l'équation régularisée (8), $h(\Psi)$ est la solution à la Cole-Hopf et $\Psi_\varepsilon \rightarrow \Psi$ dans \mathcal{X} . Une solution de KPZ est donc construite pour une classe générale de bruits ξ avec des propriétés de continuité dans une topologie appropriée. Cela donne une résolution *trajectorielle* de KPZ.

2.2. Processus indexés par des arbres binaires

Commençons par une étude de l'équation (8). La structure quadratique de la non-linéarité suggère une écriture de la solution comme une série indexée par l'ensemble \mathcal{T} des arbres binaires finis enracinés. Nous notons $\bullet \in \mathcal{T}$ l'arbre trivial contenant uniquement la racine ; si $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$, alors $\tau = [\tau_1, \tau_2]$ est la concaténation de τ_1 et τ_2 , c'est-à-dire que τ contient sa racine, à laquelle sont attachés τ_1 et τ_2 par les racines respectives. Nous définissons

$$(9) \quad \partial_t Y_\varepsilon^\bullet = \partial_x^2 Y_\varepsilon^\bullet + \xi_\varepsilon,$$

et pour tout $\tau = [\tau_1, \tau_2]$ avec $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$,

$$(10) \quad \partial_t Y_\varepsilon^\tau = \partial_x^2 Y_\varepsilon^\tau + \partial_x Y_\varepsilon^{\tau_1} \partial_x Y_\varepsilon^{\tau_2} - C_\varepsilon^\tau, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{S}^1,$$

où C_ε^τ est une constante qui devra être choisie de façon appropriée. Les conditions initiales de (9) et (10) sont telles que les processus

$$(11) \quad (\langle Y_{\varepsilon,t}^\tau, e_k \rangle, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})_{t \geq 0}, \quad \forall \tau \in \mathcal{T},$$

soient stationnaires, et $\langle Y_{\varepsilon,0}^\tau, e_0 \rangle = 0$ (ces choix ne sont pas les seuls possibles mais ils simplifient les calculs dans la preuve du théorème 2.1 ci-dessous). On voit alors facilement que la série formelle

$$(12) \quad h_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\tau} Y_\varepsilon^\tau$$

résout (formellement aussi) l'équation

$$\partial_t h_\varepsilon = \partial_x^2 h_\varepsilon + (\partial_x h_\varepsilon)^2 - \sum_{\tau} C_\varepsilon^\tau + \xi_\varepsilon,$$

c'est-à-dire l'équation (8) si $C_\varepsilon = \sum_{\tau} C_\varepsilon^\tau$. Le problème avec cette approche est que, pour $\varepsilon > 0$, la convergence de la série dans (12) est loin d'être évidente ; ensuite, même après avoir surmonté ce problème, on ne saurait pas montrer que h_ε converge quand $\varepsilon \downarrow 0$.

La stratégie adoptée par Hairer est différente : il effectue une troncature de la série dans (12), en cherchant des solutions de (8) sous la forme

$$(13) \quad h_\varepsilon = \sum_{\tau \in \bar{\mathcal{T}}} Y_\varepsilon^\tau + u_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} h_\varepsilon^* + u_\varepsilon, \quad \bar{\mathcal{T}} = \{\bullet, \mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{v}\},$$

et il prouve que

1. pour $\tau \in \bar{\mathcal{T}}$ il existe une constante C_ε^τ telle que Y_ε^τ converge en probabilité dans un espace de fonctions höldériennes (de régularité dépendant de τ) vers un processus Y^τ quand $\varepsilon \downarrow 0$;
2. le reste u_ε satisfait une équation pour laquelle il est possible de justifier un passage à la limite quand $\varepsilon \downarrow 0$ et on peut prouver que les limites possibles sont uniques et dépendent du bruit ξ de façon continue (dans une topologie appropriée).

2.3. Convergence de Y_ε^τ

Plus précisément, le point 1 est prouvé dans le

THÉORÈME 2.1. — *On définit*

$$\alpha_\bullet = \frac{1}{2}, \quad \alpha_{\mathbf{v}} = 1, \quad \alpha_{[\tau_1, \tau_2]} = (\alpha_{\tau_1} \wedge \alpha_{\tau_2}) + 1, \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}.$$

On pose $C_\varepsilon^\tau = 0$ si $\tau \in \mathcal{T} \setminus \{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}\}$ et

$$(14) \quad \begin{cases} C_\varepsilon^{\mathbf{v}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi^2(k\varepsilon) = C_\varepsilon, \\ C_\varepsilon^{\mathbf{w}} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} |\log \varepsilon| - 8 \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi'(y)\varphi(y)\varphi^2(y-x)\log y}{x^2 - xy + y^2} dx dy, \\ C_\varepsilon^{\mathbf{w}} = C_\varepsilon^{\mathbf{w}} = C_\varepsilon^{\mathbf{v}} = C_\varepsilon^{\mathbf{v}} = -\frac{C_\varepsilon^{\mathbf{w}}}{4}. \end{cases}$$

Avec ce choix des constantes C_ε^τ dans (10), pour tout $\tau \in \mathcal{T}$ le processus Y_ε^τ converge en probabilité dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\delta(\mathbb{S}^1))$, pour tout $\delta \in]0, \alpha_\tau[$, vers un processus Y^τ qui ne dépend pas de la fonction φ choisie pour régulariser le bruit ξ .

Nous discutons le théorème 2.1 dans la section 4 ci-dessous.

On remarque que, avec le choix (14), nous avons bien $C_\varepsilon = \sum_\tau C_\varepsilon^\tau$. En outre, par la symétrie de la fonction bilinéaire dans (10)

$$Y_\varepsilon^{\mathbf{w}} = Y_\varepsilon^{\mathbf{v}}, \quad Y_\varepsilon^{\mathbf{v}} = Y_\varepsilon^{\mathbf{w}} = Y_\varepsilon^{\mathbf{v}} = Y_\varepsilon^{\mathbf{w}}.$$

On peut donc restreindre l'étude à Y_ε^τ pour $\tau \in \bar{\mathcal{T}}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\bullet, \mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}\}$. Le résultat de convergence des processus Y_ε^τ inclut le tableau suivant sur la régularité en espace des processus limites Y^τ pour $\tau \in \mathcal{T}$

$$(15) \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline Y^\tau & Y^\bullet & Y^{\mathbf{v}} & Y^{\mathbf{w}} & Y^{\mathbf{w}} & Y^{\mathbf{v}} & Y^{[\bullet, \tau]} & Y^\tau, \tau \notin \bar{\mathcal{T}}_0 \\ \hline \alpha_\tau & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \geq \frac{3}{2} \\ \hline \end{array}$$

où l'on rappelle que $Y^\tau \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\delta(\mathbb{S}^1))$, pour tout $\delta < \alpha_\tau$. En particulier

1. Le processus racine Y^\bullet est le moins régulier, avec $\alpha_\bullet = 1/2$.
2. Si $\tau \notin \{\bullet, \vee\}$, alors $\alpha_\tau \geq 3/2$ et Y^τ est donc continûment différentiable en espace.

2.4. L'équation satisfaite par le reste

Nous introduisons la notation

$$\bar{Y}_\varepsilon^\tau \stackrel{\text{def}}{=} \partial_x Y_\varepsilon^\tau, \quad \tau \in \mathcal{T}.$$

Par des simples manipulations algébriques, on voit que si h_ε doit résoudre (8) et h_ε^* est défini par (13), alors il faut et il suffit que $u_\varepsilon = h_\varepsilon - h_\varepsilon^*$ résolve

$$(16) \quad \partial_t u_\varepsilon = \partial_x^2 u_\varepsilon + 2\bar{Y}_\varepsilon^\bullet (\partial_x u_\varepsilon + \bar{Y}_\varepsilon^\vee + 4\bar{Y}_\varepsilon^{\times\vee}) + (\partial_x u_\varepsilon)^2 + 2\partial_x u_\varepsilon \partial_x \bar{h}_\varepsilon^* + \bar{\mathcal{R}}_\varepsilon^*,$$

où

$$(17) \quad \bar{h}_\varepsilon^* \stackrel{\text{def}}{=} h_\varepsilon^* - Y_\varepsilon^\bullet = \sum_{\tau \in \bar{\mathcal{T}} \setminus \{\bullet\}} Y_\varepsilon^\tau, \quad \bar{\mathcal{R}}_\varepsilon^* = \sum_{\substack{\tau, \kappa \in \bar{\mathcal{T}} \setminus \{\bullet\} \\ [\tau, \kappa] \notin \bar{\mathcal{T}}} \bar{Y}_\varepsilon^\tau \bar{Y}_\varepsilon^\kappa.$$

Par le tableau de régularité (15), on voit que (16) contient un terme $\bar{Y}_\varepsilon^\bullet$, dérivée en espace d'une fonction $\mathcal{C}^{\frac{1}{2}}$. Nous avons donc besoin d'introduire des espaces de régularité höldérienne négative : si $\alpha \in]0, 1[$ on définit $\mathcal{C}^{-\alpha} = \mathcal{C}^{-\alpha}([0, 2\pi])$ comme la complétion de \mathcal{C} par rapport à la norme $\|f\|_{\mathcal{C}^{-\alpha}} \stackrel{\text{def}}{=} \|F\|_{\mathcal{C}^{1-\alpha}}$ où F est une primitive de f . On rappelle la

PROPOSITION 2.2. — *Soient $\alpha \in (0, 1)$ et $\beta > \alpha$. L'application bilinéaire $(u, v) \mapsto uv$ admet une extension continue de $\mathcal{C}^{-\alpha} \times \mathcal{C}^\beta$ dans $\mathcal{C}^{-\alpha}$.*

Par le théorème 2.1, la proposition 2.2 et le tableau de régularité (15), quand $\varepsilon \downarrow 0$, le couple $(\bar{\mathcal{R}}_\varepsilon^*, \bar{h}_\varepsilon^*)$ converge vers $(\bar{\mathcal{R}}^*, \bar{h}^*)$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^{-\beta} \times \mathcal{C}^{-\beta})$ pour tout $\beta > 0$. Le terme le moins régulier dans (16) est $\bar{Y}_\varepsilon^\bullet$, qui converge dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^{-\gamma})$ pour tout $\gamma > 1/2$; on s'attend alors à ce que u_ε puisse converger dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\alpha)$ pour tout $\alpha < 3/2$, car le semigroupe de la chaleur permet de gagner deux dérivées spatiales. Malheureusement, on ne peut pas prouver la convergence du produit $\bar{Y}_\varepsilon^\bullet \partial_x u_\varepsilon$ de façon classique quand $\varepsilon \downarrow 0$, car pour appliquer la proposition 2.2 on aurait besoin de $\alpha > 3/2$. De même, la proposition 2.2 permet de traiter le produit $\bar{Y}_\varepsilon^\bullet \bar{Y}_\varepsilon^\vee$ mais pas $\bar{Y}_\varepsilon^\bullet \bar{Y}_\varepsilon^{\times\vee}$ quand $\varepsilon \downarrow 0$.

La solution utilisée par Hairer consiste à prouver que les processus Y_ε^τ et u_ε convergent en un sens plus fort que dans des espaces de fonctions höldériennes (voir le théorème 3.2 ci-dessous pour une formulation précise). Pour expliquer cela, nous avons besoin d'une manipulation supplémentaire de l'équation (16). En notant $v_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \partial_x u_\varepsilon$, (16) devient

$$(18) \quad \partial_t v_\varepsilon = \partial_x^2 v_\varepsilon + \partial_x (\bar{Y}_\varepsilon^\bullet v'_\varepsilon) + \partial_x F_\varepsilon(v_\varepsilon, t),$$

où nous posons

$$(19) \quad v'_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} 2 \left(v_\varepsilon + \bar{Y}_\varepsilon^\vee + 4\bar{Y}_\varepsilon^{\times\vee} \right), \quad F_\varepsilon(v_\varepsilon, t) \stackrel{\text{def}}{=} v_\varepsilon^2 + 2v_\varepsilon \partial_x \bar{h}_\varepsilon^* + \bar{\mathcal{R}}_\varepsilon^*.$$

Par les arguments précédents, on s'attend à ce que, quand $\varepsilon \downarrow 0$, v'_ε puisse converger dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^{\bar{\alpha}})$ pour $\bar{\alpha} < 1/2$, et que la non-linéarité F_ε ne pose pas de problèmes. Par (18) nous obtenons donc que v_ε peut être étudié comme une perturbation du processus Φ_ε , solution de

$$(20) \quad \partial_t \Phi_\varepsilon = \partial_x^2 \Phi_\varepsilon + \partial_x^2 Y_\varepsilon^\bullet.$$

Si on est capable de montrer que, quand $\varepsilon \downarrow 0$, $\Phi_\varepsilon \partial_x Y_\varepsilon^\bullet$ converge vers une distribution et si v_ε est localement comparable à Φ_ε uniformément en ε , alors on peut espérer pouvoir donner un sens à l'expression $v \partial_x Y^\bullet$. Ceci est effectivement possible grâce à la théorie des chemins rugueux que l'on va présenter ci-dessous.

3. FORMULATION RIGOUREUSE DE KPZ

Dans cette section nous discutons comment le résultat du théorème 2.1 permet de donner une résolution trajectorielle de l'équation (1) de KPZ.

3.1. Chemins rugueux

Le but est de donner une extension de la proposition 2.2 à des cas où $\beta \leq \alpha$: en d'autres termes, de définir une distribution produit uv quand u est une distribution et v est une fonction avec régularité faible. Une approche possible est donnée par les *rough paths* (chemins rugueux), une théorie initiée par Terry Lyons [9] et développée ensuite par plusieurs auteurs ; nous présentons rapidement ici une approche due à Massimiliano Gubinelli [5] et utilisée par Hairer.

Soient $I = [a, b]$ un intervalle compact, $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta} \in]0, 1[$, tels que

$$\bar{\alpha} \leq \alpha, \quad \bar{\beta} \leq \beta, \quad (\alpha + \bar{\beta}) \wedge (\bar{\alpha} + \beta) > 1.$$

Le cas intéressant est celui où $\alpha < 1/2$, et donc $\bar{\beta} > 1/2$, car sinon on est dans le contexte de la proposition 2.2. Soit \mathcal{Y} l'espace des quintuplets $(Y, \Phi, \mathbf{Y}, v, v')$ tels que $Y, \Phi, v \in \mathcal{C}^\alpha(I)$, $\mathbf{Y} \in \mathcal{C}^\beta(I \times I)$, $v' \in \mathcal{C}^{\bar{\alpha}}(I)$, satisfaisant la relation algébrique

$$(21) \quad \mathbf{Y}(x, z) - \mathbf{Y}(x, y) - \mathbf{Y}(y, z) = \delta Y(x, y) \delta \Phi(y, z), \quad \forall x, y, z \in I,$$

et tels que $R \in \mathcal{C}^{\bar{\beta}}(I \times I)$, où

$$(22) \quad R(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \delta v(x, y) - v'(x) \delta \Phi(x, y), \quad \forall x, y \in I,$$

et nous utilisons la notation

$$\delta v(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} v(y) - v(x).$$

La relation (21) est satisfaite si Y est régulier et l'on pose

$$\mathbf{Y}(x, y) = \int_x^y \delta \Phi(x, z) dY(z), \quad x, y \in I.$$

La relation (22) dit que localement v est comparable à un multiple de Φ , modulo un *reste* R plus régulier que v car $\bar{\beta} > \alpha$; la fonction v' est interprétée comme une sorte de *dérivée*. Suivant la terminologie de Gubinelli, on interprète (22) en disant que (v, v') est un *chemin contrôlé par Φ* . La fonction \mathbf{Y} est liée à l'*aire de Lévy* sur l'intervalle $[x, y]$ du vecteur (Φ, Y) . Nous avons alors le résultat suivant

PROPOSITION 3.1. — *L'application*

$$(Y, \Phi, \mathbf{Y}, v, v') \mapsto \left(Y, \Phi, \mathbf{Y}, \int_0^\cdot v dY, v \right),$$

définie sur les éléments réguliers de \mathcal{Y} , a une extension unique à une application continue $\mathcal{I}: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$, que nous notons

$$(23) \quad \mathcal{I}: (Y, \Phi, \mathbf{Y}, v, v') \mapsto \left(Y, \Phi, \mathbf{Y}, \int_0^\cdot v dY, v \right),$$

par rapport à la norme naturelle

$$(24) \quad \|(Y, \Phi, \mathbf{Y}, v, v')\|_{\mathcal{Y}} = \|Y\|_{\alpha} + \|\Phi\|_{\alpha} + \|\mathbf{Y}\|_{\beta} + \|v'\|_{\bar{\alpha}} + \|R\|_{\bar{\beta}}.$$

Cette proposition permet donc de définir une distribution produit $vu = v dY$ dans un cadre plus général que dans la proposition 2.2. L'intégrale généralisée $\int_0^\cdot v dY$ définie dans (23) est appelée *intégrale rugueuse* (ou *rough integral*).

Les chemins rugueux ont été introduits pour étudier des équations différentielles contenant les dérivées distributionnelles *en temps* de processus höldériens ; l'idée d'appliquer cette théorie à des distributions *en espace* est plus récente et, dans le cas des EDPS, due à Hairer aussi.

3.2. Retour à KPZ régularisé

Pour traiter la convergence de v_ε dans (18) lorsque $\varepsilon \downarrow 0$, nous allons utiliser la proposition 3.1 et en particulier la continuité de l'application \mathcal{I} . Pour cela, nous avons besoin de construire un processus $(Y_{\varepsilon,t}, \Phi_{\varepsilon,t}, \mathbf{Y}_{\varepsilon,t}, v_{\varepsilon,t}, v'_{\varepsilon,t})_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathcal{Y} et montrer sa convergence par rapport à la norme (24). En utilisant les définitions (19) et (20) on définit le processus aire

$$\mathbf{Y}_{\varepsilon,t}(x, y) = \int_x^y \delta \Phi_{\varepsilon,t}(x, z) dY_{\varepsilon,t}^\bullet(z), \quad x, y \in \mathbb{S}^1.$$

On a alors $(Y_\varepsilon^\bullet, \Phi_\varepsilon, \mathbf{Y}_\varepsilon, v_\varepsilon, v'_\varepsilon) \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{Y})$. L'un des résultats principaux de l'article de Hairer, qui renforce le théorème 2.1 aussi, est le suivant

THÉORÈME 3.2. — *Soient dans la définition de \mathcal{Y}*

$$\alpha = \frac{1}{2} - \kappa, \quad \beta = 2\alpha, \quad \bar{\alpha} = 3\kappa, \quad \bar{\beta} = \frac{1}{2} + 2\kappa$$

pour un $\kappa > 0$ petit. Quand $\varepsilon \downarrow 0$

1. $(Y_\varepsilon^\bullet, \Phi_\varepsilon, \mathbf{Y}_\varepsilon, v_\varepsilon, v'_\varepsilon)$ converge en probabilité vers un processus $(Y^\bullet, \Phi, \mathbf{Y}, v, v')$ dans $\mathcal{C}([0, T]; \mathcal{Y})$
2. $(Y_\varepsilon^\bullet, \Phi_\varepsilon, \mathbf{Y}_\varepsilon, \bar{Y}_\varepsilon^{\times\vee}, \bar{Y}_\varepsilon^{\vee})$ converge en probabilité vers un processus $(Y^\bullet, \Phi, \mathbf{Y}, \bar{Y}^{\times\vee}, \bar{Y}^{\vee})$ dans $\mathcal{C}([0, T]; \mathcal{Y})$.

En particulier, $\bar{Y}^{\times\vee}$ est contrôlé en espace par Φ avec dérivée \bar{Y}^{\vee} et reste R^{\vee} . Ce résultat, grâce à la proposition 3.1, permet de traiter la convergence des termes $\bar{Y}_\varepsilon^\bullet v_\varepsilon$ et $\bar{Y}_\varepsilon^\bullet \bar{Y}_\varepsilon^{\times\vee}$ dans (18).

3.3. Formulation précise de KPZ

Nous rappelons que le but est de donner une résolution trajectorielle de KPZ, c'est-à-dire de trouver un espace polonais \mathcal{X} , une application $h : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1)$ continue, et des variables aléatoires $\Psi_\varepsilon, \Psi \in \mathcal{X}$, tels que presque sûrement $h(\Psi_\varepsilon)$ est la solution de (8), $h(\Psi)$ est la solution de Cole-Hopf et $\Psi_\varepsilon \rightarrow \Psi$ dans \mathcal{X} . Nous fixons d'abord des notations, motivées par les arguments des pages précédentes.

1. Pour $\bar{\mathcal{T}} = \{\bullet, \mathbf{v}, \mathbb{V}, \mathbb{V}, \mathbb{V}, \mathbb{V}, \mathbb{V}, \mathbb{V}, \mathbb{V}\}$ nous définissons

$$\alpha_\bullet = \frac{1}{2}, \quad \alpha_{\mathbf{v}} = 1, \quad \alpha_{[\tau_1, \tau_2]} = (\alpha_{\tau_1} \wedge \alpha_{\tau_2}) + 1, \quad \tau_1, \tau_2 \in \bar{\mathcal{T}},$$

et les espaces polonais $\mathcal{X}_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{\delta \in]0, \alpha_\tau[} \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\delta(\mathbb{S}^1))$ avec les semi-normes naturelles.

2. Pour $\bar{\mathcal{T}}_0 = \{\bullet, \mathbf{v}, \mathbb{V}, \mathbb{V}, \mathbb{V}\}$, nous définissons

$$(25) \quad \mathcal{W} = \left(\bigoplus_{\tau \in \bar{\mathcal{T}}_0} \mathcal{X}_\tau \right) \oplus \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^{\frac{3}{4}}([0, 2\pi]^2)) \oplus \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^{\frac{3}{4}}([0, 2\pi]^2)),$$

et nous notons $\Psi = ((Y^\tau)_{\tau \in \bar{\mathcal{T}}_0}, \mathbf{Y}, R^{\mathbb{V}}) \in \mathcal{W}$. Si $\tau \in \{\mathbb{V}, \mathbb{V}, \mathbb{V}, \mathbb{V}\}$, alors Y^τ est défini par

$$Y^{\mathbb{V}} = Y^{\mathbb{V}}, \quad Y^{\mathbb{V}} = Y^{\mathbb{V}} = Y^{\mathbb{V}} = Y^{\mathbb{V}}.$$

3. L'espace $\mathcal{X} \subset \mathcal{W}$ est la sous-variété algébrique définie par les relations

$$\begin{cases} \partial_t \Phi = \partial_x^2 \Phi + \partial_x^2 Y^\bullet \\ \mathbf{Y}(x, z) - \mathbf{Y}(x, y) - \mathbf{Y}(y, z) = \delta Y^\bullet(x, y) \delta \Phi(y, z), & \forall x, y, z \in [0, 2\pi] \\ R_t^{\mathbb{V}}(x, y) = \delta \bar{Y}_t^{\mathbb{V}}(x, y) - \bar{Y}_t^{\mathbb{V}}(x) \delta \Phi_t(x, y), & \forall x, y \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

où $\delta v(x, y) = v(y) - v(x)$.

4. Nous définissons

$$\bar{h}^* = \sum_{\tau \in \bar{\mathcal{T}} \setminus \{\bullet\}} Y^\tau, \quad h^* = \bar{h}^* + Y^\bullet, \quad \bar{\mathcal{R}}^* = \sum_{\substack{\tau, \kappa \in \bar{\mathcal{T}} \setminus \{\bullet\} \\ [\tau, \kappa] \notin \bar{\mathcal{T}}}} \bar{Y}^\tau \bar{Y}^\kappa.$$

5. Pour tout $\Psi = ((Y^\tau)_{\tau \in \bar{\mathcal{T}}_0}, \mathbf{Y}, R^{\mathbb{V}}) \in \mathcal{X}$ nous définissons l'espace $\mathcal{B}_{\Psi, T}$ des triplets

$$(v, v', R^v) = (v_t(x), v'_t(x), R_t^v(x, y))_{t \in [0, T], x, y \in \mathbb{S}^1}$$

tels que

$$R_t^v(x, y) = \delta v_t(x, y) - v'_t(x) \delta \Phi_t(x, y).$$

L'espace $\mathcal{B}_{\Psi, T}$ est muni d'une distance induite par une norme höldérienne que nous n'explicitons pas et qui le rend polonais.

Avec ces définitions, nous pouvons écrire une équation dont seront solutions les limites h de h_ε quand $\varepsilon \downarrow 0$. Pour tout $\Psi = ((Y^\tau)_{\tau \in \bar{\mathcal{T}}_0}, \mathbf{Y}, R^{\mathbb{V}}) \in \mathcal{X}$, on aura

$$(26) \quad h = h^* + u,$$

avec $v \stackrel{\text{def}}{=} \partial_x u$ solution de l'équation obtenue en passant à la limite dans (18)

$$(27) \quad \begin{cases} \partial_t v = \partial_x^2 v + 2 \partial_x \left(\bar{Y}^\bullet (v + \bar{Y}^\Psi + 4 \bar{Y}^{\Psi^\times}) \right) + \partial_x (v^2 + 2 v \partial_x \bar{h}^* + \bar{\mathcal{R}}^*), \\ v_0 = \partial_x (h_0 - h_0^*) \end{cases}$$

où les produits $\bar{Y}^\bullet v$ et $\bar{Y}^\bullet \bar{Y}^{\Psi^\times}$ sont les dérivées distributionnelles en espace des intégrales rugueuses définies à l'aide de la proposition 3.1 ; la moyenne spatiale m_t de $u_t(\cdot)$ est récupérée en intégrant par rapport à x et en passant à la limite dans (16)

$$(28) \quad \partial_t m = 2 \int_{\mathbb{S}^1} \left(v_t(z) + \bar{Y}_t^\Psi(z) + 4 \bar{Y}_t^{\Psi^\times}(z) \right) d\bar{Y}_t^\bullet(z) + \int_{\mathbb{S}^1} \left((v_t)^2 + 2 v_t \partial_x \bar{h}_t^* + \bar{\mathcal{R}}_t^* \right) dz.$$

L'un des résultats principaux de l'article de Hairer est le suivant

THÉORÈME 3.3. — *Soit $\beta \in]0, 1/2[$.*

1. *Pour tout $\Psi \in \mathcal{X}$ et tout $h_0 \in \mathcal{C}^\beta(\mathbb{S}^1)$ il existe $T_* = T_*(h_0, \Psi) > 0$ tel que (27) a une et une seule solution $v = v(h_0, \Psi)$ dans \mathcal{B}_{Ψ, T_*} .*
2. *Pour tout $\Psi \in \mathcal{X}$, $h_0 \in \mathcal{C}^\beta$ et $T < T_*(h_0, \Psi)$, il y a un voisinage U de (h_0, Ψ) dans $\mathcal{C}^\beta \times \mathcal{X}$ tel que l'application $U \ni (\hat{h}_0, \hat{\Psi}) \mapsto h \in \mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{S}^1)$ est continue, où h est défini par (26), (27), (28).*

Le théorème 3.3 donne existence et unicité d'une solution locale en temps : cette restriction vient du fait que l'on écrit un problème de point fixe $v = \mathcal{M}_T(v)$ dans $\mathcal{B}_{\Psi, T}$, et l'application \mathcal{M}_T est une contraction si $T > 0$ est suffisamment petit. Nous remarquons que pour tout $(v, v', R^v) \in \mathcal{B}_{\Psi, T}$, (v, v') est un processus (en temps) à valeurs dans les chemins (en espace) contrôlés par Φ ; c'est donc dans cette classe que la dérivée v du reste u (26) prend naturellement ses valeurs.

Dans le cas de KPZ avec bruit blanc en espace-temps (1), nous obtenons une réalisation de la solution de Cole-Hopf $h = \log Z$ comme un système dynamique aléatoire avec des bonnes propriétés de continuité par rapport au bruit (dans une topologie appropriée). Puisque presque sûrement la solution de Cole-Hopf est définie sur tout \mathbb{R}_+ , l'on obtient en particulier que p.s. $T_* = +\infty$ dans ce cas.

4. CONSTRUCTION DES PROCESSUS Y^τ

Dans cette section nous allons expliquer les grandes lignes de la preuve du théorème 2.1 sur la convergence de Y_ε^τ vers un processus Y^τ pour tout $\tau \in \mathcal{T}$. Nous remarquons d'abord que Y_ε^\bullet défini dans (9) est un processus gaussien car fonction affine du champ gaussien ξ_ε . Plus généralement, pour tout $\tau \in \mathcal{T}$, la construction récursive (10) montre que Y_ε^τ est une fonction polynomiale de ξ_ε , de degré égal au nombre des feuilles de τ .

Nous définissons l'opérateur Π_0 de projection sur les constantes dans $L^2(\mathbb{S}^1)$ et $\Pi_0^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \text{Id} - \Pi_0$. La preuve de la convergence de Y_ε^τ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$ est divisée en deux étapes : d'abord on considère le processus centré $X_\varepsilon^\tau \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_0^\perp Y_\varepsilon^\tau$, et ensuite on montre la convergence de la

moyenne spatiale $\Pi_0 Y_\varepsilon^\tau$. Puisque les processus X_ε^τ sont stationnaires (voir (11) ci-dessus) on peut les réaliser comme processus indexés par $t \in \mathbb{R}$: $X_\varepsilon^\tau = (X_{\varepsilon,t}^\tau)_{t \in \mathbb{R}}$.

La preuve de la convergence de X_ε^τ est fondée sur une étude des coefficients de Fourier en espace : on pose pour $\tau \in \mathcal{T}$ et $t \in \mathbb{R}$

$$X_{\varepsilon,k}^\tau(t) \stackrel{\text{def}}{=} \langle X_\varepsilon^\tau(t), e_k \rangle, \quad \bar{X}_{\varepsilon,k}^\tau(t) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \partial_x X_\varepsilon^\tau(t), e_k \rangle, \quad k \in \mathbb{Z},$$

où $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est la base de Fourier de $L^2(\mathbb{S}^1)$. Pour obtenir la convergence de X_ε^τ dans un espace de fonction höldériennes, il suffit de montrer la convergence des coefficients de Fourier et une estimation uniforme en $\varepsilon > 0$ de leur comportement asymptotique quand $|k| \rightarrow \infty$.

Dans le cas particulier $\tau = \bullet$ on voit facilement que par le choix (7) de la régularisation du bruit, pour tout $k \neq 0$, l'on a simplement $\bar{X}_{\varepsilon,k}^\bullet = \varphi(\varepsilon k) \bar{X}_k^\bullet$ où

$$(29) \quad \mathbb{E}(\bar{X}_k^\bullet(s) \bar{X}_\ell^\bullet(t)) = \delta_{k,-\ell} \exp(-k^2|t-s|), \quad k, \ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

En particulier, $(\bar{X}_k^\bullet)_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ est une suite indépendante de processus d'Ornstein-Uhlenbeck stationnaires. Dans le cas général on obtient à partir des équations (9) et (10) des relations de récurrence pour ces familles de coefficients de Fourier. Par exemple pour $k \neq 0$

$$\begin{aligned} X_{\varepsilon,k}^\vee(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-k^2(t-s)} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \bar{X}_{\varepsilon,\ell}^\bullet(s) \bar{X}_{\varepsilon,k-\ell}^\bullet(s) ds \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \varphi(\varepsilon \ell) \varphi(\varepsilon(k-\ell)) \int_{-\infty}^t e^{-k^2(t-s)} \bar{X}_\ell^\bullet(s) \bar{X}_{k-\ell}^\bullet(s) ds \end{aligned}$$

et plus généralement

$$(30) \quad X_{\varepsilon,k}^{[\tau_1, \tau_2]}(t) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^t e^{-k^2(t-s)} \bar{X}_{\varepsilon,\ell}^{\tau_1}(s) \bar{X}_{\varepsilon,k-\ell}^{\tau_2}(s) ds, \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}.$$

Par itération de (30) on obtient une expression pour $X_{\varepsilon,k}^\tau(t)$ en fonction seulement des coefficients de Fourier $(\bar{X}_{\varepsilon,\ell}^\tau(s))_{\ell \in \mathbb{Z}, s \leq t}$ de l'arbre racine et donc de $(\bar{X}_\ell^\tau(s))_{\ell \in \mathbb{Z}, s \leq t}$, qui forment une famille gaussienne pour laquelle le calcul des covariances se fait à l'aide du Théorème de Wick :

PROPOSITION 4.1. — *Soit $(X_\alpha)_{\alpha \in T}$ une famille finie de variables centrées et conjointement gaussiennes. Alors*

$$\mathbb{E}\left(\prod_{\alpha \in T} X_\alpha\right) = \sum_{P \in \mathcal{P}(T)} \prod_{\{\alpha, \beta\} \in P} \mathbb{E}(X_\alpha X_\beta),$$

où $\mathcal{P}(T)$ est l'ensemble des appariements de T , i.e. des partitions de T en couples.

Cependant la complexité des expressions que l'on obtient pour $X_{\varepsilon,k}^\tau(t)$ par itération de (30) augmente rapidement avec la taille de l'arbre, et une approche naïve de l'étude du comportement asymptotique en k est destinée à échouer. Hairer a développé avec un algorithme combinatoire un critère de "sommabilité" fondé sur une méthode inspirée des diagrammes de Feynman en théorie des champs, que nous allons présenter.

4.1. Arbres étiquetés

Nous fixons un arbre $\tau \in \mathcal{T} \setminus \{\bullet\}$, par exemple $\tau = \forall$. La brique de base pour l'étude de $X_{\varepsilon,k}^\tau(t)$ est le choix d'un étiquetage des arêtes de τ par des entiers non-nuls $\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et d'un étiquetage des sommets qui ne sont pas des feuilles par des réels $s \leq t$: cela correspond aux variables de sommation et intégration nécessaires dans les formules de type (30).

Les entiers sur les arêtes doivent satisfaire la version suivante de la loi des nœuds de Kirchhoff : pour tout sommet v qui ne soit ni la racine ni une feuille, la somme des étiquettes des arêtes qui relient v à ses deux enfants doit être égale à l'étiquette de l'arête reliant v à son parent ; cette règle s'explique par le fait que dans (30) nous avons à gauche un coefficient de paramètre k et à droite une somme de produits de coefficients de paramètres $(\ell, k - \ell)$. La somme des étiquettes sortant de la racine ϱ est égale au paramètre k du coefficient que l'on est en train d'étudier. On appelle \mathcal{L}^τ les étiquetages des arêtes de τ satisfaisant ces règles ; par exemple

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \begin{array}{l} -1 \quad 4 \\ 3 \quad 1 \end{array} \in \mathcal{L}^\forall, \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \begin{array}{l} 2 \quad 4 \\ 2 \quad 1 \end{array} \notin \mathcal{L}^\forall.$$

Pour un étiquetage $L \in \mathcal{L}^\tau$ nous notons $\varrho(L)$ la somme des étiquettes sortant de la racine ϱ .

On note $\ell(\tau)$ l'ensemble des feuilles de τ et $i(\tau)$ l'ensemble des sommets internes (c'est-à-dire qui ne sont pas des feuilles). En utilisant l'ordre canonique \leq dans l'arbre enraciné τ , on note \mathcal{T}^τ l'ensemble de tous les étiquetages assignant à chaque sommet $v \in i(\tau)$ un réel $T_v \in \mathbb{R}$ avec la contrainte $T_v \leq T_{\bar{v}}$ si $\bar{v} \leq v$. On note enfin μ_t^τ la restriction de la mesure de Lebesgue au sous-ensemble \mathcal{T}_t^τ de \mathcal{T}^τ défini par $\{T_\varrho \leq t\}$. Dans le cas spécial $\tau = \bullet$, on note $\mathcal{T}_\bullet = \mathcal{T}^\bullet = \{0\}$ et $\mu_\bullet = \delta_0$. Ces étiquettes réelles correspondent aux variables d'intégration en temps dans les relations obtenues à partir de (30).

Toutes ces notations permettent de donner une formule générale pour $X_{\varepsilon,k}^\tau(t)$ en fonction seulement des coefficients de Fourier $(\bar{X}_\ell^\tau(s))_{\ell \in \mathbb{Z}, s \leq t}$ de l'arbre racine :

PROPOSITION 4.2. — *Pour tout $\tau \in \mathcal{T} \setminus \{\bullet\}$ et $k \neq 0$*

$$(31) \quad X_{\varepsilon,k}^\tau(t) = \sum_{\substack{L \in \mathcal{L}^\tau \\ \varrho(L)=k}} C_\varepsilon(L) \int_{\mathcal{T}_t^\tau} Z_L^\tau(t, T) \mu_t^\tau(dT),$$

où, en notant $\hat{i}(\tau) = i(\tau) \setminus \{\varrho\}$, v_\downarrow le parent de v , $e(v)$ l'arête (v, v_\downarrow) , $\delta T_e = T_v - T_u$ pour une arête $e = (u, v)$,

$$(32) \quad Z_L^\tau(t, T) = e^{-\varrho(L)^2(t-T_\varrho)} \left(\prod_{v \in \hat{i}(\tau)} i L_{e(v)} e^{-L_{e(v)}^2 |\delta T_{e(v)}|} \right) \left(\prod_{v \in \ell(\tau)} \bar{X}_{L_{e(v)}}^\tau(T_{v_\downarrow}) \right),$$

et

$$C_\varepsilon(L) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{v \in \ell(\tau)} \varphi(\varepsilon L_{e(v)}).$$

On peut comparer (31)-(32) à un exemple pour $\tau = \forall$:

$$X_{\varepsilon, k}^{\forall}(t) = \sum_{\ell+m+p=k} \varphi(\varepsilon(k-\ell)) \varphi(\varepsilon m) \varphi(\varepsilon p) \cdot \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s e^{-k^2(t-s)-(k-\ell)^2(s-r)} i(k-\ell) \bar{X}_{\ell}^{\bullet}(s) \bar{X}_m^{\bullet}(r) \bar{X}_p^{\bullet}(r) dr ds,$$

qui correspond aux étiquetages

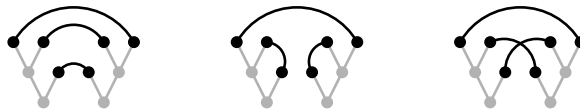


4.2. Appariements et étiquetages adaptés

Puisque $X_{\varepsilon, k}^{\tau}(t)$ est une fonction polynomiale de la famille gaussienne $\bar{X}_{\ell}^{\bullet}(t)$, l'estimation des normes L^p de $X_{\varepsilon, k}^{\tau}(t)$ repose sur la connaissance des covariances $\mathbb{E}\left(X_{\varepsilon, k}^{\tau}(t) X_{\varepsilon, \ell}^{\tau}(s)\right)$ et donc, par (31), de

$$(33) \quad \mathbb{E}\left(Z_L^{\tau}(t, T) Z_{\bar{L}}^{\tau}(\bar{t}, \bar{T})\right).$$

Par les propositions 4.1 et 4.2, (33) s'écrit en fonction des covariances (29) de $\bar{X}_k^{\bullet}(s)$ et $\bar{X}_{\ell}^{\bullet}(t)$. Puisque les $\bar{X}_{\ell}^{\bullet}(t)$ qui apparaissent dans la définition (32) de $Z_L^{\tau}(t, T)$ sont indexés par les feuilles de τ , la covariance (33) s'écrit comme une somme sur l'ensemble \mathcal{P}^{τ} de tous les appariements des feuilles de τ , comme par exemple



Pour $L, \bar{L} \in \mathcal{L}^{\tau}$, on note $L \sqcup \bar{L}$ l'application

$$(34) \quad (L \sqcup \bar{L}) : \mathcal{E}(\tau) \sqcup \mathcal{E}(\tau) \rightarrow \mathbb{Z},$$

qui est égale à L (respectivement \bar{L}) sur la première (respectivement seconde) copie de $\mathcal{E}(\tau)$, où $\mathcal{E}(\tau)$ est l'ensemble des arêtes de τ . Pour tout appariement $P \in \mathcal{P}^{\tau}$ et $L, \bar{L} \in \mathcal{L}^{\tau}$, on dit que $L \sqcup \bar{L}$ est un étiquetage adapté à P si

$$(L \sqcup \bar{L})_{e(u)} + (L \sqcup \bar{L})_{e(v)} = 0, \quad \forall \{u, v\} \in P,$$

c'est-à-dire si la somme des étiquettes des deux arêtes attachées aux deux feuilles appariées est nulle. L'importance de ce concept est montrée par le fait que $\mathbb{E}\left(Z_L^{\tau}(t, T) Z_{\bar{L}}^{\tau}(\bar{t}, \bar{T})\right) \neq 0$ ssi il existe un appariement $P \in \mathcal{P}^{\tau}$ tel que $L \sqcup \bar{L} \in \mathcal{L}_P^{\tau}$; en effet, par (32), en notant $\hat{L} \stackrel{\text{def}}{=} L \sqcup \bar{L}$,

$$\mathbb{E}\left(Z_L^{\tau}(t, T) Z_{\bar{L}}^{\tau}(\bar{t}, \bar{T})\right) \propto \sum_{P \in \mathcal{P}^{\tau}} \prod_{\{u, v\} \in P} \mathbb{E}\left(\bar{X}_{\hat{L}_{e(u)}}^{\bullet}(\hat{T}_{u \downarrow}) \bar{X}_{\hat{L}_{e(v)}}^{\bullet}(\hat{T}_{v \downarrow})\right).$$

Par (29), un tel produit de covariances est non-nul ssi $\hat{L} \in \mathcal{L}_P^{\tau}$. En outre, $\mathcal{L}_P^{\tau} = \emptyset$ ssi il existe un sommet interne tel que, parmi ses descendants dans τ , toutes les feuilles soient appariées entre elles.

Un critère suffisant pour la convergence de X_ε^τ quand $\varepsilon \downarrow 0$ est donné par une estimation appropriée du noyau obtenu de (32) pour un appariement P et un étiquetage adapté \hat{L}

$$(35) \quad \mathcal{K}^\tau(P, \hat{L}; \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{F}_0^\tau} \int_{\mathcal{F}_\delta^\tau} e^{-\varrho(\hat{L})^2(\delta - T_\varrho - \bar{T}_{\bar{\varrho}})} \left(\prod_{v \in \hat{i}(\tau) \sqcup \bar{i}(\tau)} \hat{L}_{e(v)} e^{-\hat{L}_{e(v)}^2(\hat{T}_{v\downarrow} - \hat{T}_v)} \right) \\ \times \left(\prod_{\{u,v\} \in P} e^{-\hat{L}_{e(v)}^2|\hat{T}_{u\downarrow} - \hat{T}_{v\downarrow}|} \right) \mu_\delta^\tau(dT) \mu_0^\tau(d\bar{T})$$

où $\hat{T} = T \sqcup \bar{T}$ et $\{\varrho, \bar{\varrho}\}$ sont les deux racines. Hairer définit une version symétrisée $\mathcal{K}_{\text{sym}}^\tau$ de \mathcal{K}^τ utilisant les symétries naturelles de τ . Le contrôle de $\mathcal{K}_{\text{sym}}^\tau$ donne un critère suffisant plus fort que celui fondé sur \mathcal{K}^τ .

Sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans tous les détails de la construction, il est évident que l'étude des covariances (33) dépend de la combinatoire de l'ensemble \mathcal{L}_P^τ des étiquetages adaptés à P , pour tout appariement P des feuilles de deux copies de τ . C'est vers cela que nous tournons notre attention maintenant.

4.3. Graphes pondérés

L'idée de base est la suivante : pour tout appariement $P \in \mathcal{P}^\tau$, on peut identifier l'ensemble \mathcal{L}_P^τ des étiquetages adaptés à P à un certain ensemble de fonctions $L : \mathcal{E} \mapsto \mathbb{Z}$, où $(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ est un graphe fini associé à P que nous allons décrire graphiquement ; on dessine l'appariement comme il suit, on ajoute une arête joignant les deux racines et on "supprime" chaque feuille, en identifiant en une seule les deux arêtes incidentes ; on obtient un graphe où chaque sommet est de degré 3 :



Les arêtes de \mathcal{G} qui proviennent d'arêtes internes des deux copies de τ plus la nouvelle arête \bar{e} reliant les deux racines forment un arbre recouvrant de \mathcal{G} noté \mathcal{T} et dessiné en gris dans la figure à droite.

Une orientation (arbitraire) de $(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ permet de définir le *groupe des cycles intégraux* $\mathcal{C}(\mathcal{G}, \mathcal{E})$, ensemble des étiquetages $L : \mathcal{E} \mapsto \mathbb{Z}$ satisfaisant la loi des nœuds de Kirchhoff en tout sommet $v \in \mathcal{G}$, c'est-à-dire tels que la somme des étiquettes des arêtes sortant de v est égale à celle des arêtes entrant.

L'intérêt ici de cette construction réside dans le résultat suivant : il existe une identification canonique de \mathcal{L}_P^τ avec le sous-espace $\mathcal{C}_*(\mathcal{G}, \mathcal{E}) = \{L \in \mathcal{C}(\mathcal{G}, \mathcal{E}) : L_e \neq 0, \forall e \in \mathcal{E}\}$ des éléments partout non-nuls. L'estimation sur \mathcal{K}^τ ou $\mathcal{K}_{\text{sym}}^\tau$ suffisante pour la convergence de X_ε^τ

suit si on peut trouver une *pondération* $\mathcal{L} : \mathcal{E} \mapsto \mathbb{R}_+$ bien choisie (c'est-à-dire satisfaisant certaines propriétés que nous ne détaillons pas) qui rende le graphe *sommable*, c'est-à-dire

$$(36) \quad \sum_{L \in \mathcal{C}_*(\mathcal{G}, \mathcal{E})} \prod_{e \in \mathcal{E}} |L_e|^{-\mathcal{L}_e} < \infty.$$

La pondération \mathcal{L} sert dans les manipulations qui permettent d'estimer des intégrales du noyau \mathcal{K}^τ en termes de la quantité (36). En effet, \mathcal{K}^τ peut être réécrit en termes de la quantité

$$\left(\prod_{e \in \mathcal{T}} L_e \right) \exp \left(- \sum_{e \in \mathcal{E}} |L_e|^2 |\delta T_e| \right)$$

où l'on reconnaît que $e \in \mathcal{T}$ correspond dans (35) à $v \in \hat{i}(\tau) \sqcup \hat{i}(\tau)$ et la somme sur $e \in \mathcal{E}$ vient de tous les exponentiels indexés par $v \in \hat{i}(\tau) \sqcup \hat{i}(\tau)$ et $\{u, v\} \in P$. Par des intégrations successives en dT_u , $u \in \mathcal{G}$, en utilisant des inégalités de Hölder avec des poids donnés par la pondération bien choisie \mathcal{L} , on obtient une majoration d'une norme intégrale de \mathcal{K}^τ en termes de la quantité (36). Le résultat final est le suivant

THÉORÈME 4.3. — *Pour $\tau \in \mathcal{T}$, X_ε^τ converge lorsque $\varepsilon \downarrow 0$ si pour tout appariement $P \in \mathcal{P}^\tau$ il existe une pondération bien choisie \mathcal{L} satisfaisant (36).*

La dernière question est comment vérifier qu'une pondération bien choisie satisfait (36). Pour cela Hairer donne un algorithme élémentaire sur les graphes pondérés, décrit simplement par les figures

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} \text{---} \alpha \text{---} \beta \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \alpha + \beta \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} 0 \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \alpha \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \quad \text{---} \alpha \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \alpha \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \quad \text{---} \beta \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \gamma \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \end{array} \right.$$

où γ est une fonction explicite de α et β . Cet algorithme diminue à chaque étape le nombre d'arêtes, jusqu'à se stabiliser ; si le résultat final est un arbre, alors le graphe est sommable. En effet, la valeur de l'expression (36) est majorée par la valeur que l'on obtient après une étape de l'algorithme à une constante multiplicative universelle près. Pour les arbres le groupe des cycles intégraux $\mathcal{C}(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ est trivial et on obtient donc que la quantité (36) est finie.

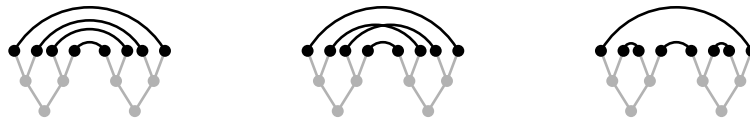
Ce simple algorithme est l'une des nouveautés principales de l'article, car il permet d'obtenir des estimations qui seraient trop longues et complexes à traiter et même à écrire analytiquement. D'un autre côté il n'y a pas une règle générale pour construire des pondérations bien choisies telles que l'algorithme réduit le graphe à un arbre et il faut les chercher à la main.

4.4. Convergence de X_ε^τ

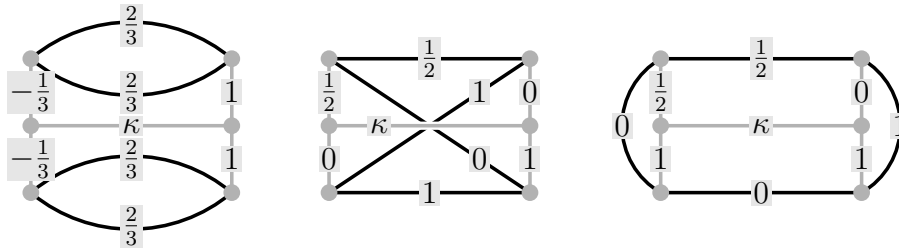
Par (10) et la définition $X_\varepsilon^\tau = \Pi_0^\perp Y_\varepsilon^\tau$ nous obtenons que $(X_\varepsilon^\tau)_{t \in \mathcal{T}}$ satisfait l'équation récursive pour $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$ et $\tau = [\tau_1, \tau_2]$

$$\partial_t X_\varepsilon^\tau = \partial_x^2 X_\varepsilon^\tau + \Pi_0^\perp (\partial_x X_\varepsilon^{\tau_1} \partial_x X_\varepsilon^{\tau_2}).$$

Par le tableau de régularité (15), valable pour X^τ aussi, on voit que pour $\tau \in \{\mathfrak{v}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{w}\}$ une approche classique est impossible car le produit $\partial_x X_\varepsilon^{\tau_1} \partial_x X_\varepsilon^{\tau_2}$ dans la définition de $X_\varepsilon^{[\tau_1, \tau_2]}$ n'est pas bien défini à la limite. Pour la convergence on utilise donc le théorème 4.3, en vérifiant à la main l'existence pour tout appariement d'une pondération bien choisie telle que l'algorithme (37) produit un arbre. À titre d'exemple, pour \mathfrak{w} on doit étudier les appariements



pour lesquels on trouve des pondérations bien choisies pour un $\kappa > 0$



que l'algorithme (37) réduit à un arbre. Pour $\tau \notin \{\bullet, \mathfrak{v}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{w}\}$, on utilise le cadre classique de la proposition 2.2 ou les chemins rugueux en espace comme dans la proposition 3.1 pour montrer la convergence du produit $\partial_x X_\varepsilon^{\tau_1} \partial_x X_\varepsilon^{\tau_2}$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$.

4.5. La constante de renormalisation

Comme il a été annoncé au début de cette section, une fois prouvée la convergence de X_ε^τ on passe à l'étude du mode de Fourier constant $\Pi_0 Y_\varepsilon^\tau$, qui s'écrit par (10)

$$\Pi_0 Y_{\varepsilon, t}^\tau = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^t \bar{X}_{\varepsilon, k}^{\tau_1}(s) \bar{X}_{\varepsilon, -k}^{\tau_2}(s) ds - C_\varepsilon^\tau t.$$

La preuve de la convergence de cette expression, avec le choix de C_ε^τ donné dans (14), suit de l'étude de la constante

$$K_\varepsilon^\tau = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left(\bar{X}_{\varepsilon, k}^{\tau_1} \bar{X}_{\varepsilon, -k}^{\tau_2} \right), \quad \tau = [\tau_1, \tau_2],$$

qui ne dépend pas du temps car $\bar{X}_{\varepsilon, k}^{\tau_1}$ est stationnaire ; pour cela on utilise à nouveau les relations de récurrence (30) et les covariances (29). On rappelle que cela est nécessaire seulement pour les arbres $\{\mathfrak{v}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{w}\}$ car pour les autres la convergence se prouve de façon plus simple.

Remerciements. L'auteur a beaucoup profité de plusieurs conversations avec Martin Hairer, Massimiliano Gubinelli, Yvain Bruned, Julien Reygner et Eric Luçon et tient à les remercier

chaleureusement. Les figures sont toutes dues à Martin Hairer, qui a gentiment permis de les utiliser dans ce texte.

RÉFÉRENCES

- [1] G. AMIR, I. CORWIN, J. QUASTEL – Probability distribution of the free energy of the continuum directed random polymer in $1 + 1$ dimensions, *Comm. Pure Appl. Math.* **64** (2011), 466–537.
- [2] L. BERTINI, G. GIACOMIN – Stochastic Burgers and KPZ equations from particle systems, *Comm. Math. Phys.* **183** (1997), 571–607.
- [3] I. CORWIN – The Kardar-Parisi-Zhang equation and universality class, *Random Matrices : Theory and Appl.* **1**, (2012), 1130001.
- [4] G. DA PRATO, J. ZABCZYK. – Stochastic Equations in Infinite Dimensions, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1992.
- [5] M. GUBINELLI – Controlling rough paths, *J. Funct. Anal.* **216** (2004), 86–140.
- [6] M. HAIRER – Solving the KPZ equation, à paraître dans *Annals of Maths*.
- [7] T. IMAMURA, T. SASAMOTO. – Replica approach to the KPZ equation with the half Brownian motion initial condition, *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical* **44** (2011), 385001.
- [8] M. KARDAR, G. PARISI, Y.-C. ZHANG – Dynamic scaling of growing interfaces, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986), 889–892.
- [9] T. J. LYONS – Differential equations driven by rough signals, *Rev. Mat. Iberoamericana* **14** (1998), 215–310.
- [10] C. MUELLER – On the support of solutions to the heat equation with noise, *Stochastics* **37** (1991), 225–246.

Lorenzo ZAMBOTTI

Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires

Université Pierre et Marie Curie

4, place Jussieu

F-75252 PARIS Cedex 05

E-mail : `lorenzo.zambotti@upmc.fr`