Séminaire BOURBAKI Mars 2013
65ème année, 2012-2013, n$^{\text{o}}$ 1070

LE SPECTRE DISCRET DES GROUPES CLASSIQUES [d'après J. Arthur]

par **Colette MOEGLIN**

Il s'agit dans ce court exposé de donner une idée de plusieurs milliers de pages de travaux de J. Arthur, ceci ne peut donc être que très partiel. À la demande des organisateurs, le choix s'est porté sur le cas particulier des groupes symplectiques et orthogonaux, qui sont ceux pour lesquels J. Arthur a obtenu les résultats les plus complets et on se limite, de plus, à une description grossière des résultats, ce qui n'en éclaire pas la profondeur.

Sur ce sujet difficile, où l'oubli d'un seul mot rend le résultat faux, il existe toutefois des présentations relativement abordables. J. Arthur lui-même a expliqué dès les années 80, comment des compatibilités entre les conjectures existantes impliquent ses résultats [3], [4] et [5]. L'ensemble des articles écrits par J. Arthur sont disponibles sur la page [10]. Et la référence majeure pour l'exposé ci-dessus est [9] où l'introduction fait, entre autres, un historique du sujet et le premier chapitre fait en cinquante pages un exposé précis des résultats dont je vais parler ici.

Les groupes considérés ici sont la composante connexe du groupe d'automorphismes d'une forme bilinéaire non dégénérée symétrique ou antisymétrique sur un espace vectoriel de dimension finie sur un corps de nombres, c'est-à-dire une extension de degré fini du corps $\mathbb{Q}$. La question de départ est de connaître la décomposition spectrale des quotients arithmétiques de ce groupe. Le résultat général est dû à Langlands [23] et ramène cette étude à celle des sous-représentations irréductibles dans cet espace de fonctions ainsi qu'à l'étude analogue pour des sous-groupes assez particuliers. Il est plus facile d'expliquer la situation dans le cadre adélique, qui est une situation limite du cadre classique, limite sur les quotients arithmétiques via les projections naturelles ; revenir du cadre adélique au cas des quotients arithmétiques pose de difficiles problèmes non réellement résolus.

On note k le corps de nombres considéré et $\mathbb{A}$ son anneau des adèles, c'est-à-dire le produit restreint des complétés de k pour toutes les valuations, p-adiques et archimédiennes de k. Par exemple si $k = \mathbb{Q}$, alors $\mathbb{A}$ est le sous-anneau du produit de $\mathbb{R}$ avec le produit des corps p-adiques $\mathbb{Q}_p$, où p parcourt l'ensemble des nombres premiers, sous-anneau formé des éléments dont la composante en p est un entier p-adique pour tout nombre premier p sauf un nombre fini d'entre eux.

On fixe un k-espace vectoriel de dimension finie, V, muni d'une forme orthogonale ou symplectique, non dégénérée. L'existence d'une forme symplectique nécessite évidemment que la dimension de V soit paire et il n'y a alors qu'une seule forme (à conjugaison près) ; on note $G = \mathrm{Sp}(2n)$ le groupe d'automorphismes de cette forme où $2n = \dim V$. Par contre, pour l'existence d'une forme orthogonale, il n'y a pas de restriction sur la dimension. Mais dans ce dernier cas il n'y a pas qu'une seule forme possible (à conjugaison près). Pour simplifier, ici nous ne considérons que les formes ayant un noyau anisotrope de dimension au plus 2, c'est-à-dire :

– si $\dim V =: 2n+1$ est impaire, on considère les formes $\eta x_0^2 + \sum_{i\in[1,n]} x_i x_{2n-i+1}$ où η est un élément de k^*. Dans ce cas, on note $\mathrm{SO}(2n+1)$ le groupe des automorphismes de cette forme, de déterminant 1 ; ce groupe ne dépend pas de η ;

– si $\dim V =: 2n$ est paire, on considère les formes $\sum_{i\in[1,n-1]} x_i x_{2n-i+1} + x_n^2 - \eta x_{n+1}^2$, où η est un élément de k^*. Dans ce cas, le groupe d'automorphismes de la forme dépend de η (ou plutôt de sa classe modulo les carrés de k^*). On note k' l'extension de degré au plus 2 de k tel que η soit un carré dans cette extension. Et pour alléger les notations, on note encore $\mathrm{SO}(2n)$ le groupe des automorphismes de la forme décrite, de déterminant 1, oubliant k'.

Et pour unifier les notations, on note G l'un des groupes qui viennent d'être décrits, $G(k)$ l'ensemble de ses points sur k (les matrices de déterminant 1 à coefficients dans k et respectant la forme bilinéaire) et $G(\mathbb{A})$ l'ensemble des points adéliques de G, c'est-à-dire l'ensemble des matrices de déterminant 1, respectant la forme bilinéaire fixée et à coefficients dans $\mathbb{A}$. Il faut voir $G(\mathbb{A})$ comme un produit sur toutes les places v de k (tous les nombres premiers p, et la place ∞, si $k = \mathbb{Q}$) des groupes $G(k_v)$ où, sauf pour un ensemble fini de places, noté génériquement S, incluant les places archimédiennes, l'élément en la place considérée est à coefficients dans l'anneau des entiers de k_v ; évidemment $G(k_v)$ est le groupe des matrices de déterminant 1 respectant la forme considérée et dont les coefficients sont des éléments de k_v.

Le groupe $G(\mathbb{A})$ possède une mesure de Haar qui donne une mesure sur le quotient $G(k)\backslash G(\mathbb{A})$; pour cette mesure, ce quotient est de volume fini. On considère l'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable sur ce quotient. Le groupe $G(\mathbb{A})$ y opère par translations à droite. Par définition, le spectre discret de G est la somme des sous-représentations irréductibles de cette représentation (*irréductible* signifie qui se réalise dans un sous-espace fermé et qui ne se coupe pas en deux sous-représentations dans des sous-espaces fermés propres). Le but est de décrire ce spectre discret. En fait, il est sans espoir d'obtenir une description réellement explicite, mais Arthur réussit à calculer (à une légère exception près) la multiplicité de chaque représentation irréductible dans cet espace et à décrire ces représentations en termes de représentations cuspidales de groupes $\mathrm{GL}(m)$, le groupe des automorphismes linéaires de k^m avec $m \leq \dim V + 1$. Une représentation cuspidale, irréductible, de $\mathrm{GL}(m)$ est une sous-représentation irréductible de $\mathrm{GL}(m,\mathbb{A})$ dans l'ensemble des fonctions sur $\mathrm{GL}(m,k)\backslash \mathrm{GL}(m,\mathbb{A})$, se transformant suivant un caractère central unitaire sous l'action du centre de $\mathrm{GL}(m,\mathbb{A})$

et engendré par des fonctions f nulles aux pointes, ce qui veut dire que pour tout entier $m' < m$, donnant lieu à une décomposition $k^m = k^{m'} \oplus k^{m-m'}$, en notant $U_{m,m'}$ le groupe des matrices $\mathrm{Id}_{k^m} + \mathrm{Hom}_k(k^{m'}, k^{m-m'})$, l'intégrale $\int_{U_{m,m'}(k)\backslash U_{m,m'}(\mathbb{A})} d\,u\, f(ug)$ est nulle pour presque tout $g \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{A})$; l'intégrale est convergente car on intègre sur un espace compact.

Ces représentations cuspidales des groupes $\mathrm{GL}(m)$ sont les briques élémentaires de la théorie des formes automorphes d'après la fonctorialité de Langlands. C'est ce programme de fonctorialité que J. Arthur réalise pour les groupes G décrits précédemment (en fait sans restriction sur la nature de la forme bilinéaire orthogonale) et avec des méthodes suffisamment générales pour que d'autres groupes soient atteignables sans difficultés supplémentaires. Et c'est ce que je vais essayer d'expliquer ci-dessous.

Un des attraits du sujet est son interaction avec la théorie des nombres dont certains sujets ont aussi comme briques élémentaires les représentations cuspidales des groupes $\mathrm{GL}(m)$; il s'agit de les utiliser pour obtenir des renseignements sur les groupes de Galois et les représentations de ces groupes, ce qui est une des motivations de la théorie de Langlands. Relativement récemment, Harris a donné un exposé à peu près exhaustif des résultats connus utilisables pour les applications arithmétiques [15] et il y a expliqué ce que ces résultats permettaient actuellement de faire, par exemple, pour construire des systèmes ℓ-adiques de représentations galoisiennes. Je n'aborderai absolument pas ces questions ici.

1. REPRÉSENTATIONS

On garde les notations $G, k, \mathbb{A}$ de l'introduction. Soit S un ensemble fini de places de k contenant les places archimédiennes et les valuations 2-adiques ; on note $G(\mathcal{O}^S)$ le sous-groupe de $G(\mathbb{A})$ formé des éléments qui valent l'identité en toute place dans S et qui sont à coefficients dans l'anneau des entiers de k_v pour toute place v non dans S ; c'est un groupe compact. Ce groupe intervient dans la définition de $G(\mathbb{A})$ puisque $G(\mathbb{A})$ est l'union sur tous les choix de S des produits $G(\mathcal{O}^S) \times_{v\in S} G(k_v)$, avec la structure de groupe évidente. Pour que les résultats qui sont décrits ci-dessous incluent aussi le cas des valuations 2-adiques, il faudrait changer la forme orthogonale fixée pour définir $SO(2n)$, ce que nous ne ferons pas.

Par contre on oublie l'espace des fonctions $L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$, car on admet sans explication que l'on sait calculer la trace sur les représentations irréductibles qui y apparaissent sans les réaliser dans cet espace, via la formule des traces.

1.1. Composantes locales

On va donc voir apparaître ci-dessous des représentations irréductibles de $G(\mathbb{A})$, notées généralement π, de façon assez abstraite : si π est réalisée dans un espace W, W est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension en général infinie (seuls les caractères de $G(\mathbb{A})$ triviaux sur $G(k)$ font exception). La représentation de $G(\mathbb{A})$ dans W est continue, donc elle est localement constante chaque fois qu'on la restreint à un sous-groupe de la forme $G(k_v)$ avec v une place non archimédienne fixée. Pour $w \in W - \{0\}$ fixé, non nul, et pour une place v fixée, le sous-espace engendré par w sous $G(k_v)$ définit une représentation de $G(k_v)$ (j'oublie quelques subtilités aux places archimédiennes) ; cette représentation est une somme finie de représentations irréductibles toutes isomorphes et on note π_v la classe d'isomorphie de représentations ainsi définie. Celle-ci est indépendante du choix de $w \in W - \{0\}$. C'est la composante locale de π en la place v.

En une place non archimédienne v, se donner une représentation irréductible continue de $G(k_v)$ ou se donner une représentation irréductible de l'algèbre (pour la convolution) des fonctions localement constantes à support compact sur $G(k_v)$ est équivalent ; on utilise ce deuxième point de vue dans les paragraphes qui suivent.

1.2. Représentations non ramifiées et algèbre de Hecke sphérique

De plus, w étant toujours fixé, il existe (par continuité) un ensemble fini S de places de k contenant les places archimédiennes et les places où la caractéristique résiduelle de k_v est deux, tel que w soit fixe sous le groupe compact $G(\mathcal{O}^S)$. Ainsi si v est une place de k non dans S, la représentation π_v a des vecteurs fixes sous le compact $G(\mathcal{O}_v)$; on suppose que k' défini dans l'introduction dans le cas des groupes orthogonaux pairs est, en la place v, une extension non ramifiée de k, alors :

Proposition 1.1 ([12] section III). — *Soit π_v une représentation irréductible continue (dans un espace vectoriel complexe) de $G(k_v)$. La dimension de l'espace des vecteurs fixes sous $G(\mathcal{O}_v)$ dans la représentation π_v est au plus* 1. *Et si cette dimension est* 1, *l'algèbre des fonctions sur $G(k_v)$ bi-invariantes par $G(\mathcal{O}_v)$ opère sur cet espace par un caractère et ce caractère détermine uniquement la représentation π_v.*

On appelle algèbre de Hecke sphérique l'algèbre des fonctions sur $G(k_v)$ bi-invariantes par $G(\mathcal{O}_v)$. Et c'est parce que cette algèbre est commutative (voir le théorème 1.3 ci-dessous pour une description plus précise) que la proposition ci-dessus est vraie. Une représentation irréductible de $G(k_v)$ ayant des vecteurs invariants sous $G(\mathcal{O}_v)$ est dite non ramifiée, étant entendu qu'il faut nécessairement que l'extension k' (quand elle a été introduite) de k soit elle-même non ramifiée.

1.3. Produit tensoriel restreint

Soit π une représentation irréductible et continue de $G(\mathbb{A})$; pour toute place v, on a défini la composante locale π_v de π. On a vu que pour presque tout v, la représentation π_v est non ramifiée. On définit alors le produit tensoriel restreint $\otimes'_v \pi_v$, en prenant dans le produit tensoriel ordinaire les vecteurs pour lesquels il existe un ensemble fini de places, S, contenant les places archimédiennes et les places où la caractéristique résiduelle de k_v est deux sous $G(\mathcal{O}^S)$.

Proposition 1.2 ([14]). — *La représentation irréductible et continue π est isomorphe au produit tensoriel restreint de ses composantes locales π_v.*

1.4. Caractères de l'algèbre de Hecke sphérique

On rappelle que l'on a introduit le groupe G de façon concrète comme groupe d'automorphismes d'une forme bilinéaire sur l'espace vectoriel V ; à cette occasion on a introduit des coordonnées ; pour les groupes symplectiques on prend la forme symplectique standard $\langle (x_i; i \in [1,2n]), (y_j; j \in [1,2n]) \rangle = \sum_{i \in [1,n]} (x_i y_{2n-i+1} - x_{2n-i+1} y_i)$. Dans le cas où V n'est pas orthogonal et de dimension paire, les coordonnées sont les $x_i \in [1,2n]$ ($n = [\dim V/2]$) et éventuellement x_0 si $\dim V = 2n+1$. On note alors T le sous-groupe de G isomorphe à k^{*n} défini par

$$\forall t = (t_i; i \in [1,n]) \in k^{*n}, \forall v = (x_i; i \in [1,2n], x_0); t.v = (x_0, t_i x_i, t_i^{-1} x_{2n-i+1}; i \in [1,n]),$$

où x_0 n'intervient que si $\dim V = 2n+1$. Si V est un espace orthogonal de dimension paire, $2n$, on a introduit l'extension k' de k ; si $k' = k$, on peut changer la forme orthogonale en $\sum_{i \in [1,n]} x_i x_{2n-i+1}$ sans changer sa classe et la définition de T est la même que dans les cas précédents. Si k' est une extension de degré 2 de k, on vérifie aisément que les formules précédentes correctement adaptées montrent que G contient un sous-groupe isomorphe à $k^{*(n-1)} \times k'^{*}_1$ où k'^{*}_1 est le sous-groupe de k'^{*} formé des éléments de norme 1.

Dans tous les cas, on note T ce groupe ; c'est un sous-tore de G, maximalement déployé. À conjugaison près, ce tore est indépendant des coordonnées choisies.

Pour v une place de k, on note $T(k_v)$ les points de T à valeurs dans k_v et on note ${}^0T_v$ le compact maximal $T(\mathcal{O}_v)$ de $T(k_v)$.

Théorème 1.3 (Isomorphisme de Satake [12], th. 4.1). — *Soit v une place de k et on suppose que si k' est défini, l'extension k'_v de k_v est non ramifiée. On note aussi $W_v := \mathrm{Norm}_{G(k_v)} T(k_v)/T(k_v)$, c'est le groupe de Weyl de $G(k_v)$.*

L'algèbre de Hecke sphérique de $G(k_v)$ est naturellement isomorphe à l'algèbre des fonctions à support compact (c'est-à-dire fini) sur $T(k_v)/{}^0T_v$, invariantes sous W_v.

Tout caractère continu de l'algèbre des fonctions localement constantes à support compact sur $T(k_v)/{}^0T_v$ s'identifie naturellement à un caractère non ramifié de $T(k_v)$. On obtient donc le corollaire très important suivant :

Corollaire 1.4. — *L'ensemble des orbites sous W_v des caractères non ramifiés de $T(k_v)$ est en bijection (naturelle) avec l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations irréductibles et non ramifiées de $G(k_v)$.*

2. FONCTORIALITÉ DE LANGLANDS

2.1. Fonctorialité pour les tores

On garde la notation T du paragraphe précédent. On se place en une place v de k et on fixe une clôture algébrique $\overline{k}_v$ de k_v. On pose $X_*(T) := \mathrm{Hom}(\overline{k}_v^*, T(\overline{k}_v))$; c'est un $\mathbb{Z}$-module libre (en fait isomorphe à $\mathbb{Z}^n$) muni d'une action du groupe de Galois de k_v.

On a $T(\overline{k}_v) \simeq X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}_v^*$. Le groupe de Galois de $\overline{k}_v/k_v$ opère sur $T(\overline{k}_v)$ et cette action est compatible avec l'action naturelle sur le membre de droite. Dans presque tous les cas, on a $X_*(T)^{\mathrm{Gal}(\overline{k}_v/k_v)} \simeq Hom(k_v^*, T(k_v))$ et

$$T(k_v) \simeq X_*(T)^{\mathrm{Gal}(\overline{k}_v)/k_v} \otimes_{\mathbb{Z}} k_v^*.$$

Le seul cas où ceci n'est pas vrai est le cas où V est un espace orthogonal de dimension paire et où k'_v est un corps extension de degré 2 de k_v ; dans ce cas, on a :

$$T({k'}_v) \simeq X_*(T)^{\mathrm{Gal}(\overline{k}_v)/k'_v} \otimes_{\mathbb{Z}} k_v'^*$$

et le groupe de Galois de k'_v/k_v opère naturellement sur chaque terme écrit, de façon compatible ; remarquons que si dim V est de dimension 2, $X_*(T)^{\mathrm{Gal}(\overline{k}_v)/k'_v}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, notons μ un générateur et l'action de $\mathrm{Gal}(k'_v/k_v)$ sur ce $\mathbb{Z}$-module est l'inversion ; $T(k_v)$ s'identifie donc aux éléments $x \in k_v'^*$ tels que $\mu \otimes x$ soit invariant sous $\mathrm{Gal}(k'_v/k_v)$, c'est-à-dire $\mu \otimes x = \mu^{-1} \otimes \overline{x}$ ou encore $x\overline{x} = 1$ ce qui est bien la description de $T(k_v)$ dans ce cas. Le cas général se déduit trivialement de ce cas-là.

On définit $X^*(T)$ le groupe des caractères rationnels du groupe algébrique T ; $X^*(T)(k_v)$ est naturellement le groupe des caractères rationnels de $T(k_v)$ sauf si k'_v est un corps extension de degré deux de k_v (comme ci-dessus). Dans ce cas $X^*(T)(k'_v)$ s'identifie au groupe des caractères rationnels de $T(k'_v)$ et est muni d'une action de $\mathrm{Gal}(k'_v/k_v)$.

On pose pour unifier les notations $k'_v = k_v$ sauf dans le cas particulier où k'_v est déjà défini comme extension de degré 2 de k_v et on définit

$${}^LT := (X^*(T)(k'_v) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*) \rtimes \mathrm{Gal}(k'_v/k_v);$$

${}^LT$ est le produit semi-direct d'un tore complexe avec le groupe de Galois de k'_v/k_v.

On note W_{k_v} le groupe de Weil de k_v ; pour la suite, on a besoin de savoir que, pour toute extension algébrique galoisienne finie E de k_v, le groupe de Weil de E est un sous-groupe distingué de W_{k_v} et on a la suite exacte :

$$1 \to W_E \to W_{k_v} \to \mathrm{Gal}(E/k_v) \to 1.$$

En particulier $\mathrm{Gal}(k'_v/k_v) \simeq W_{k_v}/W_{k'_v}$.

De plus, on suppose à partir de maintenant que v est une place non archimédienne ; alors W_{k_v} est muni d'une topologie telle que les sous-groupes d'inertie des groupes W_E pour E une extension galoisienne finie de k_v sont une base de voisinages ouverts et fermés de l'élément neutre de W_{k_v}.

Proposition 2.1. — *Soit v une place non archimédienne. Le groupe des caractères continus de $T(k_v)$ dans $\mathbb{C}^*$ est isomorphe (via la théorie du corps de classes) au groupe des homomorphismes continus, ϕ, de W_{k_v} dans le produit semi-direct de $X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$*

par W_{k_v} *rendant commutatif le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} \phi : W_{k_v} \arrow[rr] \arrow[dr] & & (X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*) \rtimes W_{k_v} \arrow[dl] \\ & W_{k_v} & \end{tikzcd}$$

La proposition repose sur l'isomorphisme du corps de classes, c'est-à-dire l'existence d'une suite exacte :

$$(1) \qquad 1 \to W^c_{k'_v} \to W_{k'_v} \to k'^*_v \to 1,$$

où $W^c_{k'_v}$ est l'intersection des noyaux des caractères continus à valeurs de $W_{k'_v}$ dans $\mathbb{C}^*$. On en déduit (l'indice ct signifie continu)

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(T(k'_v), \mathbb{C}^*) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(X_*(T)(k'_v) \otimes_{\mathbb{Z}} k^*_v), \mathbb{C}^*) \simeq X^*(T)(k'_v) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(k'^*_v, \mathbb{C}^*)$$

$$\simeq X^*(T)(k'_v) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(W_{k'_v}, \mathbb{C}^*) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{ct}}(W_{k'_v}, X^*(T)(k'_v) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*).$$

Cela montre la proposition dans le cas où $k'_v = k_v$. Dans le cas où $k'_v \neq k_v$, on renvoie à [11] paragraphe 9 qui provient de [25] theorem 1 ; plus de détails se trouvent dans [21] page 126 et suivantes.

Dans notre cas, on peut le faire à la main ; on se ramène au cas où dim $V = 2$ et on cherche la classification des caractères continus du groupe des éléments de norme 1 dans k'_v. Via le théorème de Hilbert, tout élément de norme 1 dans k'_v est un quotient $x/\overline{x}$ avec $x \in k'^*_v$ et on cherche donc à classifier les caractères continus de k'^*_v dont la restriction à k^*_v est le caractère trivial. On fixe ω un caractère continu de k'^*_v que l'on identifie, via la théorie du corps de classes à un homomorphisme de $W_{k'_v}$ dans $\mathbb{C}^*$. On prolonge arbitrairement cet homomorphisme en une application de W_{k_v} dans $\mathbb{C}^* \times \mathrm{Gal}(k'_v/k_v)$ en fixant $t \in \mathbb{C}^*$, $\sigma \in W_{k_v} - W_{k'_v}$ et en posant : $\omega(\sigma) = (t, \tilde{\sigma})$, où $\tilde{\sigma}$ est l'image de σ dans $\mathrm{Gal}(k'_v/k_v)$. Cette application est un homomorphisme de W_{k_v} dans le produit semi-direct $\mathbb{C}^* \rtimes \mathrm{Gal}(k'_v/k_v)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\omega(\sigma^2) = \omega(\sigma)^2 = (t, \tilde{\sigma})(t, \tilde{\sigma}) = (t\, t^{-1}, \tilde{\sigma}^2) = 1;$$

$$\forall w \in W_{k'_v}, \omega(\sigma w \sigma^{-1}) = \omega(\sigma)\omega(w)\omega(\sigma)^{-1} = (\omega(w)^{-1}, 1),$$

c'est-à-dire $\omega(\sigma w \sigma^{-1} w) = 1$. Or l'image de σ^2 dans k'^*_v via (1) est un élément de k^*_v qui n'est pas une norme alors que l'ensemble des éléments $\sigma w \sigma^{-1} w$ quand w varie, s'envoient via (1) sur l'ensemble des normes de k'^*_v dans k^*_v. Ainsi les deux conditions écrites sont exactement équivalentes à ce que la restriction de ω à k^*_v est triviale. Évidemment à conjugaison près, le choix du prolongement ne dépend pas du choix de $t \in \mathbb{C}^*$ puisque $(t, \tilde{\sigma}) = (t', 1)(1, \tilde{\sigma})(t'-1, 1)$ si $t'^2 = t$.

2.2. Classification fonctorielle des représentations non ramifiées

On continue avec les notations précédentes et on suppose que l'extension k'_v de k_v (quand elle existe) est non ramifiée. On a déjà introduit le groupe de Weyl, W de $G(k_v)$. Il opère naturellement sur $X^*(T)$ en commutant à l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k'_v/k_v)$. On a donc une action de W sur ${}^LT$.

Corollaire 2.2. — *L'ensemble des classes d'isomorphie de représentations non ramifiées de $G(k_v)$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphie de morphismes continus de W_{k_v} dans ${}^LT$ pris à conjugaison près sous l'action de W et triviaux sur le groupe d'inertie de W_{k_v}.*

Ce corollaire résulte de 1.4 et de 2.1. Remarquons que de 2.1, on n'a à utiliser que la partie facile qui résulte directement de la théorie du corps de classes. On espère que c'est clair quand $T(k_v)$ est isomorphe à un produit de copies de k_v^* ce qui se produit pour les groupes $\mathrm{Sp}(2n, k_v)$ et $\mathrm{SO}(2n+1, k_v)$ et aussi pour les groupes $\mathrm{SO}(2n, k)$ quand avec les notations qui précèdent 1.3, soit $k' = k$ soit le complété en v de k' n'est pas un corps. Si le complété de k' en la place v est un corps, $T(k_v)$ est isomorphe au produit de $n-1$ copies de k_v^* avec k'_{1v} (le sous-groupe des éléments de norme un de l'extension k'_v de k_v). Mais k'_{1v} est un groupe compact et tout caractère non ramifié de $T(k_v)$ est, avec les hypothèses faites, trivial sur ce sous-groupe. On est alors ramené à un produit de $n-1$-copies de k_v^*.

2.3. L-groupes

On fixe encore une place v ; on va décrire ci-dessous explicitement le L-groupe de $G(k_v)$ vu comme groupe algébrique défini sur k_v. Les constructions ne dépendent de la place v que via l'extension éventuelle k'_v de k_v. On pose

$$G^* := \begin{cases} \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C}) \text{ si } V \text{ est un espace orthogonal de dimension } 2n+1\ ; \\ \mathrm{SO}(2n+1, \mathbb{C}) \text{ si } V \text{ est un espace symplectique de dimension } 2n+1\ ; \\ \mathrm{SO}(2n, \mathbb{C}) \text{ si } V \text{ est un espace orthogonal de dimension } 2n. \end{cases}$$

La propriété fondamentale est que $X^*(T)(k'_v) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ est un tore maximal de G^* et que le groupe de Weyl de ce tore maximal s'identifie canoniquement au groupe de Weyl de $G(\overline{k}_v)$. On pose ${}^LG := G^* \rtimes \mathrm{Gal}(k'_v/k_v)$ où $\mathrm{Gal}(k'_v/k_v)$ agit trivialement sur G^* sauf dans le dernier cas quand k'_v est un corps extension de degré 2 de k_v, où un élément non trivial de $\mathrm{Gal}(k'_v/k_v)$ agit par l'automorphisme extérieur de $\mathrm{SO}(2n, \mathbb{C})$ provenant d'un élément de $\mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$. On vérifie aisément que l'on peut prolonger l'inclusion de $X^*(T)(k'_v) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ dans G^* en une inclusion de ${}^LT$ dans ${}^LG$.

J. Adams en [1] a remarqué qu'il est préférable de remplacer le produit semi-direct $\mathrm{SO}(2n, \mathbb{C}) \rtimes \mathrm{Gal}(k'_v/k_v)$ par $\mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$ en considérant l'inclusion du produit semi-direct dans $\mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$ en envoyant l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(k'_v/k_v)$ sur l'élément de $\mathrm{O}(2n, \mathbb{C})$ défini plus haut. Plutôt que de regarder des morphismes de W_{k_v} dans $\mathrm{SO}(2n, \mathbb{C}) \rtimes \mathrm{Gal}(k'_v/k_v)$ rendant commutatif le triangle analogue à celui de 2.1 il est équivalent de regarder les morphismes de W_{k_v} dans $\mathrm{O}(2n,\mathbb{C})$ dont le déterminant donne un caractère de W_{k_v} qui, via le corps de classes, est le caractère de k_v^* correspondant à l'extension k'_v/k_v.

Ainsi ${}^LG$ est dans tous les cas un groupe classique complexe.

On peut alors retraduire le corollaire précédent de la façon suivante, en supposant toujours que l'extension k'_v/k_v est non ramifiée et que v n'est pas une valuation 2-adique :

Corollaire 2.3. — *L'ensemble des classes d'isomorphie de représentations non ramifiées de $G(k_v)$ est en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison de morphismes continus de W_{k_v} dans ${}^LG$ à valeurs dans l'ensemble des éléments semi-simples (matrices diagonalisables) dont le déterminant est le caractère de l'extension k'_v de k_v.*

2.4. Représentations de L-groupes

La fonctorialité de Langlands traitée par Arthur correspond à la représentation naturelle de ${}^LG : \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C}), \mathrm{SO}(2n+1,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(2n+1,\mathbb{C})$ et $\mathrm{O}(2n,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})$. Pour unifier les notations, on pose $n_G^* := 2n, 2n+1, 2n$ suivant les trois cas précédents. On généralise les constructions ci-dessus de façon à paramétrer les classes d'isomorphie de représentations non ramifiées de $\mathrm{GL}(m,k_v)$ (pour $m \in \mathbb{N}$) à l'aide des classes de conjugaison de morphismes de W_{k_v} dans $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ à valeurs dans l'ensemble des éléments semi-simples (matrices diagonalisables).

Définition 2.4. — *La fonctorialité pour les représentations non ramifiées est alors la correspondance entre une classe d'isomorphie de représentations non ramifiées de $G(k_v)$ et la classe d'isomorphie de représentations non ramifiées de $\mathrm{GL}(n_G^*,k_v)$ dont le paramètre est l'image du paramètre de la représentation de $G(k_v)$ par l'inclusion naturelle.*

3. PREMIÈRE DÉCOMPOSITION DU SPECTRE DISCRET DES GROUPES CLASSIQUES

3.1. Rappel sur les groupes linéaires

Ici les groupes considérés sont les groupes d'automorphismes linéaires d'un espace vectoriel de dimension finie, $V = k^m$ avec $m \in \mathbb{N}$, et le groupe est noté $\mathrm{GL}(m,k)$. Dans l'introduction, on a défini rapidement les représentations cuspidales irréductibles et unitaires d'un tel groupe. C'est la brique de départ ; à partir de là, on peut construire des séries d'Eisenstein. On a besoin des deux résultats suivants : on suppose que m s'écrit sous la forme da où $d, a \in \mathbb{N}$. On fixe une représentation cuspidale irréductible unitaire de $\mathrm{GL}(d,\mathbb{A})$. On note M le groupe algébrique des matrices diagonales par bloc de taille $d \times d$ (il y a a copies de tels blocs) et U le groupe des matrices unipotentes supérieures par blocs pour ces mêmes blocs. On fixe une représentation cuspidale unitaire ρ de $\mathrm{GL}(d,\mathbb{A})$ et on réalise $\rho \otimes \cdots \otimes \rho$ dans l'ensemble des fonctions cuspidales sur $M(k)\backslash M(\mathbb{A})$ (cela se fait de façon unique). On note V_ρ cet espace de fonctions ; pour

$(s_i; i \in [1,a]) \in \mathbb{C}^a$, on considère $V_{\rho,(s_i;i\in[1,a])}$ comme l'espace V_ρ tordu par le caractère de $M(\mathbb{A})$ qui vaut en $(m_i; i \in [1,a])$ (dans la décomposition en blocs) $\prod_{i\in[1,a]} |\det m_i|^{s_i}$, où la valeur absolue est le produit de toutes les valeurs absolues des corps locaux, y compris en les places archimédiennes. On considère alors les fonctions $\phi(g, m, (s_i; i \in [1,a]))$ sur $\mathrm{GL}(m,\mathbb{A}) \times (M(k)\backslash M(\mathbb{A}))$ dépendant holomorphiquement (dans un sens convenable des $(s_i; i \in [1,a])$) vérifiant : pour tout $g \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{A})$ fixé la fonction de $m \in M(\mathbb{A})$, $\phi(g, m, (s_i; i \in [1,a]))$ est à valeurs dans $V_{\rho,(s_i;i\in[1,a])}$ et

$$\forall g \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{A}), \forall u \in U(\mathbb{A}), \forall m, m' \in M(\mathbb{A}),$$

$$\phi(um'g, m, (s_i; i \in [1,a])) = \delta(m')^{1/2}\phi(g, mm', (s_i; i \in [1,a])),$$

où $\delta(m')$ est une fonction module que je ne définis pas. On demande aussi que ϕ ait de bonnes propriétés en tant que fonction de g ; je ne les détaille pas.

Avec ces fonctions on peut construire des séries d'Eisenstein : on somme sur $\gamma \in M(m,k)U(k)\backslash \mathrm{GL}(m,k))$ la fonction $\phi(\gamma g, 1, (s_i; i \in [1,a]))$. La somme ne converge que pour certaines valeurs de $(s_i; i \in [1,a])$ mais a un prolongement méromorphe pour toute valeur du paramètre. On note $E(\phi, (s_i; i \in [1,a]))(g)$ la famille méromorphe de fonctions sur $G(k)\backslash G(\mathbb{A})$ obtenue et on a :

Théorème 3.1. — *La famille des fonctions*

$$\prod_{i\in[1,a[} (s_i - s_{i+1} - 1)E(\phi, (s_i; i \in [1,a]))(g)$$

dépend holomorphiquement des paramètres $(s_i; i \in [1,a])$ en tout point vérifiant $s_i = s_{i+1} + 1$ pour $i \in [1,a[$. En calculant la valeur en le point $s_i = (n-i+1)/2$, on obtient une fonction (nulle pour certains choix de ϕ mais pas pour tous) de carré intégrable modulo le centre. Le groupe $\mathrm{GL}(m,\mathbb{A})$ agit par translation à droite dans l'espace de fonctions ainsi obtenues quand ϕ varie et la représentation définie est irréductible. Toute représentation irréductible de $\mathrm{GL}(m,\mathbb{A})$ dans l'espace des fonctions de carré intégrable modulo le centre sur $\mathrm{GL}(m,k)\backslash\mathrm{GL}(m,\mathbb{A})$ est nécessairement l'une des représentations ainsi construites quand a, d sont tels que $m = ad$ et ρ varient, chaque représentation intervenant avec multiplicité exactement un.

La première partie du théorème est due à [37], complétée en [18] ; la deuxième partie est conjecturée en [18] et démontrée en [29].

On a encore besoin d'un autre résultat de la théorie des séries d'Eisenstein ; on refait les constructions ci-dessus mais en considérant pour M un groupe diagonal par blocs de tailles éventuellement inégales, $M \simeq \mathrm{GL}(m_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(m_t)$ pour $t \in \mathbb{N}$ et $m = m_1 + \cdots + m_t$ et, pour chaque bloc indexé par $i \in [1,t]$, on remplace la représentation ρ par une représentation, σ_i, de $\mathrm{GL}(m_i,k)\backslash\mathrm{GL}(m_i,\mathbb{A})$ irréductible, unitaire et de carré intégrable modulo le centre. On peut encore construire les séries d'Eisenstein $E(\phi, (s_i; i \in [1,t]))(g)$.

Théorème 3.2. — *Les séries d'Eisenstein obtenues à partir de représentations de carré intégrable modulo le centre sont holomorphes en le point $s_i = 0$ pour tout $i \in [1, t]$. Et elles définissent une représentation irréductible de* $\mathrm{GL}(m, \mathbb{A})$.

La première partie du théorème est due à Langlands ([23], [30]) ; elle dit que les séries d'Eisenstein sont holomorphes sur l'axe unitaire, ce qui est une propriété générale des groupes réductifs. La deuxième partie est propre à $\mathrm{GL}(m)$ et découle des résultats d'irréductibilité de [43] et [39] dans le cas non archimédien et [37], [40] pour le cas archimédien.

On utilise la terminologie suivante : les représentations ainsi construites sont les induites de représentations de carré intégrable (d'un sous-groupe de Levi). Chaque σ_i pour $i \in [1, t]$ s'obtient avec le théorème précédent à l'aide d'un couple (ρ_i, a_i) où $m_i/a_i =: d_i \in \mathbb{N}$ et ρ_i est une représentation cuspidale unitaire irréductible de $\mathrm{GL}(d_i, \mathbb{A})$. On utilisera ces notations dans la suite.

3.2. Décomposition suivant l'action des algèbres de Hecke sphériques, fonctorialité sphérique

On reste dans la situation globale et on revient au groupe G. Soit π une sous-représentation irréductible de $L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$. On a vu qu'il existe un ensemble fini de places S de k (contenant les places archimédiennes) tel que pour toute place v non dans S, la composante locale π_v est non ramifiée. Par la correspondance non ramifiée décrite en 2.4, on lui associe une représentation non ramifiée, π_v^{GL}, de $\mathrm{GL}(n_G^*, k_v)$.

Théorème 3.3 ([9], 3.4.3). — *Il existe une unique représentation irréductible, π^{GL}, de* $\mathrm{GL}(n_G^*, \mathbb{A})$ *induite de représentations de carré intégrable telle que pour toute place v de k, hormis un nombre fini, π_v^{GL} soit la composante locale de π^{GL} en la place v.*

En fait π_v^{GL} est la représentation décrite avant l'énoncé pour toute place v telle que π_v est non ramifiée et pas seulement hormis un nombre fini de places. L'unicité du théorème et ce complément viennent des théorèmes de multiplicité 1 fort pour les groupes $\mathrm{GL}(m)$ qui résultent indépendamment de Piatetski-Shapiro et Shalika, pour les représentations cuspidales, et de Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika pour le cas considéré ici (cf. [20], [19]). Ce théorème 3.3 apparaît comme un théorème facile dans [9] mais il nécessite des milliers de pages écrites dans des articles séparés, en particulier [6], [7] et [8].

3.3. Image de la fonctorialité sphérique

Dans un futur lointain, les représentations cuspidales des groupes $\mathrm{GL}(m, \mathbb{A})$ seront classifiées par les représentations complexes (irréductibles) de dimension m d'un groupe tannakien. Avec cela en tête, Arthur a remarqué [5], [4] que les représentations de carré intégrable de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{A})$ seraient classifiées par les représentations complexes irréductibles de dimension m du produit du groupe tannakien par $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$; la représentation de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ est, elle, déjà bien concrète, avec les notations $m = da$

de 3.1, c'est la représentation irréductible de dimension a de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$; à isomorphisme près, il n'y en a qu'une. On oublie le groupe tannakien, on garde la représentation cuspidale irréductible (notée ρ en 3.1) et la représentation de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ de dimension a. On a ainsi classifié les représentations de carré intégrable et plus généralement les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(m,\mathbb{A})$ induites de carré intégrable à l'aide d'un ensemble de couples, $(\rho_i, a_i; i \in [1,t])$, formés d'une représentation cuspidale unitaire d'un groupe $\mathrm{GL}(d_i,\mathbb{A})$ et de la dimension a_i d'une représentation irréductible de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ satisfaisant à $\sum_{i\in[1,t]} d_i a_i = m$ (cf. la fin de 3.1).

Conformément à la philosophie de Langlands, les représentations induites de carré intégrable de $\mathrm{GL}(n^*_G,\mathbb{A})$ qui sont dans l'image de la fonctorialité sphérique doivent exactement être celles dont le paramètre se factorise par le L-groupe de G. Et c'est ce qu'Arthur démontre en utilisant les fonctions L pour savoir si une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}(d,\mathbb{A})$ a un paramètre tannakien conjectural symplectique ou orthogonal. Pour le théorème ci-dessous on note ρ^* la contragrédiente de la représentation ρ. Pour la commodité du lecteur, on rappelle qu'une représentation irréductible de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ de dimension a se factorise (à conjugaison près) par $SO(a,\mathbb{C})$ exactement si a est impair et se factorise (à conjugaison près) par $Sp(a,\mathbb{C})$ exactement si a est pair.

Théorème 3.4. — *Les représentations π^{GL} qui sont dans l'image d'une représentation de carré intégrable de $G(\mathbb{A})$ par la fonctorialité sphérique sont exactement les représentations de $\mathrm{GL}(n^*_G,\mathbb{A})$ induites de représentations de carré intégrable associées aux ensembles $(\rho_i, a_i; i \in [1,t])$ satisfaisant uniquement aux conditions suivantes :*

1. $\sum_{i\in[1,t]} d_i a_i = n^*_G$,
2. $\forall i \in [1,t], \rho_i \simeq \rho_i^*, \forall i \neq j \in [1,t], (\rho_i, a_i) \neq (\rho_j, a_j)$,
3. *si ${}^LG$ est un groupe orthogonal, pour tout $i \in [1,t]$ si a_i est impair, $L(\rho_i, Sym^2, s)$ a un pôle en $s = 1$ et si a_i est pair, $L(\rho_i, \wedge^2, s)$ a un pôle en $s = 1$;*
4. *si ${}^LG$ est un groupe symplectique, alors pour tout $i \in [1,t]$ si a_i est impair, $L(\rho_i, \wedge^2, s)$ a un pôle en $s = 1$ et si a_i est pair, $L(\rho_i, Sym^2, s)$ a un pôle en $s = 1$;*
5. *de plus, si G est le groupe symplectique, le caractère central de π^{GL} est trivial et, si G est un groupe orthogonal pair, alors le caractère central de π^{GL} est le caractère quadratique qui, via la théorie du corps de classes, s'identifie au caractère de $\mathbb{A}^*/k^*$ trivial sur les normes de $\mathbb{A}_{k'}$.*

Ce théorème est très difficile et il n'est démontré que tout à la fin de [9]. On peut remarquer que pour une représentation cuspidale ρ de $\mathrm{GL}(m,\mathbb{A})$ isomorphe à sa contragrédiente, on sait grâce à [20] et [35] que $L(\rho, \mathrm{Sym}^2, s)L(\rho, \wedge^2, s)$ a un pôle d'ordre 1 en $s = 1$ et qu'aucun des deux facteurs n'est nul en ce point ; ainsi une des deux fonctions L et une seule a un pôle en $s = 1$. Avec l'équation fonctionnelle, connue grâce à [35], on peut remplacer $s = 1$ par $s = 0$ dans l'énoncé. L'avantage de considérer $s = 1$ est que la fonction L partielle, c'est-à-dire celle où l'on ne prend que le produit des facteurs L aux places non ramifiées, a un pôle en $s = 1$ si et seulement si la fonction L

en a un ; il suffit donc de connaître la situation aux places non ramifiées pour utiliser le théorème.

4. DESCRIPTION DES FIBRES DE LA CORRESPONDANCE SPHÉRIQUE

4.1. Le théorème de base pour les classifications locales dans le cas non archimédien

Le théorème de base pour toute classification locale est dû à Harris et Taylor, [16] (avec une preuve différente due à Henniart [17]) : ici v est une place non archimédienne de k et on appelle représentation cuspidale une représentation irréductible dont les coefficients matriciels sont à support compact (modulo le centre). On appelle représentation tempérée toute représentation dont les coefficients matriciels sont des fonctions tempérées, c'est-à-dire des fonctions vérifiant une certaine condition de croissance lente.

Théorème 4.1. — *Il existe une bijection uniquement déterminée quand on lui impose d'être compatible aux fonctions L et facteurs ϵ de paires, entre les classes d'isomorphie de représentations cuspidales de* $\mathrm{GL}(n, k_v)$ *et les classes de conjugaison de représentations irréductibles complexes de dimension n de W_{k_v}.*

On note $W'_{k_v} := W_{k_v} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$; c'est le groupe de Weil-Deligne ; le $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ qui est ici n'a rien à voir avec le $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ de la section précédente. Grâce à la description des représentations tempérées (cf. [43]), on obtient

Corollaire 4.2. — *Il existe une bijection (uniquement définie mais on ne précise pas les conditions) entre l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations tempérées de* $\mathrm{GL}(m, k_v)$ *et l'ensemble des classes de conjugaison d'homomorphismes bornés de* W'_{k_v} *dans* $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$.

Cela permet d'obtenir une classification de Langlands de toutes les représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}(n, k_v)$ en utilisant les représentations de dimension n du groupe de Weil-Deligne, W'_{k_v}.

4.2. Classification locale des représentations tempérées

On fixe une place v de k. On n'énonce le théorème que pour les places non archimédiennes où il est à nouveau dû à [9].

Théorème 4.3. — *On suppose que v est une place non archimédienne. Il existe une bijection entre les classes d'isomorphie de représentations tempérées de $G(k_v)$ et les couples formés d'une classe de conjugaison de morphismes de W'_{k_v} dans ${}^LG$ d'image bornée et d'un caractère du groupe des composantes du centralisateur de ce morphisme dans G^*, dont la restriction au centre de G^* est trivial. Cette bijection est uniquement* *déterminée en lui imposant de satisfaire aux diverses fonctorialités, les fonctorialités endoscopiques et la fonctorialité vers* $\mathrm{GL}(n_G^*, k_v)$.

Les morphismes considérés ont une restriction à $SL(2,\mathbb{C})$ qui est un morphisme algébrique et on dit qu'ils sont bornés quand leur restriction à W_{k_v} est bornée au sens usuel.

L'énoncé est évidemment bien trop imprécis dans sa deuxième partie et la construction n'est pas canonique pour les groupes $\mathrm{SO}(2n, k_v)$; disons que les fonctorialités endoscopiques viennent par exemple si $G(k_v) = \mathrm{Sp}(2n, k_v)$ de tous les groupes produits $\mathrm{Sp}(2n', k_v) \times \mathrm{SO}(2n'', k_v)$ (les deux formes de groupes de $\mathrm{SO}(2n'', k_v)$ vues ici) tels que $n = n' + n''$; le groupe dual d'un tel produit est $\mathrm{SO}(2n'+1, \mathbb{C}) \times \mathrm{O}(2n'', \mathbb{C})$ qui s'envoie naturellement dans $\mathrm{SO}(2n+1, \mathbb{C})$ (cf. [41], 1.8). À toute fonctorialité est associée une égalité de traces, pour des sommes convenables de représentations, qu'il est impossible d'écrire simplement. Cela donne suffisamment d'équations pour déterminer les traces de toutes représentations tempérées, avec une petite difficulté pour les groupes $\mathrm{SO}(2n, k_v)$ où il est difficile, et en fait sans doute non canonique, de séparer une représentation de son image par l'automorphisme extérieur ; il faut ajouter un choix supplémentaire (cf. [9] 8.4).

Cette classification s'étend de façon quasi immédiate à des représentations un peu plus générales qui sont celles qui par la fonctorialité vers $\mathrm{GL}(n_G^*, k_v)$ sont presque tempérées au sens que la décroissance des exposants est inférieure strictement à $1/2$ (en un sens convenable) ; ceci ne sert que pour pallier le fait que l'on ne connaît pas la conjecture de Ramanujan pour les représentations cuspidales unitaires de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{A})$ et pour avoir quand même le corollaire qui suit.

On rappelle que, pour les places archimédiennes, la classification de Langlands est connue depuis bien plus longtemps ([24]) ; le groupe W'_{k_v} est simplement W_{k_v}, c'est-à-dire $\mathbb{C}^*$ si $k_v = \mathbb{C}$ et une extension non triviale de $\mathbb{C}^*$ par $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ si $k_v = \mathbb{R}$. Le théorème énoncé ci-dessus est alors essentiellement vrai en une telle place, sauf que dans cette formulation un peu simpliste, il n'y a pas de surjectivité, mais c'est un problème bien compris.

Corollaire 4.4. — *On revient à la situation globale ; soit* π *une représentation de carré intégrable irréductible de* $G(\mathbb{A})$ *et on suppose que la représentation* π^{GL}*, qui lui est associée par la fonctorialité sphérique, a un paramètre* $(\rho_i, a_i; i \in [1,t])$ *tel que* $a_i = 1$ *pour tout* i*. Alors en toute place* v*,* π_v^{GL} *a pour paramètre local l'image du paramètre de* π_v *par l'inclusion naturelle de* ${}^LG$ *dans* $\mathrm{GL}(n_G^*, \mathbb{C})$.

Pour les places non archimédiennes, c'est essentiellement dans les définitions et pour les places archimédiennes, c'est un travail récent de Mezo ([26]). Évidemment le caractère du groupe des composantes du centralisateur disparaît pour $\mathrm{GL}(n)$ et il y a donc, déjà dans ce cas, une infinité de représentations de $G(\mathbb{A})$ qui ont même image dans la fonctorialité vers $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A})$ (au moins en général).

On peut dire que dans ce cas, la correspondance globale est compatible aux correspondances locales. Dès que l'un des $a_i > 1$, cela devient faux, d'où la nécessité d'introduire une autre paramétrisation des représentations en paquets, malheureusement non disjoints en général, et qui eux se correspondront correctement.

4.3. Paquets d'Arthur, paramètres

On revient à la situation de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{A})$; soit π une représentation irréductible de carré intégrable de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{A})$. On lui a associé, en 3.1, une décomposition $m = da$ et une représentation cuspidale unitaire irréductible de $\mathrm{GL}(d, \mathbb{A})$. En toute place v, on considère le paramètre de Langlands de ρ_v, c'est-à-dire un morphisme ϕ_{ρ_v} de W'_{k_v} dans $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$. En faisant le produit tensoriel de cette représentation de W'_{k_v} avec la représentation de dimension a de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ on obtient un morphisme $\psi_{\rho_v,a}$ de -$W'_{k_v} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$. Si la conjecture de Ramanujan est vraie, la représentation ρ_v est tempérée et donc ϕ_{ρ_v} est d'image bornée ; on ne connaît pas cette conjecture mais on en a une approximation ; les exposants de ρ_v sont de décroissance certainement inférieure à $1/2$. Mais ainsi, on sait que le paramètre de Langlands de π_v n'est autre que $\psi_{\rho_v,a} \circ \iota$ où ι est l'inclusion de W'_{k_v} dans $W'_{k_v} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ donnée par

$$\forall (w, s) \in W'_{k_v} = W_{k_v} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}), \iota(w, s) = \left(w, s, \begin{pmatrix} \|w\|^{1/2} & 0 \\ 0 & \|w\|^{-1/2} \end{pmatrix} \right).$$

Et réciproquement, pour ces représentations π_v, on déduit la représentation de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ de la décroissance des exposants de façon unique et le paramètre de Langlands de π_v donne donc de façon unique le morphisme $\psi_{\rho_v,a}$.

Puisque l'on s'intéresse aux représentations induites de représentations de carré intégrable, on considère des sommes de tels paramètres, c'est-à-dire $\oplus_{i \in [1,t]} \psi_{\rho_i,a_i}$ qui est un morphisme de $W'_{k_v} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}(\sum_{i \in [1,t]} d_i a_i, \mathbb{C})$.

Définition 4.5. — *Un tel morphisme de $W'_{k_v} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}(n^*_G, \mathbb{C})$ est un paramètre d'un A-paquet pour $G(k_v)$ si et seulement si son image est incluse (à conjugaison près) dans ${}^L G$. Un A-paramètre est la donnée d'un morphisme, ψ, comme cidessus et d'un caractère du groupe des composantes du centralisateur dans ${}^L G$ de ψ ; on demande que le caractère soit trivial sur le centre de ${}^L G$.*

On a expliqué la situation dans le cas des places non archimédiennes mais hormis le fait qu'il n'y a pas de représentations cuspidales sauf pour $\mathrm{GL}(1, k_v)$, toutes les constructions s'appliquent avec $W'_{k_v} = W_{k_v}$ si v est une place archimédienne.

4.4. Représentations associées à un A-paramètre

On appelle représentation virtuelle, unitaire, à coefficients dans $\mathbb{N}$ une somme de représentations irréductibles unitaires comptées avec une multiplicité.

Théorème 4.6 ([9]). — *Soit v une place de k. À tout A-paramètre (avec des restrictions sur le caractère si v est archimédienne) est associée une représentation virtuelle, unitaire, à coefficients dans $\mathbb{N}$. Cette application est compatible à la fonctorialité vers $\mathrm{GL}(n, k_v)$ et aux fonctorialités endoscopiques (cf. 4.2). Si dans le A-paramètre la représentation de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ est triviale, alors on retrouve la classification des représentations tempérées.*

Soit π une représentation de carré intégrable de $G(\mathbb{A})$; on a défini par la fonctorialité sphérique π^{GL}. En toute place v on a défini un paramètre ψ_v, morphisme de $W'_{k_v} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}(n_G^*, \mathbb{C})$. Ce paramètre est à valeurs à conjugaison près, dans ${}^L G$ et pour toute place v de k la composante locale π_v de π apparaît dans l'une des représentations virtuelles du théorème précédent pour un bon choix de caractère ϵ_v, ψ_v étant le A-paramètre de la composante π_v^{GL} de π^{GL} ; ceci est repris avec plus de précision ci-dessous en 4.6.

Aux places non archimédiennes, on peut décrire ces représentations, hormis pour $SO(2n, k_v)$ où ce qui suit n'est vrai que pour $O(2n, k_v)$; en particulier pour ψ_v le paramètre d'un A-paquet, les représentations associées à un caractère n'ont pas de multiplicité et sont disjointes pour deux caractères différents. Par contre une même représentation peut apparaître dans plusieurs A-paquets distincts, c'est typiquement le cas des représentations cuspidales de $G(k_v)$ quand leur paramètre en 4.2 est non trivial sur $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Aux places archimédiennes, la situation n'est pas comprise complètement, bien que l'on pense que ces représentations sont les mêmes que celles définies par Adams, Barbash et Vogan dans [2].

4.5. Un dernier ingrédient avant la description complète

Soit π^{GL} une représentation irréductible de $\mathrm{GL}(n_G^*, \mathbb{A})$ induite de représentations de carré intégrable ; on lui a donc associé un ensemble $(\rho_i, a_i; i \in [1, t])$ et pour $i \in [1, t]$, ρ_i est une représentation cuspidale unitaire de $\mathrm{GL}(d_i, \mathbb{A})$. On identifie $\times_{i \in [1,t]} \mathrm{GL}(a_i d_i)$ au sous-groupe des matrices diagonales par blocs de $\mathrm{GL}(n_G^*)$ et pour tout $i \in [1, t]$, on note s_i l'élément de ce sous-groupe qui a tous ses blocs égaux à 1 sauf le i-ième qui vaut -1. On note $\mathcal{S}_{\pi^{\mathrm{GL}}}$ le groupe engendré par ces éléments.

Arthur définit un caractère, $\epsilon_{\pi^{\mathrm{GL}}}$, de ce groupe en [9] 1.5.2 (et (1.5.6), (1.5.7)) ce qui est conjecturalement équivalent à la définition générale de [5], [4] ; la différence est qu'ici on utilise directement les fonctions L des représentations cuspidales des groupes linéaire alors qu'en [5] et [4], le groupe linéaire n'est présent que via une fonctorialité conjecturale. On peut traduire la définition de [9] en (sauf erreur de ma part)

$$\forall i \in [1, t], \epsilon_{\pi^{\mathrm{GL}}}(s_i) = \prod_{j \in [1,t]; a_j \not\equiv a_i [2]} \epsilon(\rho_i \times \rho_j, 1/2)^{\inf(a_i, a_j)},$$

où les facteurs ϵ du membre de droite sont ceux de [19] page 371 équation (15). En particulier $\epsilon_{\pi^{\mathrm{GL}}}(\prod_{i \in [1,t]} s_i) = 1$.

4.6. Description des représentations de carré intégrable de $G(\mathbb{A})$

On reprend les notations de 4.5. En toute place v, grâce à la composante locale π_v^{GL} on définit le morphisme ψ_v de $W'_{k_v} \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}(n_G^*,\mathbb{C})$. On a vu qu'un des résultats de [9] est que, quitte à conjuguer, en la place v, l'inclusion de ${}^LG$ dans $\mathrm{GL}(n_G^*,\mathbb{C})$, ψ_v est à valeurs dans ${}^LG$. Et il n'est pas difficile de voir que $\mathcal{S}_{\pi^{\mathrm{GL}}}$ est naturellement inclus dans le centralisateur de ψ_v dans ${}^LG$ pour tout v sauf si ${}^LG = SO(2n+1,\mathbb{C})$ où il faut prendre le centralisateur dans $O(2n+1,\mathbb{C})$; pour nous cela revient au même puisque dans ce dernier cas, on ajoute un élément du centre de $O(2n+1,\mathbb{C})$ et que l'on ne considère que les caractères triviaux sur le centre de ${}^LG$. On peut donc restreindre à $\mathcal{S}_{\pi^{\mathrm{GL}}}$ tout caractère du centralisateur de ψ_v dans ${}^LG$.

On fixe un ensemble fini, S, de places de k contenant les places archimédiennes et tel que pour tout v non dans S la représentation π_v^{GL} est non ramifiée et que l'extension k'_v de k_v, quand elle existe, est, elle aussi, non ramifiée. Pour tout v non dans S, on note π_v l'unique représentation non ramifiée de $G(k_v)$ déterminée par le paramètre de π_v^{GL} et pour tout $v \in S$, on fixe un caractère ϵ_v du centralisateur de ψ_v dans ${}^LG$ et une composante irréductible de la représentation virtuelle unitaire associée à (ψ_v, ϵ_v).

Théorème 4.7. — *La représentation produit tensoriel restreint $\pi := \otimes'_v \pi_v$ se réalise comme sous-représentation irréductible de $L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))$ si et seulement si*

$$\forall s \in \mathcal{S}_{\pi^{\mathrm{GL}}}, \prod_{v\in S} \epsilon_v(s) = \epsilon_{\pi^{\mathrm{GL}}}(s).$$

Pour avoir une description complète du spectre discret de $G(\mathbb{A})$, il manque la multiplicité avec laquelle cette représentation intervient. Cette multiplicité est théoriquement connue grâce à [9] pour tous les groupes $\mathrm{Sp}(2n)$ et $\mathrm{SO}(2n+1)$; le résultat n'est pas complet pour $\mathrm{SO}(2n)$. Cette multiplicité est le produit pour toutes les places $v \in S$ des coefficients avec lequel π_v intervient dans la représentation virtuelle associée à ψ_v, ϵ_v, à condition toutefois que ces représentations virtuelles soient disjointes quand ϵ_v varie. Le problème reste de calculer ces nombres aux places archimédiennes.

Une conjecture raisonnable est que la multiplicité est un pour les groupes $\mathrm{Sp}(2n)$, $\mathrm{SO}(2n+1)$ et pour les représentations ayant de la cohomologie à l'infini.

4.7. Quelques compléments

Les résultats de [9] ne sont pas limités aux groupes considérés ici mais sont valides aussi pour tous les groupes orthogonaux et bien plus généralement pour ce que l'on appelle les formes intérieures de tels groupes.

Les méthodes développées dans [9] sont générales et doivent s'étendre sans problème aux groupes unitaires et à leurs formes intérieures (en [31], C. P. Mok le fait déjà pour les formes quasi-déployées) et aux groupes GSpin.

Toutefois, il faut signaler que ces résultats, même les résultats locaux, reposent sur ce que l'on appelle la stabilisation de la formule des traces ; la stabilisation de la formule des traces ordinaires est faite dans [6], [7] et [8] mais on a aussi besoin d'une variante tordue qui est en cours mais qui n'est pas achevée (un certain nombre d'étapes se trouvent en [42]). On rappelle aussi que tout ceci n'est possible que parce que l'on sait comparer des traces de représentations sur des groupes différents ; pour cela il faut avoir des correspondances entre des fonctions sur ces différents groupes, ce que l'on appelle le transfert. On renvoie à [9] 2.1 pour un historique de la solution à ce problème très difficile, le résultat crucial étant celui de Ngô [32].

D'autres méthodes ont été développées pour obtenir la fonctorialité sphérique : en partant du groupe $\mathrm{GL}(n_G^*)$ et en redescendant à G, c'est la méthode de descente qui donne des réalisations explicites de la fonctorialité mais pas pour toutes les représentations de G. Cette méthode est due à Ginzburg, Rallis et Soudry (cf. [36] avec toutes les références qui s'y trouvent).

En ce moment, L. Lafforgue ([22]) reprend les idées de Cogdell, Jacquet, Shalika et Piatetski-Shapiro (cf. en particulier [13]) pour construire cette fonctorialité en famille de façon à trouver un noyau. Il montre que la construction de ce noyau est équivalent à l'existence d'une formule de Poisson (conjecturale) qu'il appelle non linéaire.

5. UN EXEMPLE

Les travaux menés en [9] l'avaient été dans un cadre beaucoup plus restreint pour les groupes unitaires $U(3)$ par J. Rogawski en [33] [34] ; la formule de multiplicité conjecturée en [5] y était démontrée toutefois avec un ingrédient, les séries theta, non généralisable pour des groupes de rang plus grand que $U(3)$. Cela marque le fait que pour résoudre l'ensemble des difficultés, il faut pouvoir travailler avec tous les groupes évoqués ici simultanément (pour les groupes unitaires, il faut considérer tous les groupes unitaires quelle que soit la parité de la dimension de l'espace unitaire). C'est ce qui est fait de façon cruciale dans les chapitres 5 et 6 de [9], spécialement dans 5.3.

Un exemple analogue à celui de [33] dans le cadre considéré ici concerne le groupe $Sp(4)$. On fixe une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$, notée ρ. On suppose que $L(\rho,\wedge^2,s)$ a un pôle en $s=1$. On note 1 la représentation triviale de $\mathbb{A}^*$ et on a un A-paramètre pour $Sp(4)$ en considérant l'ensemble $\{(\rho,2),(1,1)\}$, ou en d'autres termes la représentation π^{GL} de $\mathrm{GL}(5,\mathbb{A})$ induite de la représentation de carré intégrable de $\mathrm{GL}(4,\mathbb{A})$ obtenu avec le couple $(\rho,2)$ (cf. 3.1) et le caractère trivial de $\mathbb{A}^*$; cette représentation est dans l'image de la fonctorialité sphérique pour $Sp(4)$ puisque toutes les conditions de 3.3 sont satisfaites.

On décrit en chaque place les représentations dans le A-paquet associé ; comme on l'a vu les places archimédiennes posent des difficultés qui devraient pouvoir être résolues dans ce cas simple. Quoi qu'il en soit pour rester dans le cadre connu, on suppose que les places archimédiennes sont des places réelles et que pour une telle place v, la représentation ρ_v est une série discrète n'ayant pas le même caractère infinitésimal que la représentation triviale.

Pour décrire les paramètres en toute place v, il faut connaître ρ_v : on sait que ρ_v est de type symplectique. En presque toute place v non archimédienne, ρ_v est l'induite (nécessairement irréductible) de deux caractères μ, μ' où $\mu' = \mu^{-1}$. Ces caractères sont très certainement unitaires mais on sait uniquement que leur valeur absolue est comprise entre $]-1/2, 1/2[$; cela suffit pour avoir l'irréductibilité de l'induite.

Pour une telle place, le A-paramètre se décrit en composant

$$W'_{k_v} \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}(4,\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{SO}(5,\mathbb{C}), \tag{2}$$

où la première flèche est l'application

$$(w, s, s') \in W_{k_v} \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \mapsto \left(\begin{pmatrix} \mu(w) & 0 \\ 0 & \mu^{-1}(w) \end{pmatrix}, s' \right)$$

où μ est identifié à un caractère de W_{k_v} via la théorie du corps de classes. Le commutant d'un tel morphisme dans $\mathrm{SO}(5,\mathbb{C})$ est soit $\mathbb{C}^*$ (identifié aux groupes des matrices diagonales de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$) si $\mu \neq \mu^{-1}$, soit $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ si $\mu = \mu^{-1}$; cela résulte d'abord du calcul du commutant de la restriction du morphisme à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ qui n'est autre que la première copie de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ écrite. Dans tous les cas le groupe des composantes du centralisateur est trivial ; on n'a donc à considérer que le caractètre trivial de ce centralisateur.

On suppose ensuite que ρ_v n'est pas de la forme précédente mais que v est une place non archimédienne. Le fait que ρ_v soit autoduale force ρ_v à être :

– soit une représentation cuspidale autoduale de $\mathrm{GL}(2, k_v)$,
– soit la représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}(2, k_v)$ tensorisée par un caractère quadratique,
– soit l'induite de deux caractères quadratiques distincts.

La dernière hypothèse est exclue car ρ_v est supposé de type symplectique. Dans les deux premiers cas, la représentation de W'_{k_v} paramétrant ρ_v est irréductible, à valeurs dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et le A-paramètre est du même type que (2) :

$$W'_{k_v} \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}(4,\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{SO}(5,\mathbb{C}), \tag*{(2)$'$}$$

où ici le morphisme de W'_{k_v} dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ représente une représentation irréductible de déterminant un. Et le centralisateur de ce morphisme dans $\mathrm{SO}(5,\mathbb{C})$ est isomorphe à $\{\pm 1\}$, le centre de $\mathrm{SO}(4,\mathbb{C})$. Il y a donc deux caractères possibles pour ce centralisateur, le caractère trivial et l'autre, d'où deux représentations notées $\pi_{v,+}$ et $\pi_{v,-}$.

On suppose maintenant que v est une place réelle et, par hypothèse, on est dans la même situation que ci-dessus ; il y a encore deux caractères du centralisateur à considérer.

La représentation associée au caractère trivial (cf. 4.4) est notée $\pi_{v,+}$ et elle est irréductible, c'est l'unique quotient de Langlands de l'induite à partir du parabolique de sous-groupe de Levi $\mathrm{GL}(2, k_v)$ de $Sp(4, k_v)$ de la représentation $\rho_v|\det|^{1/2}$ que v soit une place archimédienne ou non archimédienne.

On note $\pi_{v,-}$ la représentation de 4.4 correspondant au caractère non trivial quand il existe. Détaillons sa construction dans chaque cas (les calculs sont tirés de [27] et il y a évidemment une formule générale).

On suppose d'abord que v est une place non archimédienne et que ρ_v est une représentation cuspidale. Alors $\pi_{v,-}$ est irréductible et c'est une représentation cuspidale ; dans 4.2, son paramètre est le composé :

$$W'_{k_v} = W_{k_v} \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}(4,\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{SO}(5,\mathbb{C}),$$

$$(w,s) \mapsto (\phi(w), s)$$

où $w \in W_{k_v} \mapsto \phi(w) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est le paramètre de Langlands de ρ_v. Et le centralisateur dans $\mathrm{SO}(5,\mathbb{C})$ de ce paramètre est isomorphe à ± 1 ; la représentation cuspidale, $\pi_{v,-}$ est alors celle qui correspond au caractère non trivial de ce groupe.

On suppose encore que v est une place non archimédienne et maintenant que ρ_v est une série discrète non cuspidale. On note η le caractère quadratique, tel que ρ_v soit le produit tensoriel de $\eta \circ \det$ avec la représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}(2,k_v)$. On suppose d'abord que η est non trivial. Alors $\pi_{v,-}$ est la somme de deux représentations cuspidales irréductibles. Dans la description de 4.2, le paramètre est la représentation de $W'_{k_v} = W_{k_v} \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ obtenu en composant le A-paramètre ψ_v (cf. $(2)'$) avec l'inclusion diagonale de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Concrètement la représentation de W'_{k_v} est :

$$W_{k_v} \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \eta \otimes \mathrm{SO}(3,\mathbb{C}) \oplus \eta \otimes 1 \oplus 1 \hookrightarrow \mathrm{SO}(5,\mathbb{C}), \tag{3}$$

où 1 est systématiquement la représentation triviale et où l'application de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ dans $SO(3,\mathbb{C})$ est la représentation de dimension 3 de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Le centralisateur de ce morphisme dans $\mathrm{O}(5,\mathbb{C})$ est naturellement isomorphe à trois copies de ± 1 et les caractères qui déterminent les représentations cuspidales constituant $\pi_{v,-}$ sont les caractères non triviaux sur la troisième copie de ± 1 et inégaux sur les deux premières copies ; ces caractères sont bien triviaux sur le centre de $\mathrm{O}(5,\mathbb{C})$.

On suppose maintenant que η est le caractère trivial ; alors $\pi_{v,-}$ est irréductible. C'est une représentation tempérée ; on peut la décrire dans la correspondance de 4.2 : le paramètre de la représentation est le morphisme de W'_{k_v} dans $SO(5,\mathbb{C})$ décrit en (3). Mais le commutant dans $SO(5,\mathbb{C})$ de ce paramètre est ici isomorphe à $O(2,\mathbb{C})$. Et la représentation cherchée correspond au caractère non trivial de ce commutant.

On suppose maintenant que v est une place archimédienne. Alors, en anticipant les résultats en cours d'écriture de N. Arancibia, il me semble que $\pi_{v,-}$ est la somme de deux séries discrètes. La situation me semble très semblable à la situation du cas non archimédien avec η non trivial. Sans l'hypothèse que ρ_v a un caractère infinitésimal différent de celui de la représentation triviale, on aurait sans doute aussi un cas analogue au cas considéré ci-dessus, $\eta = 1$.

Le théorème principal de [9] s'énonce dans ce cas très particulier de la façon suivante :

Proposition 5.1. — *On suppose que l'ordre d'annulation de $L(\rho, s)$ en $s = 1/2$ est pair (ce qui inclut le cas de non nullité), (resp. impair). On fixe un ensemble fini S*

de places de k, S étant de cardinal pair (resp. impair) et pour tout $v \in S$, on suppose que ρ_v est de la série discrète et on fixe une composante irréductible de π_{v-}, notée simplement π_v. Alors la représentation $\pi := \otimes'_{v \notin S} \pi_{v,+} \otimes_{v \in S} \pi_v$ se réalise comme une sous-représentation de $L^2(\mathrm{Sp}(4,k)\backslash\mathrm{Sp}(4,\mathbb{A}))$ avec multiplicité exactement 1. *Ces représentations sont toutes cuspidales sauf si $L(\rho, 1/2) \neq 0$ où la représentation correspondant à $S = \varnothing$ n'est pas cuspidale.*

RÉFÉRENCES

[1] J. Adams – *L-functoriality for dual pairs*, Astérisque **171-172** (1989), 85-129.

[2] J. Adams, D. Barbasch & D. Vogan – *The Langlands classication and irreducible characters for real reductive groups*, Progr. Math. 104, Birkhäuser, Boston (1992).

[3] J. Arthur – *On some problems suggested by the trace formula, in Lie Group Representations II*, Lecture Notes in Math. **1041**, Springer-Verlag (1983), 1-49.

[4] J. Arthur – *Unipotent automorphic representations : conjectures*, Astérisque **171-172** (1989), 13-71.

[5] J. Arthur – *Unipotent automorphic representations : global motivation, in Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions*, vol. I, Academic Press, 1990, 1-75.

[6] J. Arthur – *A stable trace formula, I. General expansions*, J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), 175-277.

[7] J. Arthur – *A stable trace formula, II. Global descent*, Invent. Math. **143** (2001), 157-220.

[8] J. Arthur – *A stable trace formula, III. Proof of the main theorems*, Annals of Math. **158** (2003), 769-873.

[9] J. Arthur – *The endoscopic classication of representations : Orthogonal and symplectic groups*, à paraître dans les Proceedings of the International colloquium on Automorphic representations and L-functions, Tata Institute of Fundamental Research, Janvier 2012.

[10] The collected works of James G. Arthur, http://www.claymath.org/cw/arthur/

[11] A.Borel – *Automorphic L-functions*, in Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Sympos. Pure Math. **33**, Part 2, Amer. Math. Soc. (1979), 27-62.

[12] P. Cartier – *Representations of p-adic groups : a survey* in Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Sympos. Pure Math. **33**, Part 1, Amer. Math. Soc. (1979), 111-155.

[13] J. W. Cogdell & I. I. Piatetski-Shapiro – *Converse theorems for* $\mathrm{GL}(n)$, Publ. Math. IHÉS **79** (1994), 157-214.

[14] D. Flath – *Decomposition of representations into tensor products*, in Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Sympos. Pure Math. **33**, Part 1, Amer. Math. Soc. (1979), 179-184.

[15] M. Harris – *Arithmetic applications of the Langlands program*, Japanese J. Math. (3) **5** (2010), 1-71.

[16] M. Harris & R. Taylor – *On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Ann. of Math. Studies **151**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 2001.

[17] G. Henniart – *Une preuve simple des conjectures de Langlands de* $\mathrm{GL}(n)$*sur un corps p-adique*, Invent. Math. **139** (2000), 439-455.

[18] H. Jacquet – *On the residual spectrum of* $\mathrm{GL}(n)$, Lie Group representations II , Lecture Notes in Math. **1041** (1983), 185-208

[19] H. Jacquet, I. Piatetski-Shapiro & J. Shalika – *Rankin-Selberg convolutions*, Amer. J. Math. **105** (1983), 367464.

[20] H. Jacquet & J. Shalika – *On Euler products and the classication of automorphic representations II*, Amer. J. Math. **103** (1981), 777-815.

[21] R. Kottwitz & D. Shelstad – *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque, vol. 255, 1999.

[22] L. Lafforgue – *Noyaux du transfert automorphe de Langlands et formules de Poisson non linéaires*, prépublication Octobre 2012, disponible électroniquement http://www.ihes.fr/∼lafforgue/publications.html

[23] R. Langlands – *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Lecture Notes in Math. **544**, Springer, New York, 1976.

[24] R. Langlands – *On the classification of irreducible representations of real algebraic groups*, in Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups, Math. Surveys Monogr. **31** (1989), 101-170

[25] R. Langlands – *Representations theory of abelian algebraic groups*, disponible électroniquement : http://www.sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/

[26] P. Mezo – *Spectral transfer in the twisted endoscopy of real groups*, prépublication (2013), http://people.math.carleton.ca/∼mezo/spectrans2.pdf

[27] C. Moeglin – *Paquets d'Arthur discrets pour un groupe classique p-adique*, in Automorphic forms and L-functions, II, Local aspects, volume in honor of S. Gelbart, Contemp. Math. **489** (2009), 179-258.

[28] C. Moeglin – *Multiplicité* 1 *dans les paquets d'Arthur aux places p-adiques*, in On Certain L-Functions, Clay Math. Proceedings **13** (2011), 333-374.

[29] C. Moeglin & J.-L. Waldspurger – *Le spectre résiduel de* $\mathrm{GL}(n)$, Ann. Scient. École Norm. Sup. **22** (1989), 605-674.

[30] C. Moeglin & J.-L. Waldspurger – *Spectral decomposition and Eisenstein series*, Cambridge tracts in Math. **113** (1995).

[31] C. P. MOK – *Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups*, Prépublication (2013), http://www.math.mcmaster.ca/∼cpmok/

[32] B. C. NGÔ – *Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie*, Pub. Math. IHÉS **111** (2010), 1-169.

[33] J. ROGAWSKI – *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, Annals of Math. Studies **123**, Princeton Univ. Press (1990).

[34] J. ROGAWSKI – *Multiplicity in A-packets* in The zeta functions of Picard modular surfaces, R. P. Langlands et D. Ramakrishnan editeurs, CRM-Publications, PM013 (1992).

[35] F. SHAHIDI – *On the Ramanujan conjecture and finiteness of poles for certain L-functions*, Annals of Math. **127** (1988), 547-584.

[36] D. SOUDRY – On Langlands functoriality from classical groups to GL_n, Astérisque **298** (2005), 335-390.

[37] B. SPEH – *Unitary representations of* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *with non trivial* (g,K)*-cohomology* Invent. Math. **71** (1983), 443-465.

[38] B. SPEH & D. VOGAN – *Reducibility of generalized principal series representations*, Acta. Math. **145** (1980), 227-299.

[39] M. TADIC – *Classification of unitary representations in irreducible representations of general linear group (non-archimedean case)*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **19** (1986), 335-382.

[40] D. VOGAN – *The unitary dual of* $\mathrm{GL}(n)$ *over an archimedean field*, Invent. Math. **83** (1986), 449-505.

[41] J.-L. WALDSPURGER – *Les facteurs de transfert pour les groupes classiques : un formulaire*, Manuscripta Mathematica **133** (2010), 41-82.

[42] http://www.math.jussieu.fr/∼waldspur

[43] A. ZELEVINSKY – *Induced representations of reductive p-adic groups, II. On irreducible representations of* $\mathrm{GL}(n)$, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **13** (1980), 165-210.

Colette MOEGLIN

CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
2 Place Jussieu
F – 75005 PARIS
E-mail : `moeglin@math.jussieu.fr`