Séminaire BOURBAKI Juin 2013
65ème année, 2012-2013, n$^{\rm o}$ 1073

LA CONJECTURE DE BLOCH-KATO
[d'après M. Rost et V. Voevodsky]

par **Joël RIOU**

Table des matières

DÉFINITION 0.1. — *Pour tout corps commutatif k, on note $K_\star^M(k)$ le quotient de l'algèbre tensorielle sur $\mathbf{Z}$ du groupe abélien $k^\times$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments $x\otimes(1-x)$ pour $x\in k-\{0,1\}$. L'image de $x_1\otimes\cdots\otimes x_q$ dans $K_q^M(k)$ est le symbole noté $\{x_1,\dots,x_q\}$. L'algèbre $K_\star^M(k)$ est l'algèbre de K-théorie de Milnor du corps k. C'est une algèbre commutative au sens gradué.*

Soit $m\geq 1$. Soit k un corps dans lequel m est inversible. Soit $x\in k^\times$. Considérons le sous-schéma $\operatorname{Spec} k[T,T^{-1}]/(T^m-x)$ du groupe multiplicatif $\mathbf{G}_{\rm m}$. C'est un torseur étale sous l'action du schéma en groupes μ_m des racines m-ièmes de l'unité. Il possède donc une classe (x) dans le groupe de cohomologie étale $H^1_{\text{ét}}(k,\mu_m)$. D'après la théorie de Kummer, le morphisme ainsi défini $k^\times/k^{\times m}\to H^1_{\text{ét}}(k,\mu_m)$ est un isomorphisme. Tate a montré que $(x)\cup(1-x)=0\in H^2_{\text{ét}}(k,\mu_m^{\otimes 2})$ pour tout $x\in k-\{0,1\}$ (cf. [15, Lemme 1]). On en déduit un morphisme de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$-algèbres $\oplus_q K_q^M(k)/mK_q^M(k)\to\oplus_q H^q_{\text{ét}}(k,\mu_m^{\otimes q})$.

CONJECTURE 0.2 (Bloch-Kato [5, §3]). — *Soit $m\geq 1$. Soit k un corps dans lequel l'entier m est inversible. Pour tout entier $q\geq 0$, le morphisme canonique*

$$K_q^M(k)/mK_q^M(k)\to H^q_{\text{ét}}(k,\mu_m^{\otimes q})$$

est un isomorphisme.

Le théorème de Merkurjev-Suslin (cas où $q = 2$) a été un des premiers résultats importants sur cette conjecture (cf. [28] et [10]). L'énoncé pour m une puissance de 2 et un poids q arbitraire est la conjecture de Milnor [29, §6], démontrée par Voevodsky (cf. [15] et [38]). La conjecture a été formulée pour la première fois par Kato dans [19, Conjecture 1, §1.1]. Bloch a également conjecturé la surjectivité de l'application de l'énoncé dans le cas des corps contenant un corps algébriquement clos [4, page 5.12]. Ensemble, Bloch et Kato ont obtenu le cas où m est une puissance d'un nombre premier p et k un corps de valuation discrète hensélien de caractéristique zéro dont le corps résiduel est de caractéristique p (cf. [5, Theorem 5.12]).

Le but de cet exposé est de donner des indications sur la démonstration de la conjecture 0.2 par M. Rost et V. Voevodsky. Leurs contributions principales [33] et [42] s'imbriquent dans un raisonnement par récurrence sur le poids q. L'esquisse de la démonstration occupe les §1–7. Quelques applications de la conjecture sont données dans le §8.

Je voudrais remercier Frédéric Déglise et Bruno Kahn pour leur relecture attentive d'une version préliminaire de ce texte, ainsi que Jean-Louis Colliot-Thélène et Alena Pirutka pour leurs suggestions à propos du §8.

1. REFORMULATIONS MOTIVIQUES

La démonstration de la conjecture de Bloch-Kato par Voevodsky et Rost utilise de façon essentielle la cohomologie motivique. Le formalisme des motifs de Voevodsky a été évoqué dans l'exposé de Friedlander [7] et est développé dans les livres [43] et [27]. On se contentera ici de donner une définition de la cohomologie motivique et d'énoncer les propriétés nécessaires pour formuler le théorème 1.23 qui réduit la démonstration de la conjecture de Bloch-Kato à un énoncé d'annulation (conjecture 1.22). Une présentation alternative de ces résultats se trouve dans l'exposé de Kahn [15] sur la conjecture de Milnor.

On fixe un corps de base parfait k.

Définition 1.1. — *On note Sm/k la catégorie des k-schémas lisses et quasi-projectifs. Si X et Y sont deux objets de Sm/k, une correspondance finie $X \rightsquigarrow Y$ est un élément du groupe abélien libre dont les générateurs sont les sous-schémas fermés intègres Z de $X \times_k Y$ tels que le morphisme composé $Z \to X$ soit fini et admette pour image (ensembliste) une composante connexe de X. On peut définir une catégorie $SmCor/k$ ayant les mêmes objets que Sm/k et dont les morphismes soient les correspondances finies.*

Après inversion de l'exposant caractéristique, on peut décrire les correspondances finies comme des différences formelles entre « applications multivaluées » :

Proposition 1.2 ([34, Theorem 6.8]). — *Si $Y \in Sm/k$, on peut considérer pour tout $n \geq 0$ le k-schéma* $\mathrm{Sym}^n Y := Y^n/\mathfrak{S}_n$ *où le quotient par le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$*

est celui de SGA 1 V 2. Le k-schéma $\operatorname{Sym}^\infty Y := \coprod_{n\geq 0} \operatorname{Sym}^n Y$ *est un k-schéma en monoïdes (commutatif). Pour tout* $X \in Sm/k$*, l'ensemble* $\operatorname{Hom}_k(X, \operatorname{Sym}^\infty Y)$ *est donc un monoïde dont on peut noter* $\operatorname{Hom}_k(X, \operatorname{Sym}^\infty Y)^+$ *le complété en groupe. Si on note p l'exposant caractéristique de k, on dispose d'un isomorphisme canonique*

$$\operatorname{Hom}_{SmCor/k}(X,Y) \otimes \mathbf{Z}[1/p] \simeq \operatorname{Hom}_k(X, \operatorname{Sym}^\infty Y)^+ \otimes \mathbf{Z}[1/p] \ .$$

Définition 1.3. — *Soit* $X \in Sm/k$*. On note* $\mathbf{Z}_{tr}(X)$ *le préfaisceau de groupes abéliens sur* Sm/k *défini par* $\mathbf{Z}_{tr}(X)(U) := \operatorname{Hom}_{SmCor/k}(U, X)$*.*

Définition 1.4. — *Soit* $n \geq 0$*. On note* $\mathbf{\Delta}^n := \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[X_0, X_1, \dots, X_n]/(\sum_{i=0}^n X_i - 1)$*. Pour* $n, n' \geq 0$*, toute application* $f \colon \{0,\dots,n\} \to \{0,\dots,n'\}$ *induit naturellement un morphisme* $f_\star \colon \mathbf{\Delta}^n \to \mathbf{\Delta}^{n'}$*. (En particulier,* $\mathbf{\Delta}^\bullet := (n \longmapsto \mathbf{\Delta}^n)$ *est un objet cosimplicial dans la catégorie des schémas.)*

Bien sûr, pour tout $n \geq 0$, on a un isomorphisme (non canonique) $\mathbf{\Delta}^n \simeq \mathbf{A}^n$.

Définition 1.5. — *Soit* $\mathcal{F}$ *un préfaisceau de groupes abéliens sur* Sm/k*. On note* $C_\star\mathcal{F}$ *le complexe de préfaisceaux de groupes abéliens sur* Sm/k *tel que pour tout* $U \in Sm/k$ *et* $n \in \mathbf{N}$*,* $(C_n\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(U \times \mathbf{\Delta}^n)$*, et que la différentielle* $\mathcal{F}(U \times \mathbf{\Delta}^n) \to \mathcal{F}(U \times \mathbf{\Delta}^{n-1})$ *soit donnée par la somme alternée* $\sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^\star$ *des* $n+1$ *faces* $d_i \colon \mathbf{\Delta}^{n-1} \to \mathbf{\Delta}^n$ *:*

$$\dots \to \mathcal{F}(U \times \mathbf{\Delta}^2) \xrightarrow{d_0^\star - d_1^\star + d_2^\star} \mathcal{F}(U \times \mathbf{\Delta}^1) \xrightarrow{d_0^\star - d_1^\star} \mathcal{F}(U) \to 0 \to \dots$$

Définition 1.6. — *Pour tout* $q \geq 0$*, on note* $\widetilde{\mathbf{Z}_{tr}}\mathbf{G}_m^{\wedge q}$ *le faisceau abélien sur* Sm/k *pour la topologie de Zariski quotient de* $\mathbf{Z}_{tr}(\mathbf{G}_m^q)$ *par le sous-faisceau engendré par les images des q morphismes* $\mathbf{Z}_{tr}(\mathbf{G}_m^{q-1}) \to \mathbf{Z}_{tr}(\mathbf{G}_m^q)$ *induits par les inclusions* $i_s \colon \mathbf{G}_m^{q-1} \to \mathbf{G}_m^q$ *pour* $1 \leq s \leq q$ *définies par* $i_s(x_1,\dots,x_{q-1}) = (x_1,\dots,x_{s-1},1,x_s,\dots,x_{q-1})$*.*

Définition 1.7. — *Pour tout* $q \geq 0$*,* $\mathbf{Z}(q)$ *est le complexe de faisceaux sur* Sm/k *pour la topologie de Zariski défini par la formule*

$$\mathbf{Z}(q) := C_\star \widetilde{\mathbf{Z}_{tr}}\mathbf{G}_m^{\wedge q}[-q] \ .$$

Pour $q < 0$*, on pose* $\mathbf{Z}(q) := 0$*. On pourra considérer* $\mathbf{Z}(q)$ *comme un objet de la catégorie dérivée* $\mathrm{D}(Sm/k_{Zar})$ *des faisceaux de groupes abéliens sur le grand site* Sm/k_{Zar} *constitué de la catégorie* Sm/k *munie de la topologie de Zariski.*

Définition 1.8. — *Pour tous* $X \in Sm/k$*,* $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$ *et tout groupe abélien A, le groupe de cohomologie motivique* $H^{p,q}(X,A)$*, aussi noté* $H^p(X, A(q))$*, est le groupe d'hypercohomologie* $\mathbf{H}^p_{Zar}(X, A(q))$ *où* $A(q) := \mathbf{Z}(q) \otimes A$*. L'hypercohomologie est prise ici pour la topologie de Zariski ; il reviendrait au même de considérer la topologie de Nisnevich (cf.* [22] *où elle est appellée « topologie hensélienne »).*

THÉORÈME 1.9 ([37]). — *Soit $X \in Sm/k$. Les groupes de cohomologie motivique de X sont isomorphes aux groupes de Chow supérieurs définis par Bloch, c'est-à-dire que pour tout $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$, on a un isomorphisme :*

$$H^p(X, \mathbf{Z}(q)) \simeq CH^q(X, 2q-p) \ .$$

En particulier, pour tout $q \in \mathbf{Z}$, $H^{2q}(X, \mathbf{Z}(q)) \simeq CH^q(X)$.

COROLLAIRE 1.10. — *Soit $X \in Sm/k$. Pour $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$, le groupe $H^p(X, \mathbf{Z}(q))$ est nul dans les cas suivants :*

(a) $q < 0$;
(b) $p > 2q$;
(c) $p > q + \dim X$.

Seul (b) est un corollaire du théorème 1.9. L'énoncé (a) résulte de la définition et (c) de la borne sur la dimension cohomologique Zariski de X due à Grothendieck.

THÉORÈME 1.11 ([43, Corollary 3.4.3, Chapter V]). — *Il existe des isomorphismes canoniques dans* $\mathrm{D}(Sm/k_{Zar})$ *:*

$$\mathbf{Z}(0) \simeq \mathbf{Z} \ , \qquad \mathbf{Z}(1) \simeq \mathbf{G}_m[-1] \ ,$$

où $\mathbf{Z}$ est le faisceau constant. Ainsi, si $X \in Sm/k$, $H^0(X, \mathbf{Z}(0)) \simeq \mathbf{Z}^{\pi_0(X)}$ et c'est le seul groupe de cohomologie motivique de poids 0 *qui puisse être non nul. En poids* 1*, les seuls groupes qui puissent être non nuls sont $H^1(X, \mathbf{Z}(1)) \simeq \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times)$ et $H^2(X, \mathbf{Z}(1)) \simeq \mathrm{Pic}(X)$.*

Si $X \in Sm/k$ est une variété intègre dont on note K le corps des fonctions rationnelles, on peut définir les groupes de cohomologie motivique $H^p(K, A(q))$ de K en prenant la limite inductive des groupes $H^p(U, A(q))$ où U parcourt l'ensemble ordonné des ouverts non vides de X. Cette définition ne dépend que de K et par passage à la limite inductive on peut définir la cohomologie motivique de toute extension K de k. Le choix du sous-corps parfait k n'ayant aucune influence, les groupes obtenus ne dépendent véritablement que du corps K.

PROPOSITION 1.12 ([27, Lecture 5]). — *Soit L un corps. Il existe un isomorphisme canonique pour tout $q \in \mathbf{N}$:*

$$K_q^M(L) \simeq H^q(L, \mathbf{Z}(q)) \ .$$

Pour tout $m \geq 1$, cet isomorphisme induit un isomorphisme $K_q^M(L)/mK_q^M(L) \simeq H^q(L, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}(q))$.

On va se contenter ici d'expliquer en quoi il est plausible que ces deux groupes soient liés. Pour simplifier les notations, on suppose que $L = k$. Par définition, $H^q(k, \mathbf{Z}(q)) = \mathbf{H}^0_{\mathrm{Zar}}(\mathrm{Spec}\, k, C_\star \widetilde{\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}} \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge q}})$. Le corps k étant un anneau local, l'hypercohomologie Zariski se calcule trivialement et

$$H^q(k, \mathbf{Z}(q)) \simeq \mathrm{coker}(\widetilde{\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}} \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge q}}((\mathrm{Spec}\, k) \times \mathbf{\Delta}^1) \stackrel{d_0^\star - d_1^\star}{\longrightarrow} \widetilde{\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}} \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge q}}(\mathrm{Spec}\, k)) \ .$$

Le groupe $H^q(k,\mathbf{Z}(q))$ est donc un quotient de $\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^q(\operatorname{Spec} k) = \operatorname{Hom}_{SmCor/k}(\operatorname{Spec} k, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^q)$ qui s'identifie au groupe abélien libre sur l'ensemble des points fermés du k-schéma $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}^q$. Si $y \in \mathbf{G}_{\mathrm{m}}^q$ est un point fermé, le corps résiduel $k(y)$ est une extension finie de k et y correspond à un q-uplet $(y_1,\dots,y_q)$ d'éléments de $k(y)^\times$; on peut associer un élément de $K_q^M(k)$ à y en considérant l'image du symbole $\{y_1,\dots,y_q\}$ par le morphisme de norme $N_{k(y)/k}\colon K_q^M(k(y)) \to K_q^M(k)$ (dont la construction n'a rien d'évident, cf. [3] et [20, §1.7]). On peut montrer que cette construction induit un morphisme $H^q(k,\mathbf{Z}(q)) \to K_q^M(k)$ qui est un isomorphisme.

Définition 1.13. — *On note* $\mathrm{D}(Sm/k_{\acute{e}t})$ *la catégorie dérivée des faisceaux de groupes abéliens sur le grand site étale* $Sm/k_{\acute{e}t}$*. Le foncteur « faisceau étale associé » induit un foncteur* $\alpha^\star\colon \mathrm{D}(Sm/k_{Zar}) \to \mathrm{D}(Sm/k_{\acute{e}t})$*.*

Théorème 1.14 ([43, Proposition 3.3.3, Chapter V]). — *Soit* $q \in \mathbf{N}$*. Soit* A *un groupe abélien de torsion première à l'exposant caractéristique de* k*. L'image du complexe motivique* $A(q)$ *dans la catégorie dérivée des faisceaux étales sur* Sm/k *s'identifie au faisceau constant tordu* $A(q)$*. En particulier, si* $A = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$*, l'image de* $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}(q)$ *dans la catégorie dérivée des faisceaux étales sur* Sm/k *est* $\mu_m^{\otimes q}$*.*

Définition 1.15. — *Pour tous* $X \in Sm/k$*,* $p \in \mathbf{Z}$*,* $q \in \mathbf{N}$ *et tout groupe abélien* A*, on définit le groupe de cohomologie motivique étale* $H^{p,q}_{\text{ét}}(X,A)$ *comme étant le groupe d'hypercohomologie étale* $\mathbf{H}^p_{\text{ét}}(X,A(q))$*. Ces groupes sont aussi notés* $H^p_{\text{ét}}(X,A(q))$ *(cette notation n'induit pas véritablement de confusion d'après le théorème 1.14).*

Tautologiquement, on dispose d'un morphisme de la cohomologie motivique vers la cohomologie motivique étale pour tous $X \in Sm/k$, $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}$:

$$H^{p,q}(X,A) \to H^{p,q}_{\text{ét}}(X,A)\,. \tag{1}$$

D'après la proposition 1.12 et le théorème 1.14, dans le cas où $X = \operatorname{Spec} k$, $A = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ et $p = q$, ce morphisme s'identifie au morphisme considéré dans l'énoncé de la conjecture 0.2 :

$$K_q^M(k)/mK_q^M(k) \to H^q_{\text{ét}}(k,\mu_m^{\otimes q})\ .$$

Il faut donc considérer la conjecture de Bloch-Kato comme signifiant qu'en certains degrés la cohomologie motivique coïncide avec la cohomologie motivique étale. Nous allons maintenant préciser comment ce principe peut se généraliser.

Le foncteur $\alpha^\star\colon \mathrm{D}(Sm/k_{\mathrm{Zar}}) \to \mathrm{D}(Sm/k_{\text{ét}})$ admet un foncteur adjoint à droite $R\alpha_\star\colon \mathrm{D}(Sm/k_{\text{ét}}) \to \mathrm{D}(Sm/k_{\mathrm{Zar}})$. Sa vertu est que si $K \in \mathrm{D}(Sm/k_{\text{ét}})$, alors pour tout $X \in Sm/k$ et $p \in \mathbf{Z}$, $H^p_{\mathrm{Zar}}(X,R\alpha_\star K) \simeq H^p_{\text{ét}}(X,K)$. Le morphisme (1) peut s'interpréter comme étant déduit du morphisme d'adjonction $A(q) \to R\alpha_\star\alpha^\star A(q)$ par application du foncteur $H^p_{\mathrm{Zar}}(X,-)$. Par construction, pour tout $q \in \mathbf{N}$, le complexe $A(q)$ réside en degrés cohomologiques $\leq q$. Par conséquent, le morphisme $A(q) \to R\alpha_\star\alpha^\star A(q)$

se factorise par la troncature $\tau_{\leq q} R\alpha_\star\alpha^\star A(q)$ de $R\alpha_\star\alpha^\star A(q)$. Pour tout complexe $K \in \mathrm{D}(Sm/k_{\mathrm{Zar}})$ et $q \in \mathbf{Z}$, on dispose en effet d'un triangle distingué canonique

$$\tau_{\leq q} K \to K \to \tau_{\geq q+1} K \to \tau_{\leq q} K[1]$$

tel que les faisceaux de cohomologie de $\tau_{\leq q} K$ soient nuls en degrés $> q$ et canoniquement isomorphes à ceux de K en degrés $\leq q$.

Conjecture 1.16 (Beilinson-Lichtenbaum). — *Soit $m \geq 1$ un entier inversible dans le corps parfait k. Pour tout entier $q \in \mathbf{N}$, le morphisme canonique $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}(q) \to \tau_{\leq q} R\alpha_\star\alpha^\star \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}(q)$ est un isomorphisme dans $\mathrm{D}(Sm/k_{Zar})$.*

En utilisant les propriétés formelles de l'hypercohomologie et des troncatures, on peut reformuler la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum en termes du morphisme (1) :

Lemme 1.17. — *La conjecture de Beilinson-Lichtenbaum en un certain poids q et pour des coefficients $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ est satisfaite si et seulement si pour tout $X \in Sm/k$, le morphisme canonique $H^{p,q}(X, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \to H^{p,q}_{\acute{e}t}(X, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ est un isomorphisme pour $p \leq q$. (En outre, ces conditions impliquent que ce morphisme est injectif pour $p = q+1$.)*

D'après ce qui précède, la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum implique la conjecture de Bloch-Kato. Si l'on considère non seulement k mais toutes ses extensions, elle lui devient en fait équivalente et dans l'énoncé de la conjecture de Bloch-Kato, on peut se contenter d'énoncer la surjectivité du morphisme $K^M_q(k)/mK^M_q(k) \to H^q_{\text{ét}}(k, \mu_m^{\otimes q})$:

Théorème 1.18 (Suslin & Voevodsky [35, Theorem 11.4], Geisser & Levine [8, Theorem 1.6], P. Gille [9])

Soit $m \geq 1$ un entier inversible dans le corps (parfait) k. Soit $q \in \mathbf{N}$. On suppose que pour toute extension de corps L/k, le morphisme canonique

$$K^M_q(L)/mK^M_q(L) \to H^q_{\acute{e}t}(L, \mu_m^{\otimes q})$$

est surjectif. Alors, la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum 1.16 est vraie en poids q et à coefficients $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ pour le corps k. En particulier, la conjecture de Bloch-Kato 0.2 est vraie en poids q à coefficients $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ pour toute extension de k.

Définition 1.19. — *Soit $q \in \mathbf{N}$. Pour tout groupe abélien A, on notera ici $C_q(A) \in \mathrm{D}(Sm/k_{Zar})$ le cône du morphisme canonique $A(q) \to R\alpha_\star\alpha^\star A(q)$.*

Proposition 1.20. — *Soit $q \in \mathbf{N}$.*

(i) *La conjecture de Beilinson-Lichtenbaum 1.16 en poids q et à coefficients $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ est équivalente à l'annulation des faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^i C_q(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ pour $i \leq q$.*

(ii) *Toute suite exacte courte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ induit un triangle distingué $C_q(A') \to C_q(A) \to C_q(A'') \to C_q(A')[1]$ dans $\mathrm{D}(Sm/k_{Zar})$.*

(iii) *La conjecture de Beilinson-Lichtenbaum en poids q et à coefficients $\mathbf{Z}/m'\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/m''\mathbf{Z}$ implique la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum à coefficients $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ pour $m = m'm''$.*

(iv) $C_q(\mathbf{Q}) \simeq 0$.

Pour les énoncés qui suivent, on suppose fixé un nombre premier ℓ différent de la caractéristique de k. On note $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ le localisé de $\mathbf{Z}$ en l'idéal premier engendré par ℓ.

(v) $C_q(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}_{(\ell)}) \simeq C_q(\mathbf{Z}_{(\ell)})[1]$.

(vi) *La conjecture de Beilinson-Lichtenbaum en poids q et à coefficients $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ est satisfaite si et seulement si le morphisme canonique $\mathbf{Z}_{(\ell)}(q) \to \tau_{\leq q+1} R\alpha_\star \alpha^\star \mathbf{Z}_{(\ell)}(q)$ est un isomorphisme.*

Les énoncés (i) et (ii) sont tout à fait formels et impliquent évidemment (iii). L'énoncé (iv) signifie qu'à coefficients rationnels, il n'y a pas de différence entre la cohomologie motivique et la cohomologie motivique étale. Ceci résulte d'une part du fait non trivial que la cohomologie motivique puisse se calculer indifféremment en utilisant la topologie de Zariski ou la topologie de Nisnevich, et d'autre part du résultat de l'exercice suivant :

Exercice 1.21. — *Soit $X \in Sm/k$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels sur $X_{\text{ét}}$. Montrer que l'application canonique $H^i_{Nis}(X, \mathcal{F}) \simeq H^i_{ét}(X, \mathcal{F})$ est un isomorphisme pour tout $i \geq 0$. (Indication : montrer qu'une résolution injective de $\mathcal{F}$ dans la catégorie des faisceaux étales de $\mathbf{Q}$-vectoriels est aussi une résolution injective dans celle des faisceaux Nisnevich. On rappelle que pour tout $x \in X$ et toute extension finie séparable $\kappa'/\kappa(x)$, l'« évaluation » des faisceaux en le hensélisé de X en x par rapport à $\kappa'/\kappa(x)$ définit un foncteur fibre sur la catégorie des faisceaux sur X_{Nis} et que l'on obtient ainsi une famille conservative de foncteurs fibres.*

En appliquant (ii) à la suite exacte $0 \to \mathbf{Z}_{(\ell)} \to \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}_{(\ell)} \to 0$, on obtient un triangle distingué $C_q(\mathbf{Z}_{(\ell)}) \to C_q(\mathbf{Q}) \to C_q(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}_{(\ell)}) \to C_q(\mathbf{Z}_{(\ell)})[1]$. L'énoncé (iv) fournit alors l'isomorphisme $C_q(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}_{(\ell)}) \xrightarrow{\sim} C_q(\mathbf{Z}_{(\ell)})[1]$ énoncé en (v).

Établissons (vi). Si la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum est vraie en poids q et à coefficients $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$, d'après (iii), elle est aussi vraie en poids q et à coefficients $\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}$ pour tout $n \geq 1$. D'après (i), cela signifie que les faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^i C_q(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$ sont nuls pour $i \leq q$ pour tout $n \geq 1$. Comme $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}_{(\ell)}$ est la limite inductive (filtrante) des groupes $\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}$ pour $n \geq 1$, on en déduit que pour tout $i \leq q$, le faisceau $\mathcal{H}^i C_q(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}_{(\ell)})$ est nul. D'après (v), on obtient l'annulation des faisceaux $\mathcal{H}^i C_q(\mathbf{Z}_{(\ell)})$ pour $i \leq q+1$, une propriété qui se reformule en disant que le morphisme canonique $\mathbf{Z}_{(\ell)}(q) \to \tau_{\leq q+1} R\alpha_\star \alpha^\star \mathbf{Z}_\ell(q)$ est un isomorphisme. Inversement, si les faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^i C_q(\mathbf{Z}_{(\ell)})$ sont nuls pour $i \leq q+1$, on peut appliquer (ii) à la suite exacte $0 \to \mathbf{Z}_{(\ell)} \xrightarrow{\ell} \mathbf{Z}_{(\ell)} \to \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \to 0$. On obtient ainsi un triangle distingué

$$C_q(\mathbf{Z}_{(\ell)}) \xrightarrow{\ell} C_q(\mathbf{Z}_{(\ell)}) \to C_q(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to C_q(\mathbf{Z}_{(\ell)})[1] \,.$$

De la suite exacte longue que l'on en déduit au niveau des faisceaux de cohomologie, on déduit l'annulation des faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^i C_q(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ pour tout $i \leq q$, ce qui équivaut à la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum en poids q et à coefficients $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ d'après (i).

Si la conjecture de Bloch-Kato (ou de Beilinson-Lichtenbaum) est vraie en poids q et à coefficients $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$, l'énoncé (vi) de la proposition précédente montre que la conjecture suivante est satisfaite :

Conjecture 1.22. — *Soit $q \in \mathbf{N}$. Soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k. Pour toute extension L du corps de base k, le groupe de cohomologie motivique étale $H^{q+1,q}_{\text{ét}}(L, \mathbf{Z}_{(\ell)})$ est nul.*

Théorème 1.23. — *Soit $q \in \mathbf{N}$. Soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de k. Si la conjecture d'annulation 1.22 est satisfaite, alors les conjectures de Bloch-Kato et de Beilinson-Lichtenbaum sont satisfaites en poids q et à coefficients $\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}$ pour tout $n \geq 1$.*

Soit L une extension de k. Considérons le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} H^{q,q}(L, \mathbf{Q}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{q,q}_{\text{ét}}(L, \mathbf{Q}) \arrow[d] \\ H^{q,q}(L, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}_{(\ell)}) \arrow[r] & H^{q,q}_{\text{ét}}(L, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}_{(\ell)}) \end{tikzcd}$$

En utilisant la suite exacte longue des coefficients universels associée à la suite exacte $0 \to \mathbf{Z}_{(\ell)} \to \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}_{(\ell)} \to 0$, l'annulation formulée dans la conjecture 1.22 implique que, dans le carré, la flèche de droite $H^{q,q}_{\text{ét}}(L, \mathbf{Q}) \to H^{q,q}_{\text{ét}}(L, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}_{(\ell)})$ est surjective. Comme la flèche du haut $H^{q,q}(L, \mathbf{Q}) \to H^{q,q}_{\text{ét}}(L, \mathbf{Q})$ est bijective, on en déduit que la flèche du bas $H^{q,q}(L, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}_{(\ell)}) \to H^{q,q}_{\text{ét}}(L, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}_{(\ell)})$ est surjective. En utilisant une variante du théorème 1.18 pour des coefficients $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}_{(\ell)}$, on obtient un isomorphisme du type Beilinson-Lichtenbaum à coefficients $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}_{(\ell)}$: $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}_{(\ell)}(q) \simeq \tau_{\leq q} R\alpha_\star\alpha^\star \mathbf{Q}/\mathbf{Z}_{(\ell)}$. Avec les notations de la proposition 1.20, cela signifie que les faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^i C_q(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}_{(\ell)})$ sont nuls pour $i \leq q$. D'après la partie (v) de la proposition 1.20, cela signifie aussi que les faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^i C_q(\mathbf{Z}_{(\ell)})$ sont nuls pour $i \leq q+1$, c'est-à-dire que le morphisme canonique $\mathbf{Z}_{(\ell)}(q) \to \tau_{\leq q+1} R\alpha_\star\alpha^\star \mathbf{Z}_{(\ell)}(q)$ est un isomorphisme, ce qui implique la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum en poids q et à coefficients $\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}$ pour tout $n \geq 1$ d'après les parties (vi) et (iii) de la proposition 1.20.

2. STRATÉGIE DE LA DÉMONSTRATION

Dans l'énoncé de la conjecture de Bloch-Kato 0.2 selon laquelle pour tout corps k, tout entier m inversible dans k et tout poids $q \in \mathbf{N}$, le morphisme canonique $K^M_q(k)/mK^M_q(k) \to H^q_{\text{ét}}(k, \mu_m^{\otimes q})$ est un isomorphisme, si le corps k n'est pas parfait, ni la source ni le but du morphisme ne changent quand on remplace le corps k par sa clôture parfaite. On peut donc supposer que k est parfait. Si k est parfait de caractéristique $p > 0$, l'énoncé pour le corps des fractions de l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt implique l'énoncé pour k (cf. [15, Proposition 1.2]). On peut donc supposer que

k est de caractéristique zéro. D'après le §1, on peut supposer que m est un nombre premier ℓ.

Pour démontrer la conjecture de Bloch-Kato en poids q, il suffit d'après le théorème 1.23 de démontrer la conjecture d'annulation 1.22, c'est-à-dire que pour tout nombre premier ℓ et tout corps de caractéristique zéro, le groupe de cohomologie motivique étale $H^{q+1,q}_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)})$ est nul (ce qui revient d'ailleurs à énoncer que $H^{q+1,q}_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z})$ est nul). Ceci est évidemment vrai si $q = 0$, et si $q = 1$ cela résulte de l'isomorphisme $H^{2,1}_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}) \simeq H^1_{\text{ét}}(k, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ (cf. théorème 1.11) et du théorème de Hilbert 90 qui énonce que ce groupe est nul.

Nous allons donc fixer une fois pour toutes un entier $q \geq 2$ et un nombre premier ℓ. On suppose que la conjecture de Bloch-Kato est vraie en poids $< q$ et on se propose de démontrer que $H^{q+1,q}_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)})$ est nul pour tout corps de caractéristique zéro k. (Cette hypothèse de récurrence sera une hypothèse implicite dans la plupart des énoncés qui vont suivre.)

La stratégie de démonstration repose sur les deux théorèmes suivants :

Théorème 2.1 ([38, Theorem 5.9]). — *Soit k un corps de caractéristique zéro dont le groupe de Galois absolu soit un pro-ℓ-groupe et tel que $K^M_q(k)/\ell K^M_q(k) = 0$. Alors, $H^{q,q}_{\acute{e}t}(k, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) = 0$.*

Théorème 2.2. — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_q)$ un q-uplet d'éléments de $k^\times$. Il existe une extension $k_{\underline{a}}$ de k telle que*

- *l'image du symbole $\{a_1, \ldots, a_q\}$ soit nulle dans $K^M_q(k_{\underline{a}})/\ell K^M_q(k_{\underline{a}})$;*
- *le morphisme $H^{q+1,q}_{\acute{e}t}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)}) \to H^{q+1,q}_{\acute{e}t}(k_{\underline{a}}, \mathbf{Z}_{(\ell)})$ soit injectif.*

Nous ne dirons pas grand'chose sur la démonstration du théorème 2.1 si ce n'est que le cas d'un nombre premier ℓ arbitraire était déjà considéré dans l'article [38] établissant la conjecture de Milnor (cas $\ell = 2$). Nous nous concentrerons jusqu'au §7 sur la démonstration du théorème 2.2. Montrons comment ces deux théorèmes impliquent l'annulation de $H^{q+1,q}_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)})$ pour tout corps k de caractéristique zéro. L'idée, qui était déjà celle de la démonstration du théorème de Merkurjev-Suslin [28] (qui est le cas $q = 2$), consiste à utiliser le théorème 2.2 pour plonger le corps k dans un corps k_∞ de façon à ce que $H^{q+1,q}_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)})$ s'injecte dans $H^{q+1,q}_{\text{ét}}(k_\infty, \mathbf{Z}_{(\ell)})$, que $K^M_q(k_\infty)/\ell K^M_q(k_\infty)$ soit nul et que le groupe de Galois absolu de k_∞ soit un pro-ℓ-groupe. Il ne restera alors plus qu'à montrer l'annulation de $H^{q+1,q}_{\text{ét}}(k_\infty, \mathbf{Z}_{(\ell)})$. Pour cela, on applique le théorème 2.1 qui implique que $H^{q,q}_{\text{ét}}(k_\infty, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ est nul. D'après la suite exacte des coefficients universels, ceci implique que le sous-groupe ${}_\ell H^{q+1,q}_{\text{ét}}(k_\infty, \mathbf{Z}_{(\ell)})$ de $H^{q+1,q}_{\text{ét}}(k_\infty, \mathbf{Z}_{(\ell)})$ annulé par ℓ est nul. On obtient ainsi que le $\mathbf{Z}_{(\ell)}$-module $H^{q+1,q}_{\text{ét}}(k_\infty, \mathbf{Z}_{(\ell)})$ est sans torsion, il se plonge donc dans $H^{q+1,q}_{\text{ét}}(k_\infty, \mathbf{Z}_{(\ell)}) \otimes \mathbf{Q} \simeq H^{q+1,q}_{\text{ét}}(k_\infty, \mathbf{Q}) \simeq H^{q+1,q}(k_\infty, \mathbf{Q})$ qui est nul (cf. corollaire 1.10).

Nous allons maintenant montrer comment le théorème 2.2 permet de construire le plongement $k \subset k_\infty$ annoncé.

Proposition 2.3. — *Soit k un corps parfait. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le corps k n'admet pas d'extension finie non triviale de degré premier à ℓ.*

(ii) *Le degré de toute extension finie de k est une puissance de ℓ.*

(iii) *Le groupe de Galois absolu de k est un pro-ℓ-groupe.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que k est ℓ-spécial.

La seule implication qui mérite un argument est $(i) \Rightarrow (ii)$. Supposons (i). Soit K/k une extension finie. Il s'agit de montrer que $[K : k]$ est une puissance de ℓ. Quitte à remplacer K par une clôture galoisienne, on peut supposer que K/k est galoisienne. Notons $G = \mathrm{Gal}(K/k)$. D'après les théorèmes de Sylow, G possède un ℓ-Sylow $S_\ell \subset G$: S_ℓ est un ℓ-groupe et ℓ ne divise pas $m := \frac{\#G}{\#S_\ell}$. Notons L le sous-corps de K fixé par S_ℓ. On a $[L : k] = m$. Comme ℓ ne divise pas m, la condition (i) montre alors que $L = k$, c'est-à-dire que $m = 1$, donc $[K : k] = \#G = \#S_\ell$ est une puissance de ℓ.

Proposition 2.4. — *Soit k un corps parfait. Il existe une extension algébrique k'/k telle que k' soit ℓ-spécial et que le degré $[k' : k]$, cet entier surnaturel (cf.* [32, I §1.3]*), soit premier à ℓ.*

Soit Ω une clôture algébrique de k. D'après le lemme de Zorn, il existe un k-sous-corps k' de Ω tel que $\ell \nmid [k' : k]$ et qui soit maximal pour cette propriété. D'après le critère (i) de la proposition 2.3, il est évident que k' est ℓ-spécial.

Exercice 2.5. — *Soit k un corps parfait ℓ-spécial de caractéristique différente de ℓ. Montrer que k contient une racine primitive ℓ-ième de l'unité.*

Exercice 2.6. — *Soit k un corps parfait ℓ-spécial. Soit K/k une extension de degré ℓ. Montrer que K/k est galoisienne.*

Lemme 2.7. — *Soit K un corps de caractéristique zéro. Il existe une extension $\tilde{K}$ de K telle que le morphisme $H^{q+1,q}_{\text{ét}}(K, \mathbf{Z}_{(\ell)}) \to H^{q+1,q}_{\text{ét}}(\tilde{K}, \mathbf{Z}_{(\ell)})$ soit injectif et que le morphisme $K^M_q(K)/\ell K^M_q(K) \to K^M_q(\tilde{K})/\ell K^M_q(\tilde{K})$ soit nul.*

On choisit un bon ordre sur l'ensemble $(K^\times)^q$. On obtient ainsi un ordinal γ et une bijection $\gamma \simeq (K^\times)^q$ qui à $\beta \in \gamma$ associe un q-uplet $\underline{a}_\beta = (a_{1,\beta}, \dots, a_{q,\beta})$. On définit par récurrence transfinie une tour d'extensions $(K_\alpha)_{\alpha \in \gamma+1}$ indexée par l'ordinal $\gamma + 1 = \gamma \cup \{\gamma\}$ de la façon suivante :

– $K_0 := K$;
– si α est le successeur d'un ordinal β, K_α est le corps obtenu en appliquant le théorème 2.2 au corps K_β et au symbole $\{a_{1,\beta}, \dots, a_{q,\beta}\}$ associé à $\underline{a}_\beta$;
– si α est un ordinal limite, K_α est la limitive inductive des $K_{\alpha'}$ pour $\alpha' \in \alpha$.

Par construction, le corps $\tilde{K} := K_\gamma$ convient.

Étant donné un corps de caractéristique zéro k, pour conclure l'esquisse de la stratégie de démonstration, nous sommes maintenant en mesure de construire le plongement $k \subset k_\infty$ annoncé. On construit une tour d'extensions $(k_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de la façon suivante. On pose $k_0 := k$. Pour $n \geq 0$, si k_{2n} a déjà été construit, on applique le lemme 2.7 au corps k_{2n} et on pose $k_{2n+1} := \tilde{k}_{2n}$. On applique ensuite la proposition 2.4 au corps k_{2n+1} et on pose $k_{2n+2} = k'_{2n+1}$. On définit enfin k_∞ comme étant la limite inductive des corps k_i pour $i \in \mathbf{N}$. Les applications $H^{q+1,q}_{\text{ét}}(k_i, \mathbf{Z}_{(\ell)}) \to H^{q+1,q}_{\text{ét}}(k_{i+1}, \mathbf{Z}_{(\ell)})$ sont injectives pour i pair d'après le lemme 2.7 et par l'argument de transfert habituel pour i impair puisque les extensions k_{2n+2}/k_{2n+1} sont algébriques et de degré premier à ℓ. Par passage à la limite inductive, l'application $H^{q+1,q}_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)}) \to H^{q+1,q}_{\text{ét}}(k_\infty, \mathbf{Z}_{(\ell)})$ est injective, le corps k_∞ est ℓ-spécial et $K^M_q(k_\infty)/\ell K^M_q(k_\infty) = 0$.

3. OPÉRATIONS DE STEENROD ET HOMOLOGIE DE MARGOLIS

Dans cette section, on suppose que k est un corps parfait de caractéristique différente du nombre premier ℓ.

Il est possible d'étendre la définition de la cohomologie motivique à coefficients dans un groupe abélien A pour en faire une famille de foncteurs $H^{p,q}(-, A) \colon \mathcal{H}(k)^{\text{opp}} \to \text{Ab}$ où $\mathcal{H}(k)$ est la catégorie homotopique de Morel-Voevodsky (cf. [30]). Nous ne donnerons pas de détails sur $\mathcal{H}(k)$ si ce n'est que cette catégorie est obtenue à partir de la catégorie des préfaisceaux d'ensembles simpliciaux sur Sm/k en rendant formellement inversibles une classe de morphismes appelés les « $\mathbf{A}^1$-équivalences faibles ». Grâce au plongement de Yoneda, tout objet de Sm/k définit un objet de $\mathcal{H}(k)$ et, plus généralement, on dispose d'un foncteur essentiellement surjectif de la catégorie des k-schémas simpliciaux lisses vers $\mathcal{H}(k)$.

Plus précisément, on dispose d'une version pointée $\mathcal{H}_\bullet(k)$ de la catégorie $\mathcal{H}(k)$ et de foncteurs $\tilde{H}^{p,q} \colon \mathcal{H}_\bullet(k)^{\text{opp}} \to \text{Ab}$ ayant la vertu que pour tout $X \in Sm/k$, $\tilde{H}^{p,q}(X_+, A) \simeq H^{p,q}(X, A)$ où $X_+ = X \sqcup \operatorname{Spec} k$.

Si A est un sous-ensemble d'un ensemble B, on peut noter B/A l'ensemble pointé défini de façon à ce qu'on ait un carré cocartésien :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & B/A \end{tikzcd}$$

Cette construction s'étend aux monomorphismes entre préfaisceaux d'ensembles sur Sm/k. En particulier, si $A \to B$ est une immersion ouverte dans Sm/k, on peut ainsi définir le quotient B/A dans la catégorie des préfaisceaux d'ensembles pointés sur Sm/k. Si A et B sont deux ensembles pointés, on note $A \vee B$ la somme amalgamée de A et B le long de leurs points-bases et on définit $A \wedge B$ comme étant $(A \times B)/A \vee B$; cette construction s'étend aussi aux préfaisceaux simpliciaux pointés et à $\mathcal{H}_\bullet(k)$.

Définition 3.1. — *On note* $S^{2,1} := \mathbf{A}^1/\mathbf{A}^1 - \{0\} \in \mathcal{H}_\bullet(k)$. *On vérifie facilement que l'on a un isomorphisme canonique* $S^{2,1} \simeq \mathbf{P}^1$ *dans* $\mathcal{H}_\bullet(k)$. *Pour tout entier* $n \geq 0$, *l'ensemble simplicial pointé* S^n *induit un objet de* $\mathcal{H}_\bullet(k)$ *que l'on note encore* S^n *ou* $S^{n,0}$.

On peut montrer qu'il existe un isomorphisme canonique $S^{2,1} \simeq \mathbf{G}_m \wedge S^{1,0}$*, ce qui suggère de poser* $S^{1,1} := \mathbf{G}_m$*. Pour* $p \geq q \geq 0$*, on généralise les définitions précédentes en posant* $S^{p,q} := \mathbf{G}_m^{\wedge q} \wedge S^{p-q} \in \mathcal{H}_\bullet(k)$*. On dispose de classes de cohomologie tautologiques* $e_{p,q} \in \tilde{H}^{p,q}(S^{p,q}, \mathbf{Z})$*.*

Définition 3.2. — *Une opération cohomologique stable* F *de bidegré* $(i,j) \in \mathbf{Z}^2$ *(sous-entendu sur la cohomologie motivique à coefficients* $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$*) consiste en la donnée d'une famille de transformations naturelles pour tout* $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(k)$

$$F\colon \tilde{H}^{p,q}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to \tilde{H}^{p+i,q+j}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$$

commutant aux isomorphismes de suspension $\tilde{H}^{p,q}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}^{p+2,q+1}(\mathcal{X} \wedge S^{2,1}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ *et* $\tilde{H}^{p,q}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}^{p+1,q}(\mathcal{X} \wedge S^1, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ *donnés par la multiplication à droite par les classes tautologiques* $e_{2,1} \in \tilde{H}^{2,1}(S^{2,1}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ *et* $e_{1,0} \in \tilde{H}^{1,0}(S^1, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$*.*

Si $\alpha \in H^{i,j}(k, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$, la multiplication à gauche par α définit une opération cohomologie stable de bidegré (i,j). Le Bockstein β est une opération cohomologique stable de bidegré $(1,0)$. Elle s'obtient à partir de la suite exacte courte évidente $0 \to \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \xrightarrow{\ell} \mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \to 0$ qui induit pour tout q une suite exacte de complexes de faisceaux :

$$0 \to \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}(q) \xrightarrow{\ell} \mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z}(q) \to \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}(q) \to 0 \ ;$$

en passant à l'hypercohomologie, on en déduit une suite exacte longue pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(k)$:

$$\dots \to \tilde{H}^{p,q}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \xrightarrow{\ell} \tilde{H}^{p,q}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z}) \to \tilde{H}^{p,q}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \xrightarrow{\beta} \tilde{H}^{p+1,q}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to \dots$$

Théorème 3.3 (Voevodsky [39]). — *Il existe des homologues motiviques des opérations de Steenrod classiques (agissant sur la cohomologie singulière des espaces topologiques). On dispose ainsi d'opérations cohomologiques stables agissant sur la cohomologie motivique à coefficients* $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ *:*

- *pour tout* $n \geq 0$*,* P^n *est une opération de bidegré* $(2n(\ell-1), n(\ell-1))$ *;*
- *pour tout* $i \geq 0$*,* Q_i *est une opération de bidegré* $(2(\ell^i - 1) + 1, \ell^i - 1)$ *;*
- *pour tout* $i \geq 0$*,* q_i *est une opération de bidegré* $(2(\ell^i - 1), \ell^i - 1)$*.*

Elles vérifient notamment les relations suivantes :

- $Q_0 = \beta$ *;*
- $Q_i Q_j = -Q_j Q_i$ *si* $i \neq j$ *;*
- $Q_i^2 = 0$ *;*
- *si* $i > 0$*,* $Q_i = q_i\beta - \beta q_i$*.*

En outre, il existe des formules décrivant l'action de ces opérations sur les classes de Chern et sur des produits de classes de cohomologie.

L'idée de la construction est la suivante. Il suffit de définir les opérations P^n sur des classes en bidegré $(2i, i)$ pour $i \geq 0$. Le point-clef de la construction est de montrer que l'élévation à la puissance ℓ se raffine en une opération « totale » pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{H}(k)$:

$$H^{2i,i}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \xrightarrow{P_\ell} H^{2i\ell,i\ell}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell \times \mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$$

où $\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell$ est une version étale du classifiant du groupe symétrique $\mathfrak{S}_\ell$. L'étude de ce classifiant permet de montrer par ailleurs que le $H^{\star,\star}(\mathcal{X},\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$-module $H^{\star,\star}(\mathbf{B}_{\text{ét}}\mathfrak{S}_\ell \times \mathcal{X},\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ est libre. Si $\alpha \in H^{2i,i}(\mathcal{X},\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$, on pose $P^j(\alpha) := 0$ pour $j > i$ et pour $j \leq i$ les classes $P^j(\alpha)$ sont définies comme étant les coefficients de $P_\ell(\alpha)$ dans une base convenable. Les autres constructions et propriétés évoquées dans le théorème s'obtiennent essentiellement comme dans le cas classique.

Remarque 3.4. — Voevodsky a montré qu'en caractéristique zéro, l'algèbre des opérations cohomologiques stables était engendrée par les opérations β, P^n pour $n \geq 0$ et les multiplications à gauche par les éléments de $H^{\star,\star}(k,\mathbf{Z}/\ell)$ (cf. théorème 7.10).

Définition 3.5 (Homologie de Margolis). — *Pour tous $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(k)$, $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$ et $i \geq 0$, on note $\widetilde{MH}_i^{p,q}(\mathcal{X})$ l'homologie en $\tilde{H}^{p,q}(\mathcal{X},\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ du complexe*

$$\tilde{H}^{p-2(\ell^i-1)-1,q-(\ell^i-1)}(\mathcal{X},\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \xrightarrow{Q_i} \tilde{H}^{p,q}(\mathcal{X},\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \xrightarrow{Q_i} \tilde{H}^{p+2(\ell^i-1)+1,q+\ell^i-1}(\mathcal{X},\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$$

Définition 3.6. — *Soit $d \geq 0$. On note $s_d\colon K_0(X) \to H^{2d,d}(X,\mathbf{Z})$ la transformation naturelle additive (pour tout $X \in Sm/k$) caractérisée par le fait que si L est un fibré en droites, alors $s_d([L]) = c_1(L)^d$. Si X est une variété projective lisse de dimension d sur k, on note $s_d(X) := s_d([TX])$ où TX est le fibré tangent de X.*

Définition 3.7. — *Soit $n \geq 0$. Soit X une variété projective lisse connexe sur k. On dit que X est une ν_n-variété si X est de dimension $d = \ell^n - 1$ et que $\deg s_d(X) \not\equiv 0 \mod \ell^2$ où $\deg\colon H^{2d,d}(X) \simeq CH^d(X) \to \mathbf{Z}$ est l'application degré.*

Proposition 3.8. — *Soit $n \geq 1$. Si X est une variété de dimension $\ell^n - 1$, alors $\deg s_{\ell^n-1}(X) \equiv 0 \mod \ell$.*

Cette proposition bien connue des topologues résultera de la démonstration de la proposition 3.13. Pour aller plus loin, nous avons besoin de quelques notions de théorie de l'homotopie stable. En introduisant la notion de $\mathbf{P}^1$-spectre, on peut définir une catégorie triangulée $\mathcal{SH}(k)$ (cf. [14]) munie d'un $\wedge$-produit, d'un foncteur $\mathcal{H}_\bullet(k) \to \mathcal{SH}(k)$ commutant au $\wedge$-produit et ayant la vertu que $-\wedge\mathbf{P}^1\colon \mathcal{SH}(k) \to \mathcal{SH}(k)$ soit une équivalence de catégories. Les foncteurs de cohomologie motivique $\tilde{H}^{p,q}(-,A)$ peuvent alors s'interpréter comme des foncteurs cohomologiques $\mathcal{SH}(k)^{\text{opp}} \to \text{Ab}$. Le foncteur $\tilde{H}^{0,0}(-,A)$ est même représentable par un spectre $\mathbf{H}_A \in \mathcal{SH}(k)$ (cf. [36, §6.1]).

Définition 3.9. — *Soit $X \in Sm/k$. Soit E un fibré vectoriel sur X que l'on considère ici comme un schéma au-dessus de X muni d'une structure de module sur le schéma en anneau $\mathbf{A}^1$. On note $\mathrm{Th}_X\,E := E/(E - s_0X) \in \mathcal{H}_\bullet(k)$ où $s_0\colon X \to E$ est la section nulle.*

Comme $\mathrm{Th}_X(E \oplus \mathcal{O}_X) \simeq \mathrm{Th}_X\,E \wedge (\mathbf{A}^1/\mathbf{A}^1 - \{0\}) \simeq \mathrm{Th}_X\,E \wedge \mathbf{P}^1$ dans $\mathcal{H}_\bullet(k)$, on peut être tenté de définir pour tout $n \geq 0$ l'espace de Thom du « fibré virtuel » $E - \mathcal{O}_X^n$ comme étant

$$\mathrm{Th}_X(E - \mathcal{O}_X^n) := \mathrm{Th}_X\,E \wedge (\mathbf{P}^1)^{\wedge -n} \in \mathcal{SH}(k)$$

où $(\mathbf{P}^1)^{\wedge -n}$ est l'inverse de $(\mathbf{P}^1)^{\wedge n}$ pour le $\wedge$-produit sur $\mathcal{SH}(k)$. Plus généralement, il est possible de définir l'espace de Thom d'un fibré virtuel (c'est-à-dire d'une différence formelle entre deux fibrés vectoriels). En particulier, on peut définir $\mathrm{Th}_X(-TX) \in \mathcal{SH}(k)$ où $-TX$ est l'opposé du fibré tangent TX de X.

Proposition 3.10. — *Soit E un fibré vectoriel de rang r sur $X \in Sm/k$. On peut définir une classe canonique $t_E \in \tilde{H}^{2r,r}(\mathrm{Th}_X\, E, \mathbf{Z})$: c'est la classe de Thom de E. La multiplication par cette classe induit des isomorphismes $H^{\star,\star}(X, A) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}^{\star+2r,\star+r}(\mathrm{Th}_X\, E, A)$ pour tout groupe abélien de coefficients A.*

Cette proposition résulte d'un isomorphisme $\mathrm{Th}_X\, E \simeq \mathbf{P}(E \oplus \mathcal{O}_X)/\mathbf{P}(E)$ qui permet de décrire la cohomologie motivique de l'espace de Thom en fonction de celle de fibrés projectifs ; la classe t_E est alors donnée par une formule faisant intervenir des classes de Chern. La construction des classes de Thom s'étend sans difficulté aux fibrés virtuels, comme dans le théorème suivant :

Théorème 3.11 (Voevodsky [38, Theorem 2.11]). — *Soit X une variété projective lisse sur k de dimension d. Il existe un morphisme $S^0 \xrightarrow{\tau} \mathrm{Th}_X(-TX)$ dans $\mathcal{SH}(k)$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}^{0,0}(\mathrm{Th}_X(-TX), \mathbf{Z}) \arrow[rr, "\tau^\star"] & & \tilde{H}^{0,0}(S^0, \mathbf{Z}) \arrow[d, "\sim"] \\
H^{2d,d}(X) \arrow[u, "\sim"', "\cdot th"] \arrow[r, "\sim"] & CH^d(X) \arrow[r, "\deg"] & \mathbf{Z}
\end{tikzcd}$$

où l'isomorphisme de gauche est induit par la multiplication par la classe de Thom t_{-TX} que l'on notera $th \in \tilde{H}^{-2d,-d}(\mathrm{Th}_X(-TX), \mathbf{Z})$.

La théorie des six opérations de Grothendieck développée par Voevodsky et Ayoub (cf. [2]) permet de considérer le dual (de Spanier-Whitehead) de X_+ dans $\mathcal{SH}(k)$. Il est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Th}_X(-TX)$. Il est tentant de définir $\tau \colon S^0 \to \mathrm{Th}_X(-TX)$ comme la transposée du morphisme $X_+ \to S^0$ induit par $X \to \operatorname{Spec} k$. Un calcul dans la catégorie des motifs de Chow permet d'obtenir assez formellement un isomorphisme $H^{2d,d}(X) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}^{0,0}(\mathrm{Th}_X(-TX), \mathbf{Z})$ qui fasse commuter le diagramme, mais il n'est pas forcément évident *a priori* qu'il soit donné par la multiplication par th. Cependant, si $X = \mathbf{P}^d$, comme $CH^d(\mathbf{P}^d) \simeq \mathbf{Z}$, c'est forcément le cas (au moins au signe près). On obtient ainsi l'existence de τ dans le cas des espaces projectifs. (Dans [38, Lemma 2.10], Voevodsky construit très explicitement τ dans ce cas particulier au lieu d'utiliser la dualité de Spanier-Whitehead.) Dans le cas général, si $i \colon X \to \mathbf{P}^d$ est une immersion fermée, on peut définir τ pour X en considérant la composition

$$S^0 \xrightarrow{\tau} \mathrm{Th}_{\mathbf{P}^d}(-T\mathbf{P}^d) \xrightarrow{p} \mathrm{Th}_X(-TX)$$

où p est une variante tordue du morphisme $\mathbf{P}^d \to \mathbf{P}^d/(\mathbf{P}^d - X) \simeq \mathrm{Th}_X\, N$ où N est le fibré normal de i et où l'isomorphisme $\mathbf{P}^d/(\mathbf{P}^d - X) \simeq \mathrm{Th}_X\, N$ est donné par le théorème de pureté homotopique (cf. [30, Theorem 2.23, p. 115]).

Lemme 3.12. — *Soit* $\mathcal{X} \xrightarrow{i} \mathcal{Y} \xrightarrow{p} \mathcal{Z} \xrightarrow{\delta} \mathcal{X} \wedge S^1$ *un triangle distingué dans* $\mathcal{SH}(k)$. *Soit* $z \in \tilde{H}^{0,0}(\mathcal{Z}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. *Soit* $y \in \tilde{H}^{0,0}(\mathcal{Y}, \mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z})$ *tel que* y *se réduise sur* $p^\star z \in \tilde{H}^{0,0}(\mathcal{Y}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. *Alors, il existe* $x \in \tilde{H}^{0,0}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ *tel que si l'on note ici* ℓx *l'image de* x *par le morphisme* $\ell \colon \tilde{H}^{0,0}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to \tilde{H}^{0,0}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z})$, *on ait d'une part l'égalité* $\ell x = i^\star y$ *dans* $\tilde{H}^{0,0}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z})$ *et d'autre part l'égalité* $\beta z = \delta^\star x'$ *où* $x' = x \cdot e_{1,0} \in \tilde{H}^{1,0}(\mathcal{X} \wedge S^1, \mathbf{Z}/\ell)$ *et* $e_{1,0} \in \tilde{H}^{1,0}(S^1, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ *est la classe tautologique.*

Ceci résulte des axiomes des catégories triangulées qui permettent de compléter en un morphisme de triangles distingués le carré commutatif du milieu dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[r, "i"] \arrow[d, dotted, "x"] & \mathcal{Y} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "y"] & \mathcal{Z} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "z"] & \mathcal{X} \wedge S^1 \arrow[d, dotted, "x \wedge S^1"] \\
\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} \arrow[r, "\ell"] & \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell^2\mathbf{Z}} \arrow[r] & \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} \arrow[r, "\beta"] & \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} \wedge S^1
\end{tikzcd}$$

Proposition 3.13 ([42, Lemma 4.3]). — *Soit* $n \geq 0$. *Soit* $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(k)$. *Soit* $X \in Sm/k$ *une* ν_n*-variété telle que* $\tilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X} \wedge X_+, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) = 0$. *Alors, le groupe d'homologie de Margolis* $\widetilde{MH}_n^{\star,\star}(\mathcal{X})$ *(cf. définition 3.5) est nul.*

On applique le théorème 3.11 et on complète le morphisme τ de façon à obtenir un triangle distingué dans $\mathcal{SH}(k)$:

$$S^0 \xrightarrow{\tau} \mathrm{Th}_X(-TX) \xrightarrow{p} \mathrm{cône}(\tau) \xrightarrow{\delta} S^1 \,. \tag{2}$$

Notons $d = \ell^n - 1$ la dimension de X. On commence par le cas $n > 0$ (c'est-à-dire $d > 0$). On dispose de la classe de Thom $th \in \tilde{H}^{-2d,-d}(\mathrm{Th}_X(-TX), \mathbf{Z})$. On note $\widetilde{th} \in \tilde{H}^{-2d,-d}(\mathrm{cône}(\tau), \mathbf{Z})$ l'unique classe telle que $p^\star \widetilde{th} = th$. L'existence et l'unicité de $\widetilde{th}$ résultent de la suite exacte en cohomologie motivique déduite du triangle distingué (2) :

$$H^{-2d-1,-d}(k) \to \tilde{H}^{-2d,-d}(\mathrm{cône}(\tau)) \xrightarrow{p^\star} \tilde{H}^{-2d,-d}(\mathrm{Th}_X(-TX)) \xrightarrow{\tau^\star} H^{-2d,-d}(k) \,.$$

En effet, les groupes extrêmes sont nuls puisque l'on a supposé $d > 0$.

D'après le théorème 3.3, on dispose d'une opération q_n et de formules pour calculer $q_n(th)$. Plus précisément, [39, Corollary 14.3] énonce que

$$q_n(th) = s_d(-TX) \cdot th = -s_d(TX) \cdot th \in \tilde{H}^{0,0}(\mathrm{Th}_X(-TX), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \,.$$

Les classes $s_d(TX)$ et th étant définies à coefficients entiers, on peut appliquer le lemme 3.12 pour calculer $\beta q_n(\widetilde{th})$. On obtient ainsi une classe $c \in \tilde{H}^{0,0}(S^0, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \simeq H^{0,0}(k, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ telle que $\beta q_n(\widetilde{th}) = c \cdot (\delta^\star e_{1,0})$ et $\ell c \equiv -\deg s_d(X) \mod \ell^2$. Notons au passage que ceci démontre la proposition 3.8.

Utilisons maintenant l'hypothèse selon laquelle X est une ν_n-variété. Comme $c \equiv \frac{-\deg s_d(TX)}{\ell} \mod \ell$, on obtient que $c \in \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}^\times$. Par ailleurs,

$$Q_n(\widetilde{th}) = q_n \beta \widetilde{th} - \beta q_n \widetilde{th} = -\beta q_n \widetilde{th} = -c\delta^\star(e_{1,0}) \in \tilde{H}^{1,0}(\mathrm{cône}(\tau), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \,. \tag{3}$$

Pour tout $x \in \tilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X})$, grâce aux formules exprimant Q_n d'un produit, on a les égalités suivantes dans $\tilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X} \wedge \text{cône}(\tau))$:

$$\begin{aligned} Q_n(x \cdot \widetilde{th}) &= Q_n(x) \cdot \widetilde{th} + (-1)^{|x|} x \cdot Q_n(\widetilde{th}) \\ &= Q_n(x) \cdot \widetilde{th} - (-1)^{|x|} c x \delta^\star(e_{1,0}) \,. \end{aligned}$$

(Si x est en bidegré (i,j), on note $|x| = i$. Si $\ell = 2$, *a priori*, d'autres termes peuvent apparaître dans le développement de $Q_n(x \cdot \widetilde{th})$, mais ils sont nuls parce que $Q_i(\widetilde{th}) = 0$ pour $i < n$ pour des raisons de poids.)

On définit une application $h \colon \tilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to \tilde{H}^{\star-2(\ell^n-1)-1,\star-(\ell^n-1)}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ de façon à faire commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \tilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \arrow[r, "\cdot\widetilde{th}"] \arrow[d, "h"] & \tilde{H}^{\star-2(\ell^n-1),\star-(\ell^n-1)}(\mathcal{X} \wedge \text{cône}(\tau), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \\ \tilde{H}^{\star-2(\ell^n-1)-1,\star-(\ell^n-1)}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \arrow[r, "\cdot e_{1,0}", "\sim"'] & \tilde{H}^{\star-2(\ell^n-1),\star-(\ell^n-1)}(\mathcal{X} \wedge S^1, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \arrow[u, "\delta^\star", "\sim"'] \end{tikzcd}$$

On notera que la flèche de droite est un isomorphisme en vertu de l'hypothèse selon laquelle $\tilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X} \wedge X_+, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \simeq \tilde{H}^{\star-2d,\star-d}(\mathcal{X} \wedge \text{Th}_X(-TX), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ s'annule.

La formule obtenue plus haut pour $Q_n(x \cdot \widetilde{th})$ montre que l'on a :

$$Q_n(h(x)) = h(Q_n(x)) - (-1)^{|x|} c x \,.$$

Comme $c \in \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}^\times$, ceci montre que le complexe $(\tilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}), Q_n)$ est homotope à zéro, ce qui implique l'annulation de l'homologie de Margolis.

(Dans le cas particulier où $n = d = 0$, $X = \operatorname{Spec} E$ où E est une extension finie de k. Si ℓ ne divise pas $[E : k]$, l'argument de transfert habituel montre que $\tilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) = 0$ ce qui implique évidemment l'annulation de l'homologie de Margolis. On peut donc supposer que la valuation ℓ-adique de $[E : k]$ est 1. On sait que $Q_0 = \beta$. Contrairement à ce qui se passe dans le cas $d > 0$, la classe $\widetilde{th}$ n'est définie qu'à coefficients dans $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$. En procédant comme précédemment, on montre que $\beta(\widetilde{th}) = c\delta^\star(e_{1,0})$ où $c = \frac{\deg_k X}{\ell} \in \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}^\times$. On peut définir l'application h comme ci-dessus, utiliser la formule générale $\beta(y \cdot z) = \beta y \cdot z + (-1)^{|y|} y \cdot \beta z$ pour obtenir la relation $\beta(h(x)) = h(\beta(x)) + (-1)^{|x|} c x$ qui permet de conclure de la même façon.)

Définition 3.14. — *Soit $X \in Sm/k$. On note $\check{C}(X) \in \Delta^{opp} Sm/k$ le schéma simplicial tel que $\check{C}(X)_n = X^{1+n}$, les morphismes simpliciaux étant définis simplement en concevant X^{1+n} comme étant le « schéma des fonctions » $\{0, \ldots, n\} \to X$.*

Lemme 3.15 ([38, Appendix B]). — *Soit $X \in Sm/k$. Notons $\pi_0 \check{C}(X)$ le faisceau d'ensembles sur Sm/k_{Nis} associé au préfaisceau $U \longmapsto \pi_0(\check{C}(X)(U))$. Le morphisme canonique $\check{C}(X) \to \pi_0 \check{C}(X)$ est une équivalence faible simpliciale. En outre, le faisceau d'ensembles $\pi_0 \check{C}(X)$ est un sous-objet de l'objet final. Si $Y \in Sm/k$, $Y \to \operatorname{Spec} k$ appartient à $\pi_0 \check{C}(X)$ si et seulement si localement pour la topologie de Nisnevich il existe un k-morphisme $Y \to X$; si c'est le cas, le morphisme canonique $\check{C}(X) \times Y \to Y$ est une équivalence faible.*

Définition 3.16. — *Soit $\underline{a} = (a_1, \dots, a_q)$ un q-uplet d'éléments de $k^\times$. Une variété de déploiement pour le symbole $\{a_1, \dots, a_q\}$ est une variété connexe $X \in Sm/k$ telle que l'image de $\{a_1, \dots, a_q\}$ soit nulle dans $K_q^M(k(X))/\ell K_q^M(k(X))$ où $k(X)$ est le corps des fonctions méromorphes sur X.*

Grâce aux morphismes de résidus en K-théorie de Milnor, on peut montrer que si X est une variété de déploiement, alors le symbole $\{a_1, \dots, a_q\}$ est nul dans $K_q^M(\kappa(x))/\ell K_q^M(\kappa(x))$ pour tout point $x \in X$.

Définition 3.17. — *Soit $X \in Sm/k$. On dit que X est une $\nu_{\leq q-1}$-variété si c'est une ν_{q-1}-variété (cf. définition 3.7) et que pour tout $0 \leq i \leq q-2$, il existe un morphisme $X_i \to X$ où X_i est une ν_i-variété.*

Proposition 3.18 ([42, Lemmas 6.4, 6.5 & 6.7]). — *Soit $\underline{a} = (a_1, \dots, a_q)$ un q-uplet d'éléments de k tel que l'image de $\{a_1, \dots, a_q\}$ dans $K_q(k)/\ell K_q(k)$ soit non nulle. On suppose que k contient une racine primitive ℓ-ième de l'unité. Soit $X \in Sm/k$ une variété de déploiement pour le symbole $\{a_1, \dots, a_q\}$. Alors, il existe un élément non nul $\delta \in H^{q,q-1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. Si on suppose en outre que X est une $\nu_{\leq q-1}$-variété, alors $Q_{q-1}Q_{q-2}\dots Q_0\delta$ est non nul dans $H^{\star,\star}(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$.*

Commençons par montrer la deuxième partie de l'énoncé. Si $Q_{q-1}\dots Q_0\delta = 0$, il existe un entier $i \leq q-1$ tel que si on pose $\delta' := Q_{i-1}\dots Q_0\delta$, on ait $\delta' \neq 0$ et $Q_i\delta' = 0$. Montrons que $Q_i\delta' = 0$ implique $\delta' = 0$, ce qui fournira une contradiction. Par hypothèse, il existe une ν_i-variété Y et un morphisme $Y \to X$. On en déduit une équivalence faible $\check{C}(X) \times Y \to Y$ (cf. lemme 3.15). Si on note $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(k)$ la cofibre homotopique du morphisme $\check{C}(X) \to \bullet$, l'espace pointé $\mathcal{X} \wedge Y_+$ est faiblement contractile. En particulier, sa cohomologie motivique est nulle, on peut donc appliquer la proposition 3.13 qui montre que l'homologie de Margolis $\widetilde{MH}_i^{\star,\star}(\mathcal{X})$ est nulle.

De la suite cofibrée $\check{C}(X)_+ \to S^0 \to \mathcal{X} \to \check{C}(X)_+ \wedge S^1$ on déduit que les applications $\partial\colon H^{a,b}(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to \tilde{H}^{a+1,b}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ sont bijectives pour $a > b$ (cf. corollaire 1.10). Pour montrer que $\delta' = 0$, il suffit donc de montrer que $\partial\delta' = 0$. L'annulation de l'homologie de Margolis de $\mathcal{X}$ montre qu'il existe $u \in \tilde{H}^{a,b}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ tel que $\partial\delta' = Q_i u$ où $a = q - i - \frac{2(\ell-2)}{\ell-1}(\ell^i - 1)$ et $b = q - 1 - i - \frac{(\ell-2)}{\ell-1}(\ell^i - 1)$. On a $a - 1 \leq b \leq q - 1$. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^{a',b}(k, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) & \longrightarrow & H^{a',b}(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{a',b}_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) & \longrightarrow & H^{a',b}_{\text{ét}}(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \end{array}$$

D'après la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum en poids $b \leq q-1$, les flèches verticales sont bijectives si $a' \leq b$ et injectives si $a' = b+1$. Par ailleurs, $H^{\star,\star}_{\text{ét}}(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ ne dépend que de l'image de $\check{C}(X)$ dans la variante étale de $\mathcal{H}_\bullet(k)$. Le faisceau étale associé à $\pi_0\check{C}(X)$ étant bien sûr l'objet final, on obtient un isomorphisme $H^{\star,\star}_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{\star,\star}_{\text{ét}}(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$; la flèche du bas est donc un isomorphisme. L'application du haut

$H^{\star,\star}(k, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to H^{\star,\star}(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ est donc bijective si $a' \leq b$ et injective si $a' = b+1$. En utilisant la suite cofibrée $\check{C}(X)_+ \to S^0 \to \mathcal{X} \to \check{C}(X)_+ \wedge S^1$, on en déduit que $\tilde{H}^{a,b}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) = 0$, donc $u = 0$ et $\partial\delta' = Q_i u = 0$.

Montrons maintenant la première partie de la proposition. D'après la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum en poids $q-1$, on a un triangle distingué dans $\mathrm{D}(Sm/k_{\mathrm{Zar}})$:

$$\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}(q-1) \to R\alpha_\star\mu_\ell^{\otimes q-1} \to \tau_{\geq q} R\alpha_\star\mu_\ell^{\otimes q-1} \to \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}(q-1)[1]\,.$$

Notons $R^q\alpha_\star\mu_\ell^{\otimes q-1}$ le q-ième faisceau de cohomologie de $R\alpha_\star\mu_\ell^{\otimes q-1}$. Il résulte formellement du triangle distingué que l'on a une suite exacte :

$$0 \to H^{q,q-1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to H^{q,q-1}_{\text{ét}}(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to H^0(\check{C}(X), R^q\alpha_\star\mu_\ell^{\otimes q-1})\,.$$

Il résulte de la théorie des motifs de Voevodsky (cf. le début du §4) que si $\mathcal{F}$ est ce qu'on appelle un faisceau Nisnevich muni de transferts et invariant par homotopie (ce qui est le cas de $R^q\alpha_\star\mu_\ell^{\otimes q-1}$), alors pour tout $Y \in Sm/k$, si Y est connexe, alors $H^0(Y, \mathcal{F}) \to H^0(k(Y), \mathcal{F})$ est injective. Dans la suite exacte ci-dessus, on peut donc remplacer $H^0(\check{C}(X), R^q\alpha_\star\mu_\ell^{\otimes q-1})$ par $H^{q,q-1}_{\text{ét}}(k(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. On dispose aussi comme ci-dessus d'un isomorphisme $H^{q,q-1}_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{q,q-1}_{\text{ét}}(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. Ainsi,

$$H^{q,q-1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \simeq \ker(H^{q,q-1}_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to H^{q,q-1}_{\text{ét}}(k(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}))\,.$$

Le choix d'une racine primitive ℓ-ième de l'unité permet d'obtenir un isomorphisme

$$H^{q,q-1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \simeq \ker(H^{q,q}_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to H^{q,q}_{\text{ét}}(k(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}))\,.$$

(En effet, une racine primitive ℓ-ième de l'unité s'identifie à un générateur de $H^{0,1}_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ et la multiplication par cet élément induit un isomorphisme entre les groupes de cohomologie motivique étale en poids $q-1$ et q.) On sait que l'image du symbole $\{a_1, \ldots, a_q\}$ est nulle dans $H^{q,q}_{\text{ét}}(k(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. Pour montrer l'existence de $\delta \neq 0 \in H^{q,q-1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$, il ne reste plus qu'à montrer que l'image de $\{a_1, \ldots, a_q\}$ est non nulle dans $H^{q,q}_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$, ce que Voevodsky fait en utilisant des techniques semblables à celles utilisées pour établir le théorème 2.1 (cf. [42, Lemma 6.4]).

4. PUISSANCES SYMÉTRIQUES DE MOTIFS

Autant que possible, nous avons pour le moment évité la notion de motif : nous n'avons utilisé que la cohomologie motivique. Pour cela, nous avons introduit les complexes de faisceaux $\mathbf{Z}(q)$ dans $\mathrm{D}(Sm/k_{\mathrm{Zar}})$. Pour le formalisme des motifs triangulés de Voevodsky, il convient de remplacer la catégorie des faisceaux Zariski par celle, notée $\mathbf{ST}_{\mathrm{Nis}}(k)$, des faisceaux Nisnevich avec transferts. Un préfaisceau avec transferts est un foncteur additif $SmCor/k^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Ab}$ (cf. définition 1.1), qui est un faisceau Nisnevich avec transferts si le préfaisceau induit sur la catégorie Sm/k est un faisceau pour la topologie de Nisnevich. Les objets $\mathbf{Z}(q)$ trouvent naturellement leur place dans la catégorie des complexes bornés supérieurement dans $\mathbf{ST}_{\mathrm{Nis}}(k)$. La catégorie triangulée des motifs effectifs de Voevodsky $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)$ est la sous-catégorie pleine de

$D^-(\mathbf{ST}_{\mathrm{Nis}}(k))$ formée des complexes K tels que pour tout $X \in Sm/k$, on ait un isomorphisme $R\Gamma(X,K) \tilde{\to} R\Gamma(X \times \mathbf{A}^1, K)$ sur l'hypercohomologie Nisnevich. Pour tout groupe abélien A et $q \geq 0$, les objets $A(q)$ appartiennent à $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(k)$, tout comme les objets $M(X) := C_\star \mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}(X)$ pour $X \in Sm/k$: $M(X)$ est le motif de Voevodsky de X. Pour ainsi dire par définition, on a des isomorphismes canoniques :

$$H^{p,q}(X,A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(k)}(M(X), A(q)[p]) \ .$$

Si $\mathcal{X}$ est un k-schéma simplicial tel que, pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{X}_n$ soit une réunion disjointe d'objets de Sm/k, Voevodsky a défini dans [40] une catégorie $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\mathcal{X})$ de motifs au-dessus de $\mathcal{X}$. Pour cela, il introduit une notion relative de faisceau avec transferts, non plus seulement sur k, mais au-dessus d'un objet de Sm/k. Ceci donne un sens à la notion de faisceau avec transferts au-dessus de $\mathcal{X}_n$ pour tout $n \geq 0$. Un faisceau avec transferts sur $\mathcal{X}$ consiste alors en la donnée de faisceaux avec transferts liés par des morphismes de transition sur tous les $\mathcal{X}_n$. En procédant comme dans l'esquisse ci-dessus, il aboutit à la catégorie $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\mathcal{X})$. Les objets $A_{\mathcal{X}}(q) \in \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\mathcal{X})$ sont les images inverses des objets $A(q)$ par un foncteur de changement de base $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(k) \to \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\mathcal{X})$. Dans ce contexte, on peut obtenir assez formellement des isomorphismes canoniques :

$$H^{p,q}(\mathcal{X},A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\mathcal{X})}(\mathbf{Z}_{\mathcal{X}}, A_{\mathcal{X}}(q)[p]) \ .$$

Si A est un anneau, on peut introduire une variante $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\mathcal{X},A)$ à coefficients A de la catégorie $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\mathcal{X})$ et on a alors un isomorphisme

$$H^{p,q}(\mathcal{X},A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\mathcal{X},A)}(A_{\mathcal{X}}, A_{\mathcal{X}}(q)[p]) \ .$$

Pour bien comprendre la construction qui va suivre, il est intéressant de commencer par considérer une situation très simple. Soit A un anneau commutatif. Soit M un A-module libre de rang 2 dont on note (X,Y) une base. Pour tout $i \geq 0$, la i-ème puissance symétrique $\mathbf{S}^i M$ de M s'identifie à l'ensemble des polynômes homogènes de degré i en deux variables X et Y à coefficients dans A. Pour tout $i \geq 1$, on a une suite exacte courte évidente :

$$0 \to \mathbf{S}^{i-1}M \to \mathbf{S}^i M \to A \to 0 \ ,$$

où la flèche de gauche est la multiplication par X et où la flèche de droite est celle qui à un polynôme associe le coefficient devant Y^i. Dans la construction qui va suivre dans la catégorie $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\mathcal{X},A)$, il faudra penser à M comme étant en quelque sorte de rang 2. La suite exacte énoncée ci-dessus trouvera une traduction triangulée sous la forme du triangle distingué (4) énoncé plus bas.

Soit $n \geq 0$. Soit $\alpha \in H^{2n+1,n}(\mathcal{X},A)$ où A est un anneau dans lequel $(\ell-1)!$ est inversible. D'après ce qui précède, on peut interpréter α comme un morphisme dans $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(\mathcal{X},A)$ que l'on peut compléter en un triangle distingué :

$$A_{\mathcal{X}}(n)[2n] \xrightarrow{x} M \xrightarrow{y} A_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\alpha} A_{\mathcal{X}}(n)[2n+1] \,.$$

Pour tout $0 \leq i \leq \ell - 1$, on peut faire agir le groupe symétrique $\mathfrak{S}_i$ sur $M^{\otimes i}$ par permutation des facteurs et noter $\mathbf{S}^i M \in \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(\mathcal{X}, A)$ l'image du projecteur $\frac{1}{i!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_i}\sigma$.

Pour $1 \leq i \leq \ell - 1$, on définit un morphisme v comme étant la composition suivante :

$$\mathbf{S}^{i-1}M(n)[2n] \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes x} \mathbf{S}^{i-1}M \otimes M \to \mathbf{S}^i M \ ,$$

où le morphisme de droite est le morphisme évident. On obtient ainsi un diagramme

$$\mathbf{S}^{i-1}M(n)[2n] \xrightarrow{v} \mathbf{S}^i M \xrightarrow{y^i} A_{\mathcal{X}}$$

où y^i est la i-ième puissance symétrique du morphisme $y\colon M \to A_{\mathcal{X}}$. Voevodsky montre qu'il existe une unique manière de compléter ce diagramme de façon à obtenir un triangle distingué dans $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(\mathcal{X}, A)$:

$$\mathbf{S}^{i-1}M(n)[2n] \xrightarrow{v} \mathbf{S}^i M \xrightarrow{y^i} A_{\mathcal{X}} \xrightarrow{s} \mathbf{S}^{i-1}M(n)[2n+1]\,. \tag{4}$$

De même, il obtient un autre triangle distingué, dual du précédent :

$$A_{\mathcal{X}}(in)[2in] \xrightarrow{x^i} \mathbf{S}^i M \xrightarrow{u} \mathbf{S}^{i-1}M \xrightarrow{r} A_{\mathcal{X}}(in)[2in+1]\,. \tag{5}$$

En composant r et s, on obtient un morphisme

$$A_{\mathcal{X}} \xrightarrow{s} \mathbf{S}^{i-1}M(n)[2n+1] \xrightarrow{r(n)[2n+1]} A_{\mathcal{X}}((i+1)n)[2(i+1)n+2] \ ,$$

c'est-à-dire un élément de $H^{2(i+1)n+2,(i+1)n}(\mathcal{X}, A)$ que l'on note $\phi_i(\alpha)$. Cette construction étant fonctorielle en $\mathcal{X}$, ϕ_i est une opération cohomologique (instable) :

$$\phi_i\colon H^{2n+1,n}(-, A) \to H^{2(i+1)n+2,(i+1)n}(-, A)\ .$$

On ne s'intéressera ici qu'au cas $i = \ell - 1$:

Théorème 4.1 ([42, Theorem 3.8]). — *On suppose que $A = \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ et que le corps k est de caractéristique zéro. Pour tout entier $n \geq 0$, il existe un entier $c \in \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}^\times$ tel que $\phi_{\ell-1} = c\beta P^n$.*

Techniquement parlant, ce résultat est sans doute la partie la plus délicate de la contribution de Voevodsky à la démonstration de la conjecture de Bloch-Kato. La démonstration de ce théorème résulte d'une caractérisation d'un espace vectoriel de dimension 1 dans le groupe des opérations cohomologiques instables. Pour l'obtenir, il faut faire une étude assez fine des motifs des espaces d'Eilenberg-MacLane motiviques s'appuyant sur les résultats principaux de [41]. Certains de ces résultats sont esquissés dans le §7.

5. LE MOTIF DE ROST GÉNÉRALISÉ

Étant donné un symbole $\{a_1, \ldots, a_q\}$ non trivial en K-théorie de Milnor modulo ℓ, on s'intéressera dans le §6 aux variétés de déploiement ℓ-génériques X de ce symbole (cf. définition 6.1). Dans le cas de la conjecture de Milnor (cas $\ell = 2$), il était possible de prendre pour X une quadrique (cf. [38, §4]). Un facteur direct du motif de X, le motif de Rost, intervenait de façon essentielle dans la démonstration de la conjecture de Milnor. Le but de cette section est de construire un motif de Rost généralisé (théorème 5.2) et de l'utiliser pour établir un énoncé d'injectivité (théorème 5.7). Les hypothèses ci-dessous font intervenir une variété X (qui sera construite au §6) et une classe de cohomologie δ (qui sera obtenue en appliquant la proposition 3.18).

Soit $X \in Sm/k$ une ν_{q-1}-variété. On suppose qu'il existe $\delta \in H^{q,q-1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ tel que $Q_0 Q_1 \ldots Q_{q-1}(\delta) \neq 0 \in H^{2\ell b+2,\ell b}(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ où $b := \frac{\ell^{q-1}-1}{\ell-1}$. Notons $\mu := \tilde{\beta} Q_1 \ldots Q_{q-2}(\delta) \in H^{2b+1,b}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(\ell)})$ où $\tilde{\beta} \colon H^{\star,\star}(-, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to H^{\star+1,\star}(-, \mathbf{Z}_{(\ell)})$ est le Bockstein associé à la suite exacte courte $0 \to \mathbf{Z}_{(\ell)} \xrightarrow{\ell} \mathbf{Z}_{(\ell)} \to \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \to 0$.

La classe $\mu \in H^{2b+1,b}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(\ell)})$ permet de définir un objet M de la catégorie triangulée $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(\ell)})$ s'insérant dans un triangle distingué :

$$\mathbf{Z}_{(\ell),\check{C}(X)}(b)[2b] \xrightarrow{x} M \xrightarrow{y} \mathbf{Z}_{(\ell),\check{C}(X)} \xrightarrow{\mu} \mathbf{Z}_{(\ell),\check{C}(X)}(b)[2b+1] .$$

Grâce à la construction du §4, on peut définir les puissances symétriques $\mathbf{S}^i M \in \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(\ell)})$ pour $0 \leq i \leq \ell - 1$. Notons $p \colon \check{C}(X) \to \operatorname{Spec} k$ le morphisme structural. On dispose d'un foncteur $p^\star \colon \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)}) \to \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(\ell)})$ qui admet un adjoint à gauche $p_\sharp \colon \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(\ell)}) \to \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)})$. On note $\mathrm{DM}_{\check{C}(X)}$ la sous-catégorie triangulée de $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)})$ formée des objets N tels que le morphisme d'adjonction $p_\sharp p^\star N \to N$ soit un isomorphisme. On peut observer que ce morphisme $p_\sharp p^\star N \to N$ s'identifie au morphisme évident $M(\check{C}(X)) \otimes N \to N$. Il résulte du fait que $\Delta \colon \check{C}(X) \to \check{C}(X) \times \check{C}(X)$ soit une équivalence faible (cf. lemme 3.15) que le foncteur $p_\sharp p^\star \colon \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)}) \to \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)})$ se factorise par la sous-catégorie pleine $\mathrm{DM}_{\check{C}(X)}$. Ainsi, les objets $p_\sharp \mathbf{Z}_{(\ell),\check{C}(X)}(i)[j] \simeq M(\check{C}(X))(i)[j]$ appartiennent à $\mathrm{DM}_{\check{C}(X)}$; par dévissage, $p_\sharp M \in \mathrm{DM}_{\check{C}(X)}$. Le produit tensoriel sur $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)})$ induit un produit tensoriel sur $\mathrm{DM}_{\check{C}(X)}$ dont l'objet neutre est $M(\check{C}(X)) \simeq p_\sharp \mathbf{Z}_{(\ell),\check{C}(X)}$.

Définition 5.1. — *Soit $X \in Sm/k$ une ν_{q-1}-variété. Soit $\delta \in H^{q,q-1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ une classe telle que $Q_0 \ldots Q_{q-1}(\delta) \neq 0 \in H^{2b+1,b}(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. Le motif de Rost généralisé est $M_{\ell-1} := p_\sharp \mathbf{S}^{\ell-1} M \in \mathrm{DM}_{\check{C}(X)} \subset \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)})$ où M est le motif défini ci-dessus.*

Théorème 5.2. — *Soit X une ν_{q-1}-variété projective et lisse sur k. Soit $\delta \in H^{q,q-1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ une classe vérifiant les conditions de la définition 5.1. Le motif de Rost généralisé $M_{\ell-1}$ est un facteur direct du motif $M(X)$ de X dans la catégorie*

$\mathrm{DM}^{\mathit{eff}}_{-}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)})$. *Ce motif* $M_{\ell-1}$ *est donc un motif de Chow. En outre, à torsion et décalage près, ce motif est autodual.*

Dans la catégorie tensorielle $\mathrm{DM}_{\check{C}(X)}$, l'objet neutre $M(\check{C}(X))$ est bien sûr autodual. Il est évident aussi que le motif $p_\sharp M$ qui intervient dans la définition 5.1 du motif $M_{\ell-1}$ admet un accouplement parfait $p_\sharp M \otimes p_\sharp M \to M(\check{C}(X))(b)[2b]$. Ceci s'étend sans difficulté aux puissances symétriques pour donner une autodualité $M_{\ell-1} \otimes M_{\ell-1} \to M(\check{C}(X))(d)[2d]$ où $d = \dim X = \ell^{q-1} - 1$ dans la catégorie $\mathrm{DM}_{\check{C}(X)}$. Quand il aura été établi que $M_{\ell-1}$ est un facteur direct de $M(X)$, il sera tout à fait formel que l'on aura aussi une dualité $M_{\ell-1} \otimes M_{\ell-1} \to \mathbf{Z}_{(\ell)}(d)[2d]$ dans $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)})$. Le motif de Chow $M_{\ell-1}$ à coefficients dans $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ sera bien autodual (aux twists de Tate près).

Dans la suite de la démonstration, nous aurons besoin de toutes les puissances symétriques $M_i := p_\sharp \mathbf{S}^i M \in \mathrm{DM}_{\check{C}(X)}$ pour $0 \leq i \leq \ell - 1$. Les triangles distingués (4) et (5) du §4 s'énoncent ici sous la forme suivante :

Lemme 5.3. — *Pour tout* $1 \leq i \leq \ell - 1$, *on a des triangles distingués dans* $\mathrm{DM}_{\check{C}(X)}$ *:*

(i) $$M_{i-1}(b)[2b] \to M_i \to M(\check{C}(X)) \to M_{i-1}(b)[2b+1]$$

(ii) $$M(\check{C}(X))(ib)[2ib] \to M_i \to M_{i-1} \to M(\check{C}(X))(ib)[2ib+1]\,.$$

Lemme 5.4. — *Il existe un morphisme* $\lambda \colon M(X) \to M_{\ell-1}$ *faisant commuter le diagramme suivant dans* $\mathrm{DM}^{\mathit{eff}}_{-}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)})$ *où les morphismes de but* $M(\check{C}(X))$ *sont les morphismes évidents :*

$$\begin{tikzcd} M(X) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr] & M_{\ell-1} \arrow[d] \\ & M(\check{C}(X)) \end{tikzcd}$$

Pour tout $j \geq 1$, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k,\mathbf{Z}_{(\ell)})}(M(X), M(\check{C}(X))(jb)[2jb+1]) \simeq H^{2jb+1,jb}(X, \mathbf{Z}_{(\ell)})$ est nul d'après le corollaire 1.10 (b). Grâce au triangle distingué (ii) du lemme 5.3, on peut montrer par récurrence l'annulation de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k,\mathbf{Z}_{(\ell)})}(M(X), M_i(b)[2b+1])$ pour $0 \leq i \leq \ell - 1$. En particulier, pour $i = \ell - 2$, on obtient l'annulation du groupe $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k,\mathbf{Z}_{(\ell)})}(M(X), M_{\ell-2}(b)[2b+1])$, ce qui permet de conclure grâce au triangle distingué suivant énoncé dans le lemme 5.3 (i) :

$$M_{\ell-2}(b)[2b] \to M_{\ell-1} \to M(\check{C}(X)) \to M_{\ell-2}(b)[2b+1]\ .$$

Proposition 5.5. — *Posons* $d := \dim X = \ell^{q-1} - 1$. *Le morphisme canonique* $\mathbf{Z}(d)[2d] \to M(X)$ *associé à la variété projective lisse* X *induit un morphisme* $M(\check{C}(X))(d)[2d] \xrightarrow{\tau_X} M(X)$. *Avec les notations du lemme 5.4, le morphisme composé* $\lambda\tau_X \colon M(\check{C}(X))(d)[2d] \xrightarrow{\tau_X} M(X) \xrightarrow{\lambda} M_{\ell-1}$ *n'est pas un multiple de* ℓ *dans* $\mathrm{DM}^{\mathit{eff}}_{-}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)})$.

Il s'agit de montrer que le morphisme $\lambda\tau_X$ n'induit pas le morphisme nul dans $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. Par construction de l'opération $\phi_{\ell-1}$ (cf. §4) et du triangle distingué du lemme 5.3 (i) pour $i = \ell - 1$, on a un diagramme commutatif dans $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)})$:

$$\begin{tikzcd}
M(\check{C}(X))(d)[2d] \arrow[r, "\tau_X"] & M(X) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr] & M_{\ell-1} \arrow[d] \arrow[dr, "0"] & \\
 & & M(\check{C}(X)) \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "\phi_{\ell-1}(\mu)"'] & M_{\ell-2}(b)[2b+1] \arrow[d, "r"] \\
 & & & M(\check{C}(X))(\ell b)[2\ell b+2]
\end{tikzcd}$$

D'après le théorème 4.1, on en déduit que le morphisme composé suivant est nul dans $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$:

$$M_{\ell-1} \otimes \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \to M(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \xrightarrow{\beta P^b(\mu)} M(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})(\ell b)[2\ell b + 2]\,.$$

Nous allons appliquer le lemme suivant à la classe induite par μ dans le groupe $H^{2b+1,b}(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$:

Lemme 5.6. — *Soit $\mathcal{X} \in \mathcal{H}(k)$. Soit $\gamma \in H^{\star,\star}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. On suppose que $Q_i\gamma = 0$ pour $i < q - 1$. Alors $\beta P^b\gamma = \pm Q_{q-1}\gamma$.*

(Pour $\ell \neq 2$, cela résulte de l'identité $Q_0 P^b = \sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i P^{b-(1+\cdots+\ell^{i-1})} Q_i$ dans l'algèbre de Steenrod motivique, cf. [42, Lemma 5.13]. La formule est plus compliquée si $\ell = 2$.)

Grâce à ce lemme, il vient que le morphisme composé suivant est nul dans $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ où $\alpha := Q_0 \dots Q_{q-1}\delta \neq 0 \in H^{2\ell b+2,\ell b}(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$:

$$M_{\ell-1} \otimes \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \to M(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \xrightarrow{\alpha} M(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})(\ell b)[2\ell b + 2]\,. \tag{6}$$

Pour démontrer la proposition 5.5, nous allons procéder par l'absurde en montrant que l'on aurait $\alpha = 0$ si la conclusion de la proposition était mise en défaut.

Appliquons le foncteur $- \wedge \check{C}(X)_+$ au triangle distingué (2) de la démonstration de la proposition 3.13 :

$$\check{C}(X)_+ \xrightarrow{\check{\tau}} \mathrm{Th}_X(-TX) \wedge \check{C}(X)_+ \to \text{cône}(\tau) \wedge \check{C}(X) \xrightarrow{\delta} \check{C}(X)_+ \wedge S^1\,.$$

Le morphisme $\check{\tau}\colon \check{C}(X)_+ \to \mathrm{Th}_X(-TX) \wedge \check{C}(X)_+ \simeq \mathrm{Th}_X(-TX)$ induit après application du foncteur $- \wedge (\mathbf{P}^1)^{\wedge d}$ et du foncteur motif un morphisme dans $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)})$

$$M(\check{C}(X))(d)[2d] \to \tilde{M}(\mathrm{Th}_X(-TX))(d)[2d] \simeq M(X)$$

qui coïncide avec le morphisme τ_X. Si on suppose que $\lambda\tau_X$ est nul dans $\mathrm{DM}_-^{\mathrm{eff}}(k, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$, on peut compléter le diagramme suivant dont la partie droite reproduit (6) :

$$\begin{tikzcd}
\tilde{M}(\mathrm{Th}_X(-TX))(d)[2d] \simeq M(X) \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[d] & & M_{\ell-1} \otimes \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \arrow[d] \arrow[dr, "0"] & \\
\tilde{M}(\text{cône}(\tau), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})(d)[2d] \otimes M(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \arrow[rr, dotted] \arrow[urr, dotted, "\tilde{\lambda}"] & & M(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \arrow[r, "\alpha"] & M(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})(\ell b)[2\ell b+2]
\end{tikzcd}$$

Le morphisme du bas à gauche ne peut être que le morphisme correspondant à la classe de cohomologie $\widetilde{th} \cdot 1_{\check{C}(X)} \in \tilde{H}^{-2d,-d}(\text{cône}(\tau) \wedge \check{C}(X)_+, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ (cf. la démonstration de la proposition 3.13 pour la construction de $\widetilde{th}$). On obtient donc l'annulation de $\widetilde{th}\cdot\alpha \in \tilde{H}^{\star,\star}(\text{cône}(\tau)\wedge\check{C}(X)_+, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ qui correspond à la composée des deux morphismes du bas sur le diagramme ci-dessus. On a donc $Q_{q-1}(\widetilde{th}\cdot\alpha) = 0$. Les formules permettant de développer $Q_{q-1}(\widetilde{th} \cdot \alpha)$ (cf. [39, §13]) et l'annulation de $Q_i\alpha$ pour $0 \leq i \leq q-1$ montrent que :

$$0 = Q_{q-1}(\widetilde{th} \cdot \alpha) = Q_{q-1}(\widetilde{th}) \cdot \alpha \ .$$

Comme X est une ν_{q-1}-variété, l'équation (3) de la démonstration de la proposition 3.13 montre alors qu'il existe $c \in \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}^\times$ tel que

$$0 = Q_{q-1}(\widetilde{th} \cdot \alpha) = -c\delta^\star(\alpha \cdot e_{1,0}) \in \tilde{H}^{2\ell b+3,\ell b}(\text{cône}(\tau) \wedge \check{C}(X)_+, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \ .$$

Comme $c \neq 0$, on obtient que $\delta^\star(\alpha \cdot e_{1,0}) = 0$. Le corollaire 1.10 (b) montre l'annulation du groupe $\tilde{H}^{2\ell b+2,\ell b}(\mathrm{Th}_X(-TX), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \simeq H^{2(\ell b+d)+2,\ell b+d}(X, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$, ce qui implique que l'application suivante est injective :

$$\delta^\star(- \cdot e_{1,0})\colon H^{2\ell b+2,\ell b}(\check{C}(X), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to \tilde{H}^{2\ell b+3,\ell b}(\text{cône}(\tau) \wedge \check{C}(X)_+, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \ .$$

On en déduit que $\alpha = 0$, ce qui est absurde. Ceci achève la démonstration de la proposition 5.5.

Les motifs $M(X)$ et $M_{\ell-1}$ admettent tous les deux une autodualité dans $\mathrm{DM}_{\check{C}(X)}$ à valeurs dans $M(\check{C}(X))(d)[2d]$ où $d = \dim X = \ell^{q-1} - 1$. Ceci permet de transposer le morphisme $\lambda\colon M(X) \to M_{\ell-1}$ donné par le lemme 5.4 afin d'obtenir un morphisme $D\lambda\colon M_{\ell-1} \to M(X)$. Pour montrer que $M_{\ell-1}$ est un facteur direct de $M(X)$ et ainsi finir la démonstration du théorème 5.2, il reste à montrer que le morphisme composé $\lambda D\lambda\colon M_{\ell-1} \xrightarrow{D\lambda} M(X) \xrightarrow{\lambda} M_{\ell-1}$ est un isomorphisme.

Partons de la composition suivante dans $\mathrm{DM}_{\check{C}(X)}$:

$$M(\check{C}(X))(d)[2d] \xrightarrow{\tau_X} M(X) \xrightarrow{\lambda} M_{\ell-1} \ .$$

En la transposant, on obtient une autre composition qui n'est pas plus multiple de ℓ que la précédente d'après la proposition 5.5 et où le morphisme de droite est le morphisme évident :

$$M_{\ell-1} \xrightarrow{D\lambda} M(X) \to M(\check{C}(X)) \ .$$

En utilisant les triangles distingués du lemme 5.3 et un argument semblable à celui de la démonstration du lemme 5.4, on obtient que ce morphisme composé admet une factorisation donnant lieu au carré commutatif de gauche ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} M_{\ell-1} \arrow[r, "D\lambda"] \arrow[d, "y^{\ell-1}"] & M(X) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d] & M_{\ell-1} \arrow[d, "y^{\ell-1}"] \\ M(\check{C}(X)) \arrow[r, "c"] & M(\check{C}(X)) \arrow[r, equal] & M(\check{C}(X)) \end{tikzcd}$$

L'anneau des endomorphismes de $M(\check{C}(X))$ s'identifie à $H^{0,0}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(\ell)}) \simeq \mathbf{Z}_{(\ell)}$. On peut donc identifier c à un élément de $\mathbf{Z}_{(\ell)}$. Comme c n'est pas multiple de ℓ, on a $c \in \mathbf{Z}_{(\ell)}^{\times}$.

Les triangles distingués du lemme 5.3 sont des triangles distingués intervenant dans ce que l'on appelle la filtration par les tranches (cf. [40, §5]). Les « gradués » non nuls de $M_{\ell-1}$ pour cette filtration sont les motifs $M(\check{C}(X))(ib)[2ib]$ pour $0 \leq i \leq \ell - 1$. On vient ainsi de montrer que l'action de l'endomorphisme $\lambda D\lambda$ de $M_{\ell-1}$ se fait par la multiplication par $c \in \mathbf{Z}_{(\ell)}^{\times}$ sur la tranche $M(\check{C}(X))$ correspondant à $i = 0$. En étudiant l'action sur deux tranches non nulles consécutives, on peut montrer (cf. [42, Lemma 5.8]) que $\lambda D\lambda$ agit sur $M(\check{C}(X))(ib)[2ib]$ par la multiplication par un élément $c_i \in \mathbf{Z}_{(\ell)}$ tel que $c_i \equiv c \mod \ell$. Par conséquent, $c_i \in \mathbf{Z}_{(\ell)}^{\times}$. On obtient ainsi que $\lambda D\lambda$ est un automorphisme de $M_{\ell-1}$, ce qui achève la démonstration du théorème 5.2.

Théorème 5.7. — *Soit k un corps de caractéristique zéro contenant une racine primitive ℓ-ième de l'unité. Soit $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_q) \in (k^{\times})^q$ tel que $\{a_1, \ldots, a_q\} \neq 0 \in K_q(k)/\ell K_q(k)$. Soit $X \in Sm/k$ une variété projective lisse de déploiement pour le symbole $\{a_1, \ldots, a_q\}$. On suppose que X est une $\nu_{\leq q-1}$-variété et que le morphisme canonique suivant est injectif :*

$$H_{-1,-1}(\check{C}(X)) \to H_{-1,-1}(k) \simeq k^{\times} \ ,$$

où pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{H}(k)$, $H_{-1,-1}(\mathcal{X}) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}_{-}^{\mathrm{eff}}(k)}(\mathbf{Z}, M(\mathcal{X})(1)[1])$. Alors, le morphisme suivant est injectif :

$$H_{ét}^{q+1,q}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)}) \to H_{ét}^{q+1,q}(k(X), \mathbf{Z}_{(\ell)}) \ .$$

Ce théorème résulte des propositions 5.8 et 5.10 qui vont suivre. Notons dès maintenant que les hypothèses du théorème 5.7 permettent d'appliquer la proposition 3.18 qui montre que les hypothèses du théorème 5.2 sont satisfaites. On dispose donc du motif de Rost $M_{\ell-1}$, facteur direct du motif $M(X)$ dans $\mathrm{DM}_{-}^{\mathrm{eff}}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)})$.

Proposition 5.8. — *Sous les hypothèses du théorème 5.7, on a une suite exacte :*

$$H^{q+1,q}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(\ell)}) \to H_{ét}^{q+1,q}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)}) \to H_{ét}^{q+1,q}(k(X), \mathbf{Z}_{(\ell)}) \ .$$

Introduisons un objet $K \in \mathrm{DM}_{-}^{\mathrm{eff}}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)})$ s'insérant dans un triangle distingué :

$$\mathbf{Z}_{(\ell)}(q) \to \tau_{\leq q+1} R\alpha_{\star}\alpha^{\star}\mathbf{Z}_{(\ell)}(q) \to K \to \mathbf{Z}_{(\ell)}(q)[1] \,.$$

En passant à l'hypercohomologie de $\check{C}(X)$ et de $\operatorname{Spec} k(X)$, on obtient le diagramme suivant dont les deux lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd} H^{q+1,q}(\check{C}(X),\mathbf{Z}_{(\ell)}) \arrow[r] \arrow[d] & H_{\text{ét}}^{q+1,q}(\check{C}(X),\mathbf{Z}_{(\ell)}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{q+1}(\check{C}(X),K) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & H_{\text{ét}}^{q+1,q}(k(X),\mathbf{Z}_{(\ell)}) \arrow[r] & H^{q+1}(k(X),K) \end{tikzcd}$$

Comme on dispose d'un isomorphisme évident $H_{\text{ét}}^{\star,\star}(k,\mathbf{Z}_{(\ell)}) \simeq H_{\text{ét}}^{\star,\star}(\check{C}(X),\mathbf{Z}_{(\ell)})$, pour finir la démonstration de la proposition, il suffit de montrer que la flèche verticale de droite sur le diagramme ci-dessus est injective. Cette application se factorise ainsi :

$$H^{q+1}(\check{C}(X),K) \to H^{q+1}(X,K) \to H^{q+1}(k(X),K)\,. \tag{7}$$

Nous allons utiliser le fait suivant qui utilise la conjecture de Bloch-Kato en poids $\leq q-1$:

Lemme 5.9 ([38, Lemmas 6.12 & 6.13]). — *Le motif $K \in \mathrm{DM}_{-}^{\mathit{eff}}(k)$ est un motif birationnel au sens de Kahn-Sujatha* [18, §6]*. Autrement dit, les deux conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :*

(i) *Pour tout $M \in \mathrm{DM}_{-}^{\mathit{eff}}(k)$,* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}_{-}^{\mathit{eff}}(k)}(M(1),K) = 0$.

(ii) *Pour toute immersion ouverte $U \to Y$ d'image dense, l'application induite $H^\star(Y,K) \to H^\star(U,K)$ est un isomorphisme.*

La partie (ii) de ce lemme implique que l'application de droite dans (7) est bijective. Pour obtenir l'injectivité de l'application de gauche, on utilise la factorisation donnée par le lemme 5.4 :

$$M(X) \xrightarrow{\lambda} M_{\ell-1} \to M(\check{C}(X))\,.$$

Utilisons le triangle distingué du lemme 5.3 (i) :

$$M_{\ell-2}(b)[2b] \to M_{\ell-1} \to M(\check{C}(X)) \to M_{\ell-2}(b)[2b+1]\,.$$

La partie (i) du lemme 5.9 implique alors que dans la composition suivante, le morphisme de gauche est bijectif :

$$H^{q+1}(\check{C}(X),K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}_{-}^{\mathrm{eff}}(k,\mathbf{Z}_{(\ell)})}(M_{\ell-1},K) \xrightarrow{\lambda^\star} H^{q+1}(X,K)\,.$$

D'après le théorème 5.2, le morphisme λ est un épimorphisme scindé, donc $\lambda^\star$ est un monomorphisme scindé. Ceci finit la démonstration de l'injectivité du morphisme composé (7). Ainsi s'achève la démonstration de la proposition 5.8.

Proposition 5.10. — *Sous les hypothèses du théorème 5.7, le groupe $H^{q+1,q}(\check{C}(X),\mathbf{Z}_{(\ell)})$ est nul.*

Cette proposition résulte des deux lemmes suivants :

Lemme 5.11. — *Il existe une injection $H^{q+1,q}(\check{C}(X),\mathbf{Z}_{(\ell)}) \to H^{2\ell b+2,\ell b+1}(\check{C}(X),\mathbf{Z}_{(\ell)})$.*

Si on introduit l'espace pointé $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_\bullet(k)$ s'insérant dans une suite cofibrée $\check{C}(X)_+ \to S^0 \to \mathcal{X}$, on obtient un morphisme $H^{i,j}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(\ell)}) \to \tilde{H}^{i+1,j}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}_{(\ell)})$ qui est un isomorphisme si $i \geq j+1$. À un décalage près dans les degrés, ceci permet de remplacer dans l'énoncé du lemme les groupes de cohomologie de $\check{C}(X)$ par ceux de l'espace pointé $\mathcal{X}$. Comme X est une $\nu_{\leq q-1}$-variété, X admet un morphisme depuis une ν_0-variété. Ainsi, X admet un point fermé de degré non multiple de ℓ^2. Notons E le corps résiduel associé à un tel point fermé. D'après le lemme 3.15, $\mathcal{X} \wedge (\operatorname{Spec} E)_+$ est contractile, donc $\tilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X} \wedge (\operatorname{Spec} E)_+, \mathbf{Z}_{(\ell)}) = 0$. Grâce au transfert associé à l'extension E/k, on dispose de deux morphismes dont la composée est la multiplication par $[E : k]$:

$$\tilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}_{(\ell)}) \to \tilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X} \wedge (\operatorname{Spec} E)_+, \mathbf{Z}_{(\ell)}) \to \tilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}_{(\ell)})\,.$$

Le groupe du milieu étant nul, il vient que $\ell\tilde{H}^{\star,\star}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}_{(\ell)}) = 0$. En utilisant la suite exacte des coefficients universels, on en déduit des suites exactes :

$$0 \to \tilde{H}^{i,j}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}_{(\ell)}) \to \tilde{H}^{i,j}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \xrightarrow{\beta} \tilde{H}^{i+1,j}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})\,.$$

L'application injective cherchée $H^{q+2,q}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}_{(\ell)}) \to H^{2\ell b+3,\ell b+1}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}_{(\ell)})$ est alors induite par l'opération cohomologique $Q_{q-1} \dots Q_1$ sur la cohomologie motivique à coefficients $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$. En effet, grâce aux identités $Q_i = q_i\beta - \beta q_i$ pour $i > 0$ énoncées dans le théorème 3.3, il vient que l'opération $Q_{q-1} \dots Q_1$ envoie le noyau de β dans le noyau de β. Par ailleurs, l'injectivité s'obtient comme dans la démonstration de la proposition 3.18 en utilisant la proposition 3.13 qui montre l'annulation des groupes d'homologie de Margolis $\widetilde{MH}_i^{\star,\star}(\mathcal{X})$ pour $i \leq q-1$.

Lemme 5.12. — *Le groupe $H^{2\ell b+2,\ell b+1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(\ell)})$ est nul.*

On commence par former le diagramme commutatif de la page 28. Notre premier objectif pour établir le lemme sera en effet de déduire l'injectivité de la flèche ② de l'injectivité de la flèche ①. Voici comment ce diagramme est construit. On part de la composition canonique $M_{\ell-1} \to M(\check{C}(X)) \to \mathbf{Z}_{(\ell)}$ à laquelle on applique le foncteur $\operatorname{Hom}_{\mathrm{DM}_-^{\mathrm{eff}}(k)}(\mathbf{Z}_{(\ell)}, -)$. On obtient ainsi essentiellement une des colonnes du diagramme dont une des flèches est obtenue en tensorisant avec $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ l'application canonique $H_{-1,-1}(\check{C}(X)) \to k^\times$ dont on a supposé l'injectivité (avec les notations du §6, cette application s'identifie à un morphisme $\overline{A_0}(X, \mathcal{K}_1) \to k^\times$ que l'on a noté ①). La colonne suivante est obtenue en faisant agir le foncteur $- \otimes M(\check{C}(X))\colon \mathrm{DM}_-^{\mathrm{eff}}(k) \to \mathrm{DM}_{\check{C}(X)}$. Pour obtenir la dernière colonne, on applique le foncteur $R\,\mathbf{Hom}_{\mathrm{DM}_{\check{C}(X)}}(-, M(\check{C}(X))(d+1)[2d+1])$ (où $d = (\ell-1)b = \ell^{q-1}-1$). Ce foncteur est un Hom. interne intervenant dans des énoncés de dualité pour la structure tensorielle sur $\mathrm{DM}_{\check{C}(X)}$ (cf. le paragraphe suivant l'énoncé du théorème 5.2). Ainsi, par construction, le morphisme ② est donné par la composition avec le morphisme $M(\check{C}(X))(d)[2d] \to M_{\ell-1}$ obtenu en appliquant $R\,\mathbf{Hom}_{\mathrm{DM}_{\check{C}(X)}}(-, M(\check{C}(X))(d+1)[2d+1])$ au morphisme canonique $M_{\ell-1} \to M(\check{C}(X))$ intervenant dans le triangle distingué du lemme 5.3 (i) :

$$M_{\ell-2}(b)[2b] \to M_{\ell-1} \to M(\check{C}(X)) \to M_{\ell-2}(b)[2b+1]\,.$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k) \arrow[r, "-\otimes M(\check{C}(X))"] & \mathrm{DM}_{\check{C}(X)} \arrow[r, "R\,\mathbf{Hom}_{\mathrm{DM}_{\check{C}(X)}}(-, M(\check{C}(X))(d+1)[2d+1])"] & \mathrm{DM}_{\check{C}(X)}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)}(\mathbf{Z}_{(\ell)}, M_{\ell-1}(1)[1]) \arrow[r, "\sim", "\textcircled{5}"'] \arrow[d, "\textcircled{6}"', "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}_{\check{C}(X)}}(M(\check{C}(X)), M_{\ell-1}(1)[1]) \arrow[r, "\sim", "\textcircled{3}"'] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}_{\check{C}(X)}}(M_{\ell-1}, M(\check{C}(X))(d+1)[2d+1]) \arrow[d, "\textcircled{2}"] \\
\overline{A_0}(X, \mathcal{K}_1) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook, "\textcircled{1}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)}(\mathbf{Z}_{(\ell)}, M(\check{C}(X))(1)[1]) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}_{\check{C}(X)}}(M(\check{C}(X)), M(\check{C}(X))(1)[1]) \arrow[r, "\sim", "\textcircled{4}"'] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}_{\check{C}(X)}}(M(\check{C}(X))(d)[2d], M(\check{C}(X))(d+1)[2d+1]) \\
k^{\times} \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)} \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)}(\mathbf{Z}_{(\ell)}, \mathbf{Z}_{(\ell)}(1)[1]) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}_{\check{C}(X)}}(M(\check{C}(X)), M(\check{C}(X))(1)[1]) \arrow[d, "\sim"] & \\
 & H^{1,1}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)}) \arrow[r, "\sim", "\textcircled{7}"'] & H^{1,1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(\ell)}) &
\end{tikzcd}
$$

Ce triangle est dual du triangle distingué (ii) de ce lemme :

(8) $$M(\check{C}(X))(d)[2d] \to M_{\ell-1} \to M_{\ell-2} \to M(\check{C}(X))(d)[2d+1]\ .$$

La dualité dans $\mathrm{DM}_{\check{C}(X)}$ montre que les flèches ③ et ④ sont des bijections. L'autodualité de $M_{\ell-1}$ dans $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)$ (et non seulement dans $\mathrm{DM}_{\check{C}(X)}$) a pour conséquence que le morphisme composé ③ ∘ ⑤ est une bijection. Ainsi, ⑤ est aussi une bijection.

Par un dévissage utilisant les triangles distingués du lemme 5.3, pour montrer que l'application ⑥ est une bijection, il suffit de montrer l'annulation des groupes $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)}(\mathbf{Z}_{(\ell)}, M(\check{C}(X))(ib+1)[2ib+1+\varepsilon])$ pour $1 \leq i \leq \ell-1$ et $\varepsilon \in \{0,1\}$, ce qui résulte de l'inégalité $2ib+1+\varepsilon > ib+1$ (comme dans le corollaire 1.10 (c)).

Observons enfin que le morphisme ⑦ est une bijection. En effet, grâce au théorème 1.11, pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{H}(k)$, $H^{p,1}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}_{(\ell)}) \simeq H^{p-1}_{\mathrm{Nis}}(\mathcal{X}, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$. Il en résulte que pour $p=1$ (et même pour $p=2$ d'après le théorème de Hilbert 90), ce groupe ne dépend que de l'image de $\mathcal{X}$ dans la version étale de $\mathcal{H}(k)$. Le lemme 3.15 permet donc de conclure que ⑦, le morphisme canonique $H^{1,1}(k, \mathbf{Z}_{(\ell)}) \to H^{1,1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(\ell)})$, est un isomorphisme.

Il résulte de la commutativité du diagramme de la page 28 et des isomorphismes obtenus que l'application ② est isomorphe à l'application ①. Comme ① est injective, le morphisme ② est aussi injectif. Grâce au lien évoqué plus haut entre le morphisme ② et le triangle distingué (8), on obtient une suite exacte :

$$H^{0,1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(\ell)}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)}(M_{\ell-2}, M(\check{C}(X))(d+1)[2d+1]) \to 0\ .$$

Le groupe $H^{0,1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(\ell)})$ étant nul, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)}(M_{\ell-2}, M(\check{C}(X))(d+1)[2d+1])$ est nul aussi. On en déduit l'annulation du groupe $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)}(M_{\ell-2}(b)[2b+1], M(\check{C}(X))$ $(\ell b+1)[2\ell b+2])$. Considérons le triangle distingué du lemme 5.3 (i) :

$$M_{\ell-2}(b)[2b] \to M_{\ell-1} \to M(\check{C}(X)) \to M_{\ell-2}(b)[2b+1]\ ,$$

et appliquons-lui le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)}(-, \mathbf{Z}_{(\ell)}(\ell b+1)[2\ell b+2])$. L'annulation que l'on vient d'obtenir fournit alors une injection :

$$H^{2\ell b+2,\ell b+1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(\ell)}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)}(M_{\ell-1}, \mathbf{Z}_{(\ell)}(\ell b+1)[2\ell b+2])\ .$$

Le motif $M_{\ell-1}$ étant un facteur direct de $M(X)$, le groupe de droite est un facteur direct de $H^{2\ell b+2,\ell b+1}(X, \mathbf{Z}_{(\ell)}) \simeq CH^{\ell b+1}(X) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)}$ qui est nul parce que $\ell b+1 > (\ell-1)b = d = \dim X$. Par conséquent, le groupe $H^{2\ell b+2,\ell b+1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(\ell)})$ est nul, ce qui achève la démonstration du lemme 5.12, et donc aussi celle du théorème 5.7.

6. VARIÉTÉS DE DÉPLOIEMENT ℓ-GÉNÉRIQUES

On rappelle que l'on a fixé un nombre premier ℓ, un entier $q \geq 2$ et que l'on suppose que la conjecture de Bloch-Kato est vraie en poids $\leq q-1$. Le but de ce §6 est de donner quelques indications sur la démonstration du théorème 6.2 ci-dessous qui énonce l'existence de variétés auxquelles appliquer le théorème 5.7 qui permet de démontrer le théorème 2.2. On se place ici en caractéristique zéro parce que la plupart des résultats sur les variétés de déploiement utilisent la résolution des singularités.

Définition 6.1. — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit $\{a_1,\dots,a_q\}\neq 0\in K_q^M(k)/\ell K_q^M(k)$. Une variété de déploiement ℓ-générique pour le symbole $\{a_1,\dots,a_q\}$ est une variété de déploiement X pour ce symbole (cf. définition 3.16) telle que pour toute extension K/k, si le symbole $\{a_1,\dots,a_q\}$ est nul dans $K_q^M(K)/\ell K_q^M(K)$, alors il existe une extension finie $\tilde{K}/K$ de degré premier à ℓ et un k-morphisme $\operatorname{Spec}\tilde{K}\to X$. (Grâce à la proposition 2.4, on voit qu'il suffit de tester ceci pour les corps K ℓ-spéciaux.)*

On rappelle que la notion de corps ℓ-spécial a été introduite dans la proposition 2.3.

Théorème 6.2 (Rost [33]). — *Soit k un corps de caractéristique zéro contenant une racine ℓ-ième ζ de l'unité. Soit $\underline{a}=\{a_1,\dots,a_q\}\neq 0\in K_q^M(k)/\ell K_q^M(k)$ avec $q\geq 2$.*

(1) *Il existe une variété de déploiement ℓ-générique $X_{\underline{a}}$ pour le symbole $\{a_1,\dots,a_q\}$ qui soit projective lisse, géométriquement connexe et de dimension $\ell^{q-1}-1$.*

Sous l'hypothèse supplémentaire que le corps k est ℓ-spécial, toute variété de déploiement ℓ-générique projective lisse X de dimension $\ell^{q-1}-1$ pour le symbole $\{a_1,\dots,a_q\}$ vérifie les propriétés suivantes :

(2) *La variété X est géométriquement connexe et est une $\nu_{\leq q-1}$-variété (cf. définition 3.17).*

(3) *L'application canonique $H_{-1,-1}(\check{C}(X))\to k^\times$ est injective, où $H_{-1,-1}(\check{C}(X)):=\operatorname{Hom}_{\mathrm{DM}_-^{\mathit{eff}}(k)}(\mathbf{Z},M(\check{C}(X))(1)[1])$*

Définition 6.3. — *Soit $X\in Sm/k$. Pour tout $i\in\mathbf{N}$, on note X_i l'ensemble des points de X dont l'adhérence soit de dimension i. On note $A_0(X,\mathcal{K}_1)$ le conoyau du morphisme canonique défini par des résidus en K-théorie de Milnor :*

$$\bigoplus_{x\in X_1}K_2^M(\kappa(x))\to\bigoplus_{x\in X_0}K_1^M(\kappa(x))\ .$$

(Cette définition est un cas particulier d'une construction très générale de Rost, cf. [31]*.) Pour tous $x\in X_0$ et $\lambda\in\kappa(x)^\times$, on note $[x,\lambda]\in A_0(X,\mathcal{K}_1)$ la classe de l'image de $\lambda\in\kappa(x)^\times\simeq K_1^M(\kappa(x))$.*

Lemme 6.4. — *Si X est une variété projective lisse sur k, on a un isomorphisme canonique fonctoriel :*

$$H_{-1,-1}(X)\simeq A_0(X,\mathcal{K}_1)\ .$$

Si X est de dimension d, la suite spectrale de coniveau pour la cohomologie motivique de X en poids $d+1$ prend la forme suivante :

$$E_1^{p,q}=\bigoplus_{x\in X_{d-p}}H^{q-p}(\kappa(x),\mathbf{Z}(d+1-p))\longrightarrow H^{p+q}(X,\mathbf{Z}(d+1))\ .$$

On en déduit un isomorphisme $H^{2d+1}(X,\mathbf{Z}(d+1)) \simeq \operatorname{coker}(d_1\colon E_1^{d-1,d+1} \to E_1^{d,d+1}) = A_0(X,\mathcal{K}_1)$ et on conclut en utilisant l'isomorphisme de dualité $H^{2d+1}(X,\mathbf{Z}(d+1)) \simeq H_{-1,-1}(X)$.

Définition 6.5. — *Soit X une variété projective lisse sur k. On note $\overline{A_0}(X,\mathcal{K}_1)$ le conoyau du morphisme $pr_{1\star} - pr_{2\star}\colon A_0(X\times_k X,\mathcal{K}_1) \to A_0(X,\mathcal{K}_1)$.*

Lemme 6.6. — *Soit X une variété projective lisse sur k. On a un isomorphisme canonique :*

$$\overline{A_0}(X,\mathcal{K}_1) \simeq H_{-1,-1}(\check{C}(X)) \ .$$

Compte tenu de ce qui précède, cela résulte d'un isomorphisme $H_{-1,-1}(\check{C}(X)) \simeq \operatorname{coker}(H_{-1,-1}(X\times X) \xrightarrow{pr_{1\star}-pr_{2\star}} H_{-1,-1}(X))$ dont la construction ne présente aucune difficulté.

Grâce aux identifications ci-dessus, le morphisme considéré dans l'énoncé (3) du théorème 6.2 s'identifie à un morphisme $\overline{A_0}(X,\mathcal{K}_1) \to k^\times$, lequel envoie $[x,\lambda]$ sur $N_{\kappa(x)/k}\lambda$. Pour obtenir l'injectivité de ce morphisme, Rost démontre le théorème suivant :

Théorème 6.7. — *Soit k un corps ℓ-spécial de caractéristique zéro. Soit $\underline{a} = \{a_1,\ldots,a_q\} \neq 0 \in K_q^M(k)/\ell K_q^M(k)$. Soit X une variété de déploiement ℓ-générique pour $\underline{a}$ qui soit projective lisse et de dimension $\ell^{q-1}-1$. Alors, tout élément de $\overline{A_0}(X,\mathcal{K}_1)$ est de la forme $[x,\lambda]$ avec $[\kappa(x):k] = \ell$.*

Nous donnerons un peu plus loin quelques indications sur la démonstration de ce théorème qui admet le corollaire suivant :

Corollaire 6.8. — *Sous les hypothèses du théorème 6.7, l'application canonique $\overline{A_0}(X,\mathcal{K}_1) \to k^\times$ est injective. (Autrement dit, l'énoncé (3) du théorème 6.2 est vrai.)*

En effet, soit $[x,\lambda] \in \overline{A_0}(X,\mathcal{K}_1)$ un élément du noyau de ce morphisme, avec $[\kappa(x):k] = \ell$. D'après l'exercice 2.6, l'extension $\kappa(x)/k$ est cyclique. Notons σ un générateur de son groupe de Galois. On a $1 = N_{\kappa(x)/k}\lambda = \lambda\cdot\sigma(\lambda)\cdot\cdots\cdot\sigma^{\ell-1}(\lambda)$. D'après le théorème de Hilbert 90, cela implique l'existence de $\mu \in \kappa(x)^\times$ tel que $\lambda = \frac{\sigma(\mu)}{\mu}$, de sorte que

$$[x,\lambda] = [x,\sigma(\mu)] - [x,\mu] = (pr_{1\star} - pr_{2\star})([(x, x\circ\sigma^\star),\sigma(\mu)]) = 0 \in \overline{A_0}(X,\mathcal{K}_1) \ ,$$

où $\sigma^\star = \operatorname{Spec}(\sigma)\colon \operatorname{Spec}\kappa(x) \to \operatorname{Spec}\kappa(x)$ et où $(x, x\circ\sigma^\star)\colon \operatorname{Spec}\kappa(x) \to X\times_k X$ est identifié à l'inclusion d'un point fermé de $X\times_k X$.

Procédons maintenant à la construction des variétés $X_{\underline{a}}$ (énoncé (1) du théorème 6.2), qui se fait par récurrence sur q. Si $q=2$, $\underline{a} = \{a_1,a_2\}$ et on note $X_{\underline{a}}$ la variété de Severi-Brauer (forme de $\mathbf{P}^{\ell-1}$) associée à l'algèbre cyclique $A_\zeta(a_1,a_2)$ qui est la k-algèbre définie par deux générateurs A et B et les relations $A^\ell = a_1$, $B^\ell = a_2$ et $AB = \zeta BA$; la plupart des propriétés de ces variétés de Severi-Brauer dont nous avons besoin sont établies dans [28] et [10]. Si $q>2$, on peut supposer que l'on dispose d'une variété de déploiement ℓ-générique Y projective lisse et de dimension $\ell^{q-2}-1$ pour le symbole

$\{a_1, \ldots, a_{q-1}\}$. On introduit le morphisme de projection évident $p\colon Y \times \mathrm{Sym}^{\ell-1} Y \to \mathrm{Sym}^{\ell} Y$ où pour tout $i \geq 0$, $\mathrm{Sym}^i Y := Y^i/\mathfrak{S}_i$ est le produit symétrique i-uple de Y. Notons $\tilde{U}$ l'ouvert dense de Y^ℓ où $\mathfrak{S}_\ell$ agit librement et $U := \tilde{U}/\mathfrak{S}_\ell$ l'ouvert (lisse) de $\mathrm{Sym}^\ell Y$ correspondant. Posons $V := p^{-1}U$. Le morphisme $\pi\colon V \to U$ induit par p est un revêtement étale à ℓ feuillets. Ainsi, la $\mathcal{O}_U$-Algèbre $\mathcal{A} := \pi_\star \mathcal{O}_U$ est un $\mathcal{O}_U$-Module localement libre de rang ℓ. La norme définit un morphisme de faisceaux d'ensembles $\mathcal{A} \xrightarrow{N} \mathcal{O}_U$ que pour des raisons d'homogénéité on peut interpréter comme une section globale N de $\mathbf{S}^\ell \mathcal{A}^\vee$, la ℓ-ième puissance symétrique du $\mathcal{O}_U$-Module dual $\mathcal{A}^\vee$ de $\mathcal{A}$. On peut interpréter géométriquement le $\mathcal{O}_U$-Module localement libre $\mathcal{A}$ comme étant le fibré vectoriel $\mathrm{Spec}_U \mathbf{S}^\star \mathcal{A}^\vee$. On note W l'hypersurface lisse de ce fibré vectoriel définie par l'équation $N - a_q = 0$. D'après la résolution des singularités, il existe une immersion ouverte d'image dense $W \to X_{\underline{a}}$ avec $X_{\underline{a}}$ projective lisse. Cette variété $X_{\underline{a}}$ de dimension $\ell^{q-1} - 1$ est le candidat construit par Voevodsky pour être une variété de déploiement ℓ-générique du symbole $\{a_1, \ldots, a_q\}$.

Lemme 6.9. — *La variété $X_{\underline{a}}$ construite ci-dessus est une variété de déploiement pour le symbole $\{a_1, \ldots, a_q\}$.*

Soit K une extension de k. Soit $f\colon \mathrm{Spec}\, K \to W$ un k-morphisme. Le morphisme composé $\mathrm{Spec}\, K \to W \to \mathrm{Sym}^\ell Y$ s'interprète comme un 0-cycle effectif $\sum_i y_i$ de degré ℓ sur $Y_K := Y \times_k \mathrm{Spec}\, K$. La donnée de f fournit alors des éléments $\lambda_i \in \kappa(y_i)$ tels que $\prod_i N_{\kappa(y_i)/K} \lambda_i = a_q$. Tautologiquement, comme Y est une variété de déploiement pour $\{a_1, \ldots, a_{q-1}\}$, les symboles $\{a_1, \ldots, a_{q-1}, \lambda_i\}$ sont nuls dans $K_q(\kappa(y_i))/\ell K_q(\kappa(y_i))$. Ensuite, si on note encore $N_{\kappa(y_i)/K}$ les morphismes de norme en K-théorie de Milnor, on a :

$$\begin{aligned} \{a_1, \ldots, a_q\} &= \sum_i \{a_1, \ldots, a_{q-1}, N_{\kappa(y_i)/K} \lambda_i\} \\ &= \sum_i N_{\kappa(y_i)/K} \{a_1, \ldots, a_{q-1}, \lambda_i\} = 0 \in K_q^M(K)/\ell K_q^M(K)\ . \end{aligned}$$

En appliquant ceci au point générique de W, c'est-à-dire $K = k(W) = k(X_{\underline{a}})$, on obtient que $X_{\underline{a}}$ est une variété de déploiement pour le symbole $\{a_1, \ldots, a_q\}$.

La démonstration du fait que cette variété $X_{\underline{a}}$ soit une variété de déploiement *ℓ-générique* est plus délicate. Elle utilise d'une part le théorème 6.7 que grâce à la récurrence sur q il est loisible d'appliquer au symbole $\{a_1, \ldots, a_{q-1}\}$ et à la variété Y. D'autre part, elle utilise le théorème suivant, qui repose sur les mêmes techniques que celles du §5, mais en poids $q - 1$:

Théorème 6.10 (Voevodsky [33, Theorem A.1]). — *Avec les notations ci-dessus, on a une suite exacte :*

$$\overline{A_0}(Y, \mathcal{K}_1) \xrightarrow{\quad N \quad} k^\times \xrightarrow{-\cup\{a_1, \ldots, a_{q-1}\}} K_q^M(k)/\ell K_q^M(k)\ .$$

Esquissons maintenant la démonstration du théorème 6.7. Cet énoncé résulte de deux principes. Le « principe de norme » [12, Theorem 0.3] énonce que tout élément de $\overline{A_0}(X, \mathcal{K}_1)$ de la forme $[y, \mu]$ est égal à un élément $[x, \lambda]$ avec $[\kappa(x) : k] = \ell$. Pour conclure, il suffit d'établir le lemme suivant (qui est d'ailleurs utilisé dans la démonstration du principe de norme) :

Lemme 6.11 (« Principe de multiplication »). — *Soit k un corps ℓ-spécial de caractéristique zéro. Soit $\underline{a} = \{a_1, \dots, a_q\} \neq 0 \in K_q^M(k)/\ell K_q^M(k)$. Soit X une variété de déploiement ℓ-générique pour $\underline{a}$ qui soit projective lisse et de dimension $\ell^{q-1} - 1$. On se donne deux éléments $[x_1, \lambda_1]$ et $[x_2, \lambda_2]$ de $\overline{A_0}(X, \mathcal{K}_1)$ avec $[\kappa(x_1) : k] = [\kappa(x_2) : k] = \ell$. Alors, il existe un élément $[x, \lambda]$ avec $[\kappa(x) : k] = \ell$ tel que $[x_1, \lambda_1] + [x_2, \lambda_2] = [x, \lambda] \in \overline{A_0}(X, \mathcal{K}_1)$.*

Le point de départ est que ce principe de multiplication est vrai pour $q = 2$ et X la variété de Severi-Brauer associée à l'algèbre cyclique $A_\zeta(a_1, a_2)$ où ζ est une racine ℓ-ième primitive de l'unité (cf. [33, Lemma 5.9]). Pour $q > 2$, l'ingrédient-clef de la démonstration du lemme 6.11 est l'énoncé suivant :

Théorème 6.12 (Lemme des chaînes [33, Theorem 5.6]). — *Soit k un corps ℓ-spécial de caractéristique zéro. Soit $\{a_1, \dots, a_q\} \neq 0 \in K_q^M(k)/\ell K_q^M(k)$. Soit $1 \leq n \leq q$. Supposons que $E_1, \dots, E_n$ soient des extensions de k de degré ℓ telles que $\{a_1, \dots, a_q\} = 0 \in K_q^M(E_i)/\ell K_q^M(E_i)$ pour $1 \leq i \leq n$. Alors, il existe un symbole $\{b_1, \dots, b_q\} \in K_q^M(k)$ tel que $\{a_1, \dots, a_q\} = \{b_1, \dots, b_q\} \in K_q^M(k)/\ell K_q^M(k)$ et que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\{b_1, \dots, b_i\} = 0 \in K_q^M(E_i)/\ell K_q^M(E_i)$.*

Esquissons la démonstration du principe de multiplication pour $q > 2$. On applique le lemme des chaînes avec $n = 2$ et $E_i = \kappa(x_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$. On obtient ainsi $\{a_1, \dots, a_q\} = \{b_1, \dots, b_q\}$, avec $\{b_1, b_2\} = 0 \in K_2^M(E_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$. Notons Z la variété de Severi-Brauer associée à l'algèbre cyclique $A_\zeta(b_1, b_2)$ avec ζ une racine primitive ℓ-ième de l'unité. La variété Z étant une variété de déploiement générique pour le symbole $\{b_1, b_2\}$, on obtient des points fermés z_i de Z tels que $\kappa(z_i) \simeq \kappa(x_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$. D'après le principe de multiplication pour Z, on peut trouver un élément $[z, \lambda] \in \overline{A_0}(Z, \mathcal{K}_1)$ tel que $[z, \lambda] = [z_1, \lambda_1] + [z_2, \lambda_2]$ et $[\kappa(z) : k] = \ell$. Le symbole $\{a_1, \dots, a_q\}$ est nul dans $K_q^M(k(Z))/\ell K_q^M(k(Z))$. Comme X est une variété de déploiement ℓ-générique, X admet un point à valeurs dans une extension de $k(Z)$ de degré premier à ℓ. Supposons pour simplifier que X admette un $k(Z)$-point, c'est-à-dire que l'on dispose d'une application rationnelle $Z \dashrightarrow X$. Pour simplifier, supposons que l'on dispose en fait d'un morphisme $f \colon Z \to X$. En appliquant $f_\star \colon \overline{A_0}(Z, \mathcal{K}_1) \to \overline{A_0}(X, \mathcal{K}_1)$ à l'identité ci-dessus, on obtient l'égalité $[f(z), \lambda] = [x_1, \lambda_1] + [x_2, \lambda_2]$ voulue, car même si $f(z_i)$ n'a aucune raison d'être égal à x_i, il suffit que $\kappa(f(z_i)) \simeq \kappa(x_i)$ pour que $[x_i, \lambda_i] = [f(z_i), \lambda_i]$ dans $\overline{A_0}(X, \mathcal{K}_1)$: c'est toute la différence entre $A_0(X, \mathcal{K}_1)$ et $\overline{A_0}(X, \mathcal{K}_1)$.

La démonstration de l'énoncé (2) du théorème 6.2 utilise une formulation géométrique du lemme des chaînes qui est plus forte que la version énoncée dans le théorème 6.12 et dont la démonstration n'est malheureusement qu'esquissée dans [12]. C'est alors par une étude attentive d'invariants numériques associés aux diverses variétés en jeu que cet énoncé (2) est obtenu. Dans cette étude, les résultats de Levine et Morel sur le cobordisme algébrique (cf. [25] et [26]) jouent un rôle important.

7. ESPACES D'EILENBERG-MAC LANE MOTIVIQUES

On présente ici des résultats de Voevodsky [41] sur les espaces d'Eilenberg-Mac Lane motiviques. Ces résultats intéressants pour eux-mêmes apparaissent ici car certains d'entre eux sont utilisés dans la démonstration du théorème 4.1. On fixe un corps k de caractéristique zéro.

Définition 7.1. — *Notons* **Ens** *la catégorie des ensembles. Pour tout $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$ et tout groupe abélien A, le foncteur $\mathcal{H}_\bullet(k)^{opp} \to$* **Ens** *qui à $\mathcal{X}$ associe $\tilde{H}^{p,q}(\mathcal{X}, A)$ est représentable par un objet $K(A(q),p) \in \mathcal{H}_\bullet(k)$ appelé espace d'Eilenberg-Mac Lane motivique. Autrement dit, $\tilde{H}^{p,q}(\mathcal{X}, A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_\bullet(k)}(\mathcal{X}, K(A(q),p))$. (L'existence de ces espaces est formelle, cf. proposition 7.4.)*

D'après le lemme de Yoneda, à toute transformation naturelle

$$H^{p,q}(-,A) \to H^{p',q'}(-,B)$$

de foncteurs $\mathcal{H}(k)^{\mathrm{opp}} \to$ **Ens** correspond un unique morphisme $K(A(q),p) \to K(B(q'),p')$ dans $\mathcal{H}(k)$, c'est-à-dire un élément dans $H^{p',q'}(K(A(q),p),B)$, ou encore un élément dans le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)}(M(K(A(q),p)), B(q')[p'])$. Pour comprendre la structure du groupe des transformations naturelles du type considéré ci-dessus (que l'on appelle opérations cohomologiques instables), il est donc crucial de connaître la structure du motif $M(K(A(q),p))$. Si B est un anneau commutatif, le groupe de ces opérations cohomologiques s'identifie aussi à

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k,B)}(M(K(A(q),p)) \otimes B, B(q')[p'])\ ;$$

autrement dit, il suffit d'étudier la structure du motif à coefficients dans B de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane motivique $K(A(q),p)$. Un des résultats principaux de [41] est le suivant :

Théorème 7.2 (Voevodsky [41, Corollary 3.28]). — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit ℓ un nombre premier. Pour $p \geq 2q \geq 0$, le motif $M(K(\mathbf{F}_\ell(q),p)) \otimes \mathbf{F}_\ell \in \mathrm{DM}^{\mathit{eff}}_{-}(k, \mathbf{F}_\ell)$ est isomorphe à une somme directe d'objets de la forme $\mathbf{F}_\ell(j)[i]$ avec $i \geq 2j$ et $j \geq q$.*

Corollaire 7.3. — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit ℓ un nombre premier. Si $p \geq 2q \geq 0$, le groupe des opérations cohomologiques instables*

$$H^{p,q}(-, \mathbf{F}_\ell) \to H^{\star,\star}(-, \mathbf{F}_\ell)$$

est libre en tant que module bigradué sur l'algèbre de cohomologie motivique $H^{\star,\star}(k, \mathbf{F}_\ell)$.

Si $M(K(\mathbf{F}_\ell(q), p)) \simeq \oplus_{\alpha \in A} \mathbf{F}_\ell(j_\alpha)[i_\alpha]$, chaque terme $\mathbf{F}_\ell(j_\alpha)[i_\alpha]$ de la décomposition définit une opération cohomologique instable $\psi_\alpha \colon H^{p,q}(-, \mathbf{F}_\ell) \to H^{i_\alpha, j_\alpha}(-, \mathbf{F}_\ell)$ et le groupe des opérations cohomologiques instables $H^{p,q}(-, \mathbf{F}_\ell) \to H^{\star,\star}(-, \mathbf{F}_\ell)$ s'identifie au produit des $H^{\star,\star}(k, \mathbf{F}_\ell)$-modules libres de rang 1 engendrés par chacun des ψ_α pour $\alpha \in A$. Les informations sur les bidegrés des élements ψ_α apportées par la démonstration du théorème montrent que ce produit indexé par A est aussi une somme directe. Les éléments $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ constituent donc une base du groupe des opérations cohomologiques $H^{p,q}(-, \mathbf{F}_\ell) \to H^{\star,\star}(-, \mathbf{F}_\ell)$ comme $H^{\star,\star}(k, \mathbf{F}_\ell)$-module bigradué.

La proposition suivante montre l'existence des espaces d'Eilenberg-Mac Lane motiviques :

Proposition 7.4. — *Le foncteur motif (réduit) $\tilde{M} \colon \mathcal{H}_\bullet(k) \to \mathrm{DM}^{\mathit{eff}}_-(k)$ admet un adjoint à droite $\mathbf{K} \colon \mathrm{DM}^{\mathit{eff}}_-(k) \to \mathcal{H}_\bullet(k)$. En particulier, l'espace d'Eilenberg-Mac Lane motivique $K(A(q), p)$ peut être décrit grâce à ce foncteur comme étant $\mathbf{K}(A(q)[p])$.*

Pour bien comprendre cette construction, on peut introduire une sous-catégorie pleine (non triangulée) $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(k)$ de $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(k)$ dans laquelle on considère seulement les complexes concentrés en degrés cohomologiques négatifs [(1)]. L'inclusion $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(k) \to \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(k)$ admet un adjoint à droite donné par une troncature (canonique). Le foncteur $\tilde{M} \colon \mathcal{H}_\bullet(k) \to \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_-(k)$ se factorisant par la sous-catégorie pleine $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(k)$, pour établir la proposition, il suffit donc de montrer que le foncteur $\tilde{M} \colon \mathcal{H}_\bullet(k) \to \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(k)$ admet un adjoint à droite. Ce foncteur adjoint $\mathbf{K} \colon \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(k) \to \mathcal{H}_\bullet(k)$ est défini comme suit. Si $M_\star$ est un complexe de faisceaux avec transferts (numérotés homologiquement) tel que $M_n = 0$ pour $n < 0$, $M_\star$ définit par oubli des transferts un complexe de faisceaux de groupes abéliens $\mathrm{oub}(M_\star)$ sur Sm/k_{Nis} placés en degrés homologiques positifs. D'après la correspondance de Dold-Kan (cf. [11, Theorem 2.5, Chapter III]), la donnée de $\mathrm{oub}(M_\star)$ équivaut à celle d'un objet simplicial $\mathcal{M}$ dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur Sm/k_{Nis}. En oubliant la structure additive sur $\mathcal{M}$, on obtient un faisceau simplicial (pointé) sur Sm/k_{Nis}, ce qui définit un objet de $\mathcal{H}_\bullet(k)$ que l'on peut noter $\mathbf{K}(M_\star)$.

Définition 7.5. — *On note $S^{1,1}/\ell \in \mathcal{H}_\bullet(k)$ la cofibre homotopique du morphisme $\mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_m$ donné par l'élévation à la puissance ℓ. Plus généralement, pour $p \geq q > 0$, on pose $S^{p,q}/\ell := (S^{1,1}/\ell) \wedge S^{p-1,q-1} \simeq (S^{1,1}/\ell) \wedge \mathbf{G}_m^{\wedge(q-1)} \wedge S^{p-q}$ (cf. définition 3.1).*

1. Avec les notations de [41], cette catégorie $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(k)$ serait notée $H_{Nis,\mathbf{A}^1}(Cor(Sm/k))$.

Il est évident que $\tilde{M}(S^{1,1}/\ell) \simeq \mathbf{F}_\ell(1)[1]$ dans $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{-}(k)$. On en déduit un isomorphisme $\tilde{M}(S^{p,q}/\ell) \simeq \mathbf{F}_\ell(q)[p]$ pour tous $p \geq q > 0$.

Ceci montre qu'il est intéressant de considérer la composition

$$\mathcal{H}_\bullet(k) \xrightarrow{\tilde{M}} \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(k) \xrightarrow{\mathbf{K}} \mathcal{H}_\bullet(k) \ ,$$

puisqu'elle envoie $S^{p,q}/\ell$ sur l'espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(\mathbf{F}_\ell(q), p)$. Pour ainsi dire par définition, pour $X \in Sm/k$, ce foncteur $\mathbf{K} \circ \tilde{M}$ envoie X_+ sur $\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}(X)$ que l'on considère comme faisceau d'ensembles pointés sur Sm/k_{Nis} plutôt que comme faisceau avec transferts. D'après la proposition 1.2, le faisceau $\mathbf{Z}_{\mathrm{tr}}(X)$ s'identifie au complété en groupes du faisceau de monoïdes « représenté » par le k-schéma $\mathrm{Sym}^\infty X := \coprod_{n\geq 0} \mathrm{Sym}^n X$. Nous allons maintenant esquisser dans quelle mesure cette idée est développée par Voevodsky dans [41].

Tout d'abord, comme $\mathrm{Sym}^n X$ n'a aucune raison d'être lisse si X l'est, Voevodsky introduit dans [41] une variante de la catégorie homotopique $\mathcal{H}_\bullet(k)$ définie en utilisant le grand site Nisnevich Sch/k_{Nis} des k-schémas quasi-projectifs plutôt que Sm/k_{Nis}. Cette catégorie sera notée ici $\mathcal{H}'_\bullet(k)$.

Soit X un objet de Sch/k muni d'un point-base $x\colon \operatorname{Spec} k \to X$. On suppose que ce point-base est disjoint, c'est-à-dire que $X \simeq Y_+$ où $Y \in Sch/k$. Pour $n \geq 1$, on pose $S^n X := \mathrm{Sym}^n X = X^n/\mathfrak{S}_n$. Le point-base x permet de définir un morphisme évident $S^{n-1}X \to S^n X$ dont on peut remarquer qu'il s'agit de l'inclusion d'un sous-schéma ouvert et fermé. On note S^∞ la colimite des $S^n X$ calculée dans la catégorie des faisceaux d'ensembles pointés sur Sch/k_{Nis}. Voevodsky montre que ces foncteurs s'étendent naturellement en des foncteurs $S^n\colon \mathcal{H}'_\bullet(k) \to \mathcal{H}'_\bullet(k)$ et $S^\infty\colon \mathcal{H}'_\bullet(k) \to \mathcal{H}'_\bullet(k)$ (cf. [41, Corollary 2.11]). On dispose aussi d'une variante $\tilde{S}^n\colon \mathcal{H}'_\bullet(k) \to \mathcal{H}'_\bullet(k)$ de ces foncteurs pour $n \geq 1$: pour X comme ci-dessus, $\tilde{S}^n X := (S^n X - S^{n-1}X)_+ \simeq (Y^n/\mathfrak{S}_n)_+$ et $S^\infty X \simeq \vee_{n\geq 1} \tilde{S}^n X$. Dans l'énoncé du théorème suivant, on a encore noté $S^\infty\colon \mathcal{H}'_\bullet(k) \to \mathcal{H}_\bullet(k)$ le foncteur obtenu en composant $S^\infty\colon \mathcal{H}'_\bullet(k) \to \mathcal{H}'_\bullet(k)$ et le foncteur de « restriction » $\mathcal{H}'_\bullet(k) \to \mathcal{H}_\bullet(k)$:

Théorème 7.6 (Voevodsky [41, Propositions 3.11 & 3.15]). — *Si $p \geq q > 0$, il existe un isomorphisme canonique $K(\mathbf{F}_\ell(q), p) \simeq S^\infty(S^{p,q}/\ell)$ dans $\mathcal{H}_\bullet(k)$.*

Ce théorème énonce que la valeur du foncteur composé $\mathbf{K} \circ \tilde{M}$ sur certains objets peut être calculée en termes du foncteur S^∞. Nous avions vu plus haut que les espaces d'Eilenberg-Mac Lane pouvaient être construits grâce à des produits symétriques infinis complétés en groupes. Ce théorème énonce donc que dans les cas particuliers considérés ici la complétion en groupes n'est pas nécessaire, tout comme l'énonce le théorème de Dold-Thom pour les espaces d'Eilenberg-Mac Lane usuels.

Pour aller plus loin, Voevodsky a la très intéressante idée de faire passer les foncteurs S^n sur $\mathcal{H}'_\bullet(k)$ à la catégorie $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\leq 0}(k)$:

Théorème 7.7 (Voevodsky [41, Theorem 2.31 & Proposition 2.50])

Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit ℓ un nombre premier. Pour tout $n \geq 1$, il existe un foncteur $S^n_{tr}\colon \mathrm{DM}^{\mathit{eff}}_{\leq 0}(k, \mathbf{F}_\ell) \to \mathrm{DM}^{\mathit{eff}}_{\leq 0}(k, \mathbf{F}_\ell)$ faisant commuter le diagramme suivant à des isomorphismes canoniques près :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_\bullet(k) \arrow[r, "\tilde{S}^n"] \arrow[d, "\tilde{M}(-,\mathbf{F}_\ell)"] & \mathcal{H}'_\bullet(k) \arrow[d, "\tilde{M}(-,\mathbf{F}_\ell)"] \\ \mathrm{DM}^{\mathit{eff}}_{\leq 0}(k, \mathbf{F}_\ell) \arrow[r, "S^n_{tr}"] & \mathrm{DM}^{\mathit{eff}}_{\leq 0}(k, \mathbf{F}_\ell) \end{tikzcd}$$

(Il existe de même un foncteur S^∞_{tr} relié de façon semblable à S^∞.)

On pourra noter que les puissances symétriques intervenant ici existent pour tout $n \geq 1$, sans l'hypothèse $n \leq \ell - 1$ du §4. La notation $\tilde{M}(-, \mathbf{F}_\ell)$ indique que l'on considère ici le motif (réduit) à coefficients dans $\mathbf{F}_\ell$.

Corollaire 7.8. — *Pour $p \geq q > 0$, on a un isomorphisme canonique dans $\mathrm{DM}^{\mathit{eff}}_{\leq 0}(k, \mathbf{F}_\ell)$:*

$$\tilde{M}(K(\mathbf{F}_\ell(q), p), \mathbf{F}_\ell) \simeq S^\infty_{tr}(\mathbf{F}_\ell(q)[p] \oplus \mathbf{F}_\ell(q)[p+1]) \;.$$

En effet, le motif (réduit) à coefficients entiers de $S^{p,q}/\ell$ s'identifie à $\mathbf{F}_\ell(q)[p]$. À coefficients $\mathbf{F}_\ell$, on obtient donc $\mathbf{F}_\ell(q)[p] \otimes^L_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_\ell \simeq \mathbf{F}_\ell(q)[p] \oplus \mathbf{F}_\ell(q)[p+1]$. Ainsi, le corollaire apparaît bien comme une conséquence des théorèmes 7.6 et 7.7.

Compte tenu de ce corollaire 7.8, le théorème 7.2 est une conséquence du théorème suivant :

Théorème 7.9 (Voevodsky [41, Corollary 2.77]). — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Pour tout $q \geq 0$, on note $\overline{SPT}_{\geq q}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{DM}^{\mathit{eff}}_{\leq 0}(k, \mathbf{F}_\ell)$ formée des sommes directes d'objets de la forme $\mathbf{F}_\ell(j)[i]$ pour $i \geq 2j$ et $j \geq q$.*

Alors, $S^\infty_{tr}(\overline{SPT}_{\geq q}) \subset \overline{SPT}_{\geq q}$.

Au prix de nombreuses réductions, le théorème se ramène à l'étude du motif $S^\ell_{\mathrm{tr}}(\mathbf{F}_\ell(q)[2q])$ pour $q \geq 1$. Par des considérations géométriques, il est possible d'obtenir une décomposition explicite de ce motif qui mette en évidence qu'il appartienne à $\overline{SPT}_{\geq q+\ell-1}$ [41, Theorem 2.58].

Une application importante des résultats de [41] évoqués dans cette section est le théorème suivant sur les opérations cohomologiques stables :

Théorème 7.10 (Voevodsky [41, §3.4]). — *Soit k un corps de caractéristique zéro. Soit ℓ un nombre premier. L'algèbre des opérations cohomologiques stables sur la cohomologie motivique à coefficients $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ est engendrée par $H^{\star,\star}(k, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$, β et les opérations P^n pour $n \geq 0$. Elle coïncide donc avec l'algèbre de Steenrod motivique $A^{\star,\star}(k, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ étudiée dans* [39].

Indépendamment l'un de l'autre, Marc Hoyois et l'auteur du présent exposé ont observé que la démonstration de ce théorème permettait de montrer que $A^{\star,\star}(k, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ s'identifiait à l'algèbre bigraduée des endomorphismes du spectre d'Eilenberg-Mac Lane motivique $\mathbf{H}_{\mathbf{F}_\ell}$ dans la catégorie homotopique stable $\mathcal{SH}(k)$.

8. APPLICATIONS

On donne ici quelques exemples d'applications de la conjecture de Bloch-Kato.

Théorème 8.1 (Jannsen & S. Saito [13], Kerz & S. Saito [24])
Soit X une variété propre et lisse de dimension d sur un corps fini de caractéristique p. Soit n un entier non multiple de p. La suite suivante est exacte :

$$0 \to \oplus_{x\in X_d} H^{d+1}_{ét}(\kappa(x), \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(d)) \to \oplus_{x\in X_{d-1}} H^{d}_{ét}(\kappa(x), \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(d-1)) \to \dots$$
$$\dots \to \oplus_{x\in X_1} H^{2}_{ét}(\kappa(x), \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(1)) \to \oplus_{x\in X_0} H^{1}_{ét}(\kappa(x), \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})\,.$$

Cet énoncé est un « principe de Hasse cohomologique ». Kerz et Saito obtiennent des énoncés semblables pour les schémas réguliers propres et plats au-dessus d'un anneau d'entiers d'un corps local p-adique ou d'un anneau de S-entiers de corps de nombres. Ces résultats conjecturés par Kato généralisent ceux qu'il avait obtenus en dimension 2 (cf. [21]).

En utilisant la conjecture de Bloch-Kato, Colliot-Thélène et Voisin ont étudié une version entière de la conjecture de Hodge. Le théorème suivant est une conséquence de leur méthode et d'un résultat de Kahn, Rost et Sujatha [17] :

Théorème 8.2 (Colliot-Thélène & Voisin [6, Corollaire 8.2])
Soit $X \to Y$ un morphisme dominant de variétés connexes, projectives et lisses sur $\mathbf{C}$, de fibre générique une quadrique de dimension au moins 1, de base une surface Y. Soit α une classe dans le groupe de cohomologie singulière $\alpha \in H^4(X, \mathbf{Z})$. Si $\alpha_{\mathbf{Q}} \in H^4(X, \mathbf{Q})$ est de Hodge, alors α appartient à l'image de la classe de cycle $CH^2(X) \to H^4(X, \mathbf{Z})$.

Toutefois, Kahn a montré dans [16] que l'on pouvait éviter d'utiliser la conjecture de Bloch-Kato (en poids 3 ici) pour obtenir ce théorème : seul le théorème de Merkurjev-Suslin (cas du poids 2) est nécessaire.

Définition 8.3. — *Soit A un anneau local (ou plus généralement semi-local). L'algèbre de K-théorie de Milnor $K^M_\star(A)$ de A est le quotient de l'algèbre tensorielle sur $\mathbf{Z}$ du groupe $A^\times$ des unités de A par l'idéal bilatère engendré par les éléments $x \otimes (1-x)$ pour $x \in A^\times$ tel que $1 - x \in A^\times$.*

Théorème 8.4 (Kerz [23, Theorem 1.1]). — *Soit X un schéma lisse sur un corps parfait infini k. Soit $x \in X$. Notons $\mathcal{O}_{X,x}$ le localisé de X en x. Pour tout $q \geq 0$, il existe un isomorphisme canonique $K^M_q(\mathcal{O}_{X,x}) \simeq H^q(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}), \mathbf{Z}(q))$.*

La démonstration de ce théorème généralisant la proposition 1.12 n'utilise pas la conjecture de Bloch-Kato, mais son corollaire (conjecturé par Marc Levine) l'utilise :

COROLLAIRE 8.5 (Kerz [23, Theorem 7.8]). — *Soit ℓ un nombre premier. Soit X un schéma lisse sur un corps (parfait) infini k de caractéristique différente de ℓ. Soit $x \in X$. Notons $\mathcal{O}_{X,x}$ le localisé de X en x. Pour tout $q \geq 0$, il existe un isomorphisme canonique $K_q^M(\mathcal{O}_{X,x})/\ell K_q^M(\mathcal{O}_{X,x}) \simeq H^q_{ét}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}), \mu_\ell^{\otimes q})$.*

Mentionnons enfin une application de la conjecture de Bloch-Kato au calcul de la K-théorie algébrique des anneaux d'entiers de corps de nombres.

DÉFINITION 8.6. — *Soit K un corps de nombres. Soit ℓ un nombre premier impair. Notons $\chi\colon \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{\ell^\infty})/\mathbf{Q}) \simeq \mathbf{Z}_\ell^\times$ le caractère cyclotomique. Soit $i \geq 1$. On note $w_i^{(\ell)}(K)$ la plus grande puissance ℓ^ν de ℓ telle que l'on ait la congruence $\chi^i \equiv 1 \mod \ell^\nu$.*

EXERCICE 8.7. — *Avec les notations de la définition précédente, montrer qu'il existe un isomorphisme $H^0_{\text{ét}}(K, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(i)) \simeq \mathbf{Z}/w_i^{(\ell)}(K)$.*

THÉORÈME 8.8 ([44, Theorem 70]). — *Soit ℓ un nombre premier impair. Soit K un corps de nombres. Soit S un ensemble fini de places (finies) de K. On note $\mathcal{O}_S$ l'anneau des S-entiers. Pour tout $n \geq 2$, il existe des isomorphismes :*

$$K_n(\mathcal{O}_S) \otimes \mathbf{Z}_{(\ell)} \simeq \begin{cases} \lim\limits_{k \in \mathbf{N}} H^2_{ét}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_S[1/\ell]), \mu_{\ell^k}^{\otimes i+1}) & si\ n = 2i \\ \mathbf{Z}_{(\ell)}^{r_1+r_2} \oplus \mathbf{Z}/w_i^{(\ell)}(K) & si\ n = 2i-1 \equiv 1 \mod 4 \\ \mathbf{Z}_{(\ell)}^{r_2} \oplus \mathbf{Z}/w_i^{(\ell)}(K) & si\ n = 2i-1 \equiv 3 \mod 4\,. \end{cases}$$

L'entier r_1 (resp. r_2) désigne le nombre de places réelles (resp. complexes) du corps K.

La démonstration de ce théorème s'appuie notamment sur le calcul par Borel du rang des groupes de K-théorie algébrique de $\mathcal{O}_S$ (ils ne dépendent que de r_1 et r_2), sur une suite spectrale reliant la K-théorie algébrique et la cohomologie motivique, et sur la conjecture de Bloch-Kato. Pour plus de détails et pour les énoncés en $\ell = 2$, le lecteur pourra consulter [44].

RÉFÉRENCES

[1] *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)* – Documents Mathématiques (Paris), 3, Société Mathématique de France, Paris, 2003, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1960-61, Séminaire dirigé par A. Grothendieck. Augmenté de deux exposés de Mme M. Raynaud.

[2] J. AYOUB – *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. I*, Astérisque, Vol. 314, 2007.

[3] H. BASS & J. TATE – *The Milnor ring of a global field*, in *Algebraic K-theory, II : "Classical" algebraic K-theory and connections with arithmetic (Proc. Conf., Seattle, Wash., Battelle Memorial Inst., 1972),* Springer, Berlin, Lecture Notes in Math. **342** (1973), 349–446.

[4] S. BLOCH – *Lectures on algebraic cycles*, Duke University Mathematics Series, IV, Duke University Mathematics Department, Durham, N.C., 1980.

[5] S. BLOCK & K. KATO – *p-adic étale cohomology*, Publ. Math. I.H.É.S. **63** (1986), 107–152.

[6] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE & C. VOISIN – *Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière*, Duke Math. J. **161** (2012), 735–801.

[7] E.M. FRIEDLANDER – *Motivic complexes of Suslin and Voevodsky*, Sém. Bourbaki (1996/97), Exp. n° 833, Astérisque **245** (1997), 355–378.

[8] T. GEISSER & M. LEVINE – *The Bloch-Kato conjecture and a theorem of Suslin-Voevodsky*, J. reine angew. Math. **530** (2001), 55–103.

[9] P. GILLE – *Symbole galoisien ℓ-adique et théorème de Suslin-Voevodsky*, J. Math. Kyoto Univ. **47** (2007), 665–690.

[10] P. GILLE & T. SZAMUELY – *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Math., Vol. 101, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.

[11] P.G. GOERSS & J.F. JARDINE – *Simplicial homotopy theory*, Progress in Math., Vol. 174, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[12] C. HAESEMEYER & C. WEIBEL – *Norm varieties and the chain lemma (after Markus Rost)*, in *Algebraic Topology*, Abel Symp., Vol. 4, Springer, Berlin, 2009, 95–130.

[13] U. JANNSEN & S. SAITO – *Kato conjecture and motivic cohomology over finite fields*, `http://arxiv.org/abs/0910.2815`.

[14] J.F. JARDINE – *Motivic symmetric spectra*, Doc. Math **5** (2000), 445–553 (electr.).

[15] B. KAHN – *La conjecture de Milnor (d'après V. Voevodsky)*, Sém. Bourbaki (1996/97), Exp. n° 834, Astérisque **245** (1997), 379–418.

[16] B. KAHN – *Classes de cycles motiviques étales*, Algebra Number Theory **6** (2012), 1369–1407.

[17] B. KAHN, M. ROST & R. SUJATHA – *Unramified cohomology of quadrics. I*, Amer. J. Math **120** (1998), 841–891.

[18] B. KAHN & R. SUJATHA – *Birational motives, I*, `http://www.math.jussieu.fr/~kahn/preprints/birat11.pdf`.

[19] K. KATO – *A generalization of local class field theory by using K-groups. I*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **26** (1979), 303–376.

[20] K. KATO – *A generalization of local class field theory by using K-groups. II*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **27** (1980), 603–683.

[21] K. KATO – *A Hasse principle for two-dimensional global fields*, with an appendix by Jean-Louis Colliot-Thélène, J. reine angew. Math. **366** (1986), 142–183.

[22] K. KATO & S. SAITO – *Global class field theory of arithmetic schemes*, in *Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II, (Boulder, Colo., 1983)*, Contemp. Math., Vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1986, 255–331.

[23] M. KERZ – *The Gersten conjecture for Milnor K-theory*, Invent. Math **175** (2009), 1–33.

[24] M. KERZ & S. SAITO – *Cohomological Hasse principle and motivic cohomology for arithmetic schemes*, Publ. Math. I.H.É.S. **115** (2012), 123–183.

[25] M. LEVINE & F. MOREL – *Algebraic cobordism*, Springer Monographs in Math., Springer, Berlin, 2007.

[26] F. LOESER – *Cobordisme des variétés algébriques (d'après M. Levine et F. Morel)*, Sém. Bourbaki (2001/02), Exp. n° 901, Astérisque **290** (2003), 167–192.

[27] C. MAZZA, V. VOEVODSKY & C. WEIBEL – *Lecture notes on motivic cohomology*, Clay Mathematics Monographs, Vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2006.

[28] A.S. MERKURJEV & A.A. SUSLIN – *K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), 1011–1046, 1135–1136.

[29] J. MILNOR – *Algebraic K-theory and quadratic forms*, Invent. Math. **9** (1969/70), 318–344.

[30] F. MOREL & V. VOEVODSKY – *$\mathbf{A}^1$-homotopy theory of schemes*, Publ. Math. I.H.É.S. **90** (1999), 45–143.

[31] M. ROST – *Chow groups with coefficients*, Doc. Math. **1** (1996), 319–393 (electr.).

[32] J-P. SERRE – *Cohomologie galoisienne*, 5e éd., Lecture Notes in Math., Vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[33] A. SUSLIN & S. JOUKHOVITSKI – *Norm varieties*, J. Pure Appl. Algebra **206** (2006), 245–276.

[34] A. SUSLIN & V. VOEVODSKY – *Singular homology of abstract algebraic varieties*, Invent. Math. **123** (1996), 61–94.

[35] A. SUSLIN & V. VOEVODSKY – *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*, in *The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998)*, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., Vol. 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, 117-189.

[36] V. VOEVODSKY – *$\mathbf{A}^1$-homotopy theory*, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998)* Doc. Math., Extra Vol. I, 1998, 579–604 (electr.).

[37] V. VOEVODSKY – *Motivic cohomology groups are isomorphic to higher Chow groups in any characteristic*, Int. Math. Res. Not. **7** (2002), 351–355.

[38] V. VOEVODSKY – *Motivic cohomology with* $\mathbf{Z}/2$*-coefficients*, Publ. Math. I.H.É.S. **98** (2003), 59–104.

[39] V. VOEVODSKY – *Reduced power operations in motivic cohomology*, Publ. Math. I.H.É.S. **98** (2003), 1–57.

[40] V. VOEVODSKY – *Motives over simplicial schemes*, J. K-Theory **5** (2010), 1–38.

[41] V. VOEVODSKY – *Motivic Eilenberg-MacLane spaces*, Publ. Math. I.H.É.S. **112** (2010), 1–99.

[42] V. VOEVODSKY – *On motivic cohomology with* $\mathbf{Z}/\ell$*-coefficients*, Ann. of Math. (2) **174** (2011), 401–438.

[43] V. VOEVODSKY, A. SUSLIN & E.M. FRIEDLANDER – *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Annals of Math. Studies, Vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 2000.

[44] C. WEIBEL – *Algebraic K-theory of rings of integers in local and global fields*, in *Handbook of K-theory, Vol. 1, 2*, Springer, Berlin, 2005, 139–190.

Joël RIOU

Université Paris-Sud 11
Département de Mathématiques
Bât. 425
F–91405 Orsay cedex
E-mail : `joel.riou@math.u-psud.fr`