Séminaire BOURBAKI Novembre 2014
67ème année, 2014-2015, n° 1090

LA PROPRIÉTÉ NOETHÉRIENNE POUR LES FONCTEURS ENTRE ESPACES VECTORIELS
[d'après A. Putman, S. Sam et A. Snowden]

par **Aurélien DJAMENT**

INTRODUCTION

L'un des outils les plus fondamentaux pour montrer qu'un anneau est noethérien est le théorème de la base de Hilbert. Frappant par sa généralité et la simplicité de sa démonstration (alors que les propriétés de finitude des anneaux et modules conduisent très rapidement à des questions difficiles — voir par exemple l'ouvrage [27]), on peut l'établir à l'aide des bases de Gröbner. Celles-ci permettent, de fait, de ramener la propriété noethérienne dans le cadre *linéaire* qui est celui du théorème de Hilbert à une propriété noethérienne *combinatoire* (portant sur un ensemble ordonné), qui est immédiate dans ce cadre. L'idée essentielle du travail de S. Sam et A. Snowden [47], ainsi que de celui, relié, d'A. Putman et Sam [44], que nous allons esquisser ici consiste en une vaste généralisation de ces méthodes, conduisant à des résultats de finitude spectaculaires dans des catégories de foncteurs.

Revenons au théorème de la base de Hilbert. Comme un anneau A est noethérien à gauche si et seulement si la catégorie $\mathcal{A} := A - \mathbf{Mod}$ des A-modules à gauche est localement noethérienne (1), et que la catégorie $A[x] - \mathbf{Mod}$ s'identifie à la catégorie des A-modules à gauche munis d'un endomorphisme, que nous noterons $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$ (car un endomorphisme est la même chose qu'une action du monoïde additif $\mathbb{N}$ des entiers naturels), une reformulation de ce théorème est la suivante :

Théorème 0.1 (Théorème de la base de Hilbert). — *Si la catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est localement noethérienne, alors la catégorie abélienne $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$ est localement noethérienne.*

Le résultat est en fait valable sous cette forme si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne quelconque et se démontre de la même façon.

Si l'on note $\underline{\mathbb{N}}$ la catégorie à un objet associée au monoïde $\mathbb{N}$, la catégorie $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$ est isomorphe à la catégorie $\mathbf{Fct}(\underline{\mathbb{N}}, \mathcal{A})$ des foncteurs de source $\underline{\mathbb{N}}$ et de but $\mathcal{A}$. En général, si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne et $\mathcal{C}$ est une petite catégorie quelconque, la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ est une catégorie abélienne (assez régulière si $\mathcal{A}$ l'est) ; on est conduit à poser la question suivante :

1. Toutes les notions de finitude utilisées dans cet exposé seront rappelées en détail au paragraphe 2.1.

Question fondamentale pour une petite catégorie $\mathcal{C}$ — *Est-il vrai que, pour toute catégorie abélienne localement noethérienne (assez régulière)* $\mathcal{A}$*, la catégorie de foncteurs* $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ *est localement noethérienne ?*

Les catégories finies (ayant un nombre fini d'objets et de morphismes) constituent un exemple évident de telles catégories. Le théorème de la base de Hilbert donne un autre exemple ; la réponse à la question est négative pour la plupart des petites catégories. Déjà, si l'on se restreint aux catégories à un objet associées à un groupe, on se heurte à la question très difficile de caractériser les groupes dont l'algèbre (sur un corps, sur l'anneau des entiers...) est un anneau noethérien. Mais même en se limitant, comme il est classique de le faire, aux petites catégories $\mathcal{C}$ telles que l'ensemble $\mathcal{C}(a, b)$ des morphismes de source a et de but b soit fini pour tous objets a et b, la question demeure très difficile et largement ouverte.

La théorie de Sam et Snowden fournit un critère général sur une petite catégorie, vérifiable dans de nombreux exemples intéressants, pour que la réponse à la question fondamentale soit positive (ce sont les catégories que ces auteurs nomment *quasi-Gröbner*).

L'une des applications les plus importantes de leur travail est le théorème suivant, dont la première assertion avait été conjecturée par J. Lannes et L. Schwartz à la fin des années 1980 (voir le paragraphe 1.1 ci-après pour un historique du problème).

Théorème 0.2 (Putman-Sam, Sam-Snowden). — *Soit* k *un corps fini. La catégorie* $\mathcal{F}(k)$ *des foncteurs des* k*-espaces vectoriels de dimension finie vers les* k*-espaces vectoriels est localement noethérienne.*

Plus généralement, soient A *un anneau fini,* $\mathbf{P}(A)$ *la catégorie des* A*-modules libres de rang fini et* $\mathcal{A}$ *une catégorie de Grothendieck localement noethérienne. Alors la catégorie* $\mathbf{Fct}(\mathbf{P}(A), \mathcal{A})$ *est localement noethérienne.*

Dans le travail [44], Putman et Sam démontrent ce résultat, pour A commutatif, en le déduisant du suivant, plus fort, qu'on ne semble pas pouvoir établir en utilisant le critère de [47] (même si la méthode est analogue) :

Théorème 0.3 (Putman-Sam). — *Pour un anneau commutatif fini* A*, notons* $\mathbf{S}(A)$ *la catégorie des* A*-modules libres de rang fini, les morphismes étant les injections linéaires munies d'un scindement. Si* $\mathcal{A}$ *est une catégorie de Grothendieck localement noethérienne, alors la catégorie* $\mathbf{Fct}(\mathbf{S}(A), \mathcal{A})$ *est localement noethérienne.*

Nous donnerons plus loin (corollaire 1.2) une conséquence assez directe de ce résultat qu'on ne semble pas pouvoir déduire simplement du théorème 0.2.

Dans cet exposé, nous présenterons la démonstration du théorème 0.2 mais pas celle du théorème 0.3, similaire mais plus délicate techniquement. L'idée consiste à répondre positivement à la question fondamentale d'abord pour une catégorie de nature ensembliste, ou combinatoire, ne possédant aucun endomorphisme non trivial. Cela présente l'avantage de faire disparaître de difficiles problèmes liés à la théorie des représentations et de permettre d'appliquer assez directement une méthode inspirée des bases de Gröbner, ramenant la propriété noethérienne pour un foncteur à valeurs dans une catégorie abélienne à la propriété noethérienne pour un foncteur à valeurs dans la catégorie des ensembles, ou une catégorie voisine, propriété qu'on peut alors traiter grâce à la combinatoire d'ensembles ordonnés. On conclut par des arguments élémentaires de changement de catégorie source.

Remerciements. — L'auteur remercie chaleureusement Steven Sam pour la communication privée de versions préliminaires de ses travaux et de nombreux échanges fructueux. Il est également reconnaissant envers Christine Vespa, Vincent Franjou, Geoffrey Powell et Lionel Schwartz pour des discussions utiles à l'amélioration des premières versions de ce texte. Il doit enfin à Nick Kuhn une précision historique sur la conjecture de finitude de Lannes et Schwartz.

1. HISTORIQUE ET CONSÉQUENCES DE LA CONJECTURE DE FINITUDE POUR LES FONCTEURS ENTRE ESPACES VECTORIELS

Les problèmes de finitude dans les catégories de foncteurs sont étudiés depuis longtemps en théorie des représentations, notamment à travers la notion de foncteur cohérent, introduite par Auslander dans [1]. Cependant, les propriétés noethériennes (ou artiniennes, la notion duale) des foncteurs, souvent très difficiles d'accès hors quelques cas particuliers où elles sont triviales, semblent avoir fait l'objet d'assez peu de travaux pendant une longue période. C'est sous l'influence de la topologie algébrique que les catégories $\mathcal{F}(k)$ de foncteurs entre k-espaces vectoriels, où k est un corps fini, vont susciter davantage d'intérêt, à partir de la fin des années 1980.

En fait, la considération de foncteurs entre espaces vectoriels (ou entre modules), qu'il s'agisse des catégories $\mathcal{F}(k)$ ou de variantes, remonte aux années 1950. Dans leur travail sur l'homologie singulière des espaces topologiques qui portent désormais leur nom (cf. [13], chap. II), S. Eilenberg et S. Mac Lane ont introduit la notion fondamentale de *foncteur polynomial*, dont l'utilité ne s'est pas démentie depuis (cf. infra). Ainsi, au début des années 1980, l'ouvrage de J. Green [23] sur les représentations polynomiales des groupes linéaires travaille avec des objets analogues [(2)], d'un point de vue tout à fait différent. Toutefois, les problèmes de finitude s'avèrent beaucoup plus faciles d'accès dans les catégories de foncteurs polynomiaux ([8] en aborde un certain nombre dans un cadre assez général) que dans des catégories du type $\mathcal{F}(k)$, ce qui explique sans doute pourquoi la propriété noethérienne n'y a pas été étudiée plus tôt.

2. Les foncteurs sous-jacents dans le travail de Green sont des foncteurs *strictement* polynomiaux, dont il est brièvement question à la fin du paragraphe 1.2.

1.1. Motivations topologiques originelles

Depuis les années 1980, l'étude algébrique approfondie de la catégorie $\mathcal{U}_p$ des modules instables sur l'algèbre de Steenrod $\mathcal{A}_p$ (p désignant un nombre premier) a connu un essor considérable débouchant sur des applications importantes en topologie algébrique. Précisons un peu : la cohomologie singulière modulo p d'un espace topologique est naturellement un module [(3)] gradué sur $\mathcal{A}_p$. Ce module gradué vérifie une condition supplémentaire (annulation de l'action de certaines opérations sous condition de degré), dite d'*instabilité* car elle n'est plus vérifiée par la cohomologie modulo p des spectres (voir [49] pour une approche systématique de la catégorie $\mathcal{U}_p$). La démonstration par H. Miller [34, 35] de la conjecture de Sullivan sur la contractilité de l'espace des fonctions pointées du classifiant d'un groupe fini vers un CW-complexe fini, initialement exprimée en termes de type d'homotopie d'espaces de points fixes sous l'action d'un groupe, constitue sans doute l'une des premières interventions profondes en théorie de l'homotopie de la catégorie $\mathcal{U}_p$. En effet, le travail de Miller repose largement sur l'examen d'une suite spectrale dont la deuxième page est un groupe d'extensions dans la catégorie $\mathcal{U}_p$; on renvoie à [48] pour plus de détails. L'un des aboutissements de la théorie réside dans la description fonctorielle par Lannes [31] de la cohomologie modulo p de l'espace des fonctions du classifiant d'un groupe abélien p-élémentaire vers un espace topologique raisonnable à partir de sa cohomologie, vue comme objet de $\mathcal{U}_p$. Ce travail utilise les propriétés merveilleuses, telle l'exactitude ou la commutation au produit tensoriel de l'endofoncteur T de la catégorie $\mathcal{U}_p$ introduit par son auteur. Peu après, à l'aide de ce foncteur T, H.-W. Henn, Lannes et Schwartz [24] ont établi une équivalence de catégories entre $\mathcal{U}_p/\mathcal{N}il$ et $\mathcal{F}_\omega(\mathbb{F}_p)$. Ici, $\mathcal{N}il$ désigne la sous-catégorie localisante de $\mathcal{U}_p$ engendrée par les suspensions de modules instables ; on note $\mathcal{F}_\omega(\mathbb{F}_p)$ la sous-catégorie pleine des foncteurs *analytiques* de $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$, c'est-à-dire la sous-catégorie localisante engendrée par les puissances tensorielles. Ce résultat a motivé l'étude systématique par des topologues de la catégorie abélienne $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$. C'est dans ce contexte que Lannes et Schwartz ont conjecturé que $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$ est une catégorie localement noethérienne. Cette conjecture est souvent appelée *conjecture artinienne* car la formulation initiale, duale, traitait de foncteurs artiniens plutôt que noethériens, en raison des liens avec la catégorie $\mathcal{U}_p$. En effet, la conjecture équivaut à l'énoncé suivant : pour tout p-groupe abélien élémentaire V, le foncteur de $\mathcal{F}_\omega(\mathbb{F}_p)$ associé à la cohomologie du classifiant de V, qui à un espace vectoriel E associe l'espace des fonctions ensemblistes de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}(E, V)$ dans $\mathbb{F}_p$, est artinien. On trouvera dans [29] (voir notamment la proposition 3.13) d'autres reformulations simples mais utiles de cette conjecture.

Celle-ci advint comme prolongement de questions de finitude sur les *algèbres* instables sur l'algèbre de Steenrod, dont le lien étroit avec les catégories de foncteurs, comme pour les modules instables, fut mis en évidence dans [24]. Un premier élément en faveur de la conjecture fut le résultat de Schwartz sur l'existence de résolutions projectives de

3. La structure multiplicative est également importante, mais elle peut être oubliée, au moins dans un premier temps, pour de nombreux problèmes.

type fini (ou de résolutions injectives possédant la propriété duale) pour les foncteurs *polynomiaux* de $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$ à valeurs de dimension finie (voir [49], *theorem 5.3.8* ou [19], proposition 10.1).

L'étude algébrique de la catégorie $\mathcal{U}_p$ (notamment pour $p = 2$, cas techniquement un peu plus simple) et son utilisation dans des énoncés topologiques se poursuivent régulièrement. Sans donner de références exhaustives, mentionnons l'important travail [43] de G. Powell sur la structure dans cette catégorie de la cohomologie des espaces d'Eilenberg-Mac Lane, qui repose sur des considérations fines dans la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$, et l'article [16] de G. Gaudens et Schwartz sur le problème de la réalisation d'un module instable comme cohomologie d'un espace topologique. Les propriétés de finitude des résolutions injectives dans $\mathcal{U}_p$ ont suscité des travaux tout récents, avec un résultat de Cuong et Schwartz [6] qu'on peut voir comme un analogue (plus difficile) du résultat susmentionné de Schwartz pour les foncteurs polynomiaux de $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$, et la conjecture 4.1 de l'article [7] de Delamotte, Hai et Schwartz.

Signalons une autre catégorie de foncteurs bien connue des topologues algébristes depuis longtemps : celle des Γ-modules (à gauche), c'est-à-dire des foncteurs depuis la catégorie Γ des ensembles finis pointés vers la catégorie **Ab** des groupes abéliens. La catégorie Γ et différentes catégories de foncteurs de source Γ (les Γ-modules, mais aussi les foncteurs de Γ vers les ensembles, les ensembles simpliciaux ou les espaces topologiques) possèdent des liens étroits avec la théorie de l'homotopie stable, remontant à l'article [52] de G. Segal. On pourra consulter le travail [37] de T. Pirashvili pour différentes utilisations topologiques des Γ-modules. Il est élémentaire (cf. paragraphe 2.2 ci-après) et classique que le théorème 0.2 est impliqué par le résultat suivant, que montrent également Sam et Snowden dans [47] (*remark 8.1.6*) :

Théorème 1.1 (Sam-Snowden). — *La catégorie des Γ-modules à droite, c'est-à-dire des foncteurs contravariants de Γ vers* **Ab***, est localement noethérienne. Il en est de même si l'on remplace au but les groupes abéliens par n'importe quelle catégorie de Grothendieck localement noethérienne.*

Récemment, une autre catégorie ensembliste a fait l'objet de travaux systématiques en topologie et en théorie des représentations : la catégorie Θ des ensembles finis avec injections — voir par exemple [50] (où cette catégorie est notée I) ou [4] (où elle est notée FI). Dans l'article [5], T. Church, J. Ellenberg, B. Farb et R. Nagpal montrent que la catégorie des foncteurs depuis Θ vers la catégorie des modules sur un anneau noethérien est localement noethérienne (généralisant un résultat de [4]). Ce résultat est beaucoup plus facile que le théorème 1.1. W.L. Gan et L. Li [22] ont tout récemment obtenu des généralisations de [5] dans un contexte combinatoire, qui rappelle les travaux de Putman, Sam et Snowden, dont il permet d'ailleurs de retrouver certains cas particuliers (tout en en étant indépendant).

Ce sont les résultats de finitude de [5] qui ont conduit Putman et Sam à étudier la propriété noethérienne dans $\mathbf{Fct}(\mathbf{S}(A), \mathbf{Ab})$, à partir de motivations (co)homologiques dont nous allons maintenant discuter certains aspects. En effet, la catégorie $\mathbf{S}(A)$ joue le même rôle pour les représentations des groupes linéaires sur un anneau A que la catégorie Θ pour l'étude des représentations des groupes symétriques.

1.2. Liens avec l'homologie des groupes et la K-théorie algébrique

Une importante source d'intérêt pour les catégories de foncteurs vers une catégorie de modules, où la théorie des représentations et la topologie algébrique (ou l'algèbre homologique) se rejoignent, réside dans ce qu'elles fournissent naturellement des systèmes de coefficients intéressants pour l'homologie (ou la cohomologie) de familles de groupes remarquables, comme les groupes symétriques, linéaires ou orthogonaux. N. Kuhn a d'ailleurs appelé catégorie des *représentations génériques* des groupes linéaires sur un corps fini k la catégorie de foncteurs $\mathcal{F}(k)$ (voir sa série d'articles [28, 29, 30]).

Penchons-nous sur le cas des groupes linéaires sur un anneau A. Le cadre le plus général pour traiter génériquement, ou stablement, d'homologie des groupes linéaires sur A (comme groupes discrets), est celui de foncteurs depuis la catégorie $\mathbf{S}(A)$ (la pertinence de considérer des injections linéaires munies d'un scindement pour traiter de stabilité homologique remonte sans doute au travail [3] de R. Charney ; des catégories analogues ont été explicitement utilisées encore plus tôt en K-théorie algébrique). En effet, on constate déjà qu'on dispose d'un foncteur *groupe linéaire* $\mathbf{S}(A) \to \mathbf{Grp}$ (catégorie des groupes) associant à un module libre M son groupe d'automorphismes et à un morphisme $(u, v) : M \to N$ de $\mathbf{S}(A)$ ($u : M \to N$ et $v : N \to M$ sont donc des applications A-linéaires telles que $vu = \mathrm{Id}_M$) le morphisme de groupes

$$GL(M) \to GL(N) \qquad f \mapsto ufv + 1 - uv.$$

Ainsi, le morphisme $(i_n, p_n) : A^n \to A^{n+1}$, où i_n est l'inclusion des n premières composantes et p_n la projection sur les n premiers facteurs, induit l'inclusion usuelle donnée matriciellement par

$$X \mapsto \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout foncteur $F : \mathbf{S}(A) \to \mathbf{Ab}$, on dispose d'applications linéaires $GL_n(A)$-équivariantes $F(A^n) \to F(A^{n+1})$ induites par $(i_n, p_n) : A^n \to A^{n+1}$; l'équivariance est relative aux actions tautologiques des groupes linéaires et à l'inclusion $GL_n(A) \to GL_{n+1}(A)$ précédente.

Cela permet de former la suite de groupes abéliens gradués d'homologie

$$\cdots \to H_*(GL_n(A); F(A^n)) \to H_*(GL_{n+1}(A); F(A^{n+1})) \to \dots$$

La colimite de cette suite est appelée *homologie stable des groupes linéaires sur A à coefficients dans F.*

Le théorème 0.3 entraîne facilement (mais ce n'est pas le cas du théorème 0.2) :

Corollaire 1.2 ([44], *Theorem K*). — *Si A est un anneau commutatif fini et F : $\mathbf{S}(A) \to \mathbf{Ab}$ un foncteur de type fini, alors l'homologie $H_*(GL_n(A); F(A^n))$ se stabilise au sens où, pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'application naturelle*

$H_i(GL_n(A); F(A^n)) \to H_i(GL_{n+1}(A); F(A^{n+1}))$ soit un isomorphisme pour $n \geq N$. En conséquence, l'homologie stable des groupes linéaires sur A à coefficients dans F est un groupe abélien de type fini en chaque degré homologique.

L'hypothèse classique pour la stabilité homologique pour les groupes linéaires sur un anneau raisonnable (avec un rang stable de Bass fini) est une condition *polynomiale* sur les coefficients (on renvoie au travail fondamental de W. van der Kallen [54] à ce sujet, qui étend l'article [12] de W. Dwyer, lequel fournit le premier résultat général de stabilité homologique à coefficients tordus). Cette hypothèse est beaucoup plus forte que l'hypothèse de finitude du corollaire 1.2 (contrairement à ce qui advient pour les foncteurs de type fini de Θ vers une catégorie abélienne, qui sont automatiquement polynomiaux), qui constitue l'hypothèse simple la plus faible sous laquelle on peut s'attendre à un tel résultat.

Parallèlement aux problèmes de finitude ou de stabilité, les catégories de foncteurs depuis différentes catégories de modules jouent un rôle important dans l'étude de l'homologie stable des groupes linéaires à coefficients tordus. Le résultat principal en la matière s'énonce en termes d'homologie des foncteurs. L'homologie $H_*(\mathcal{C}; F)$ d'un foncteur F depuis une petite catégorie $\mathcal{C}$ vers les groupes abéliens (ou plus généralement une catégorie abélienne avec colimites et assez d'objets projectifs) peut se définir comme l'évaluation en F des foncteurs dérivés à gauche du foncteur *colimite sur* $\mathcal{C}$. Tout foncteur $u : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ entre petites catégories induit un morphisme naturel

$$H_*(\mathcal{D}; u^*F) \to H_*(\mathcal{C}; F)$$

de groupes abéliens gradués, où F est un foncteur de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathbf{Ab})$ et u^* désigne la précomposition par u. Si B est un bifoncteur sur $\mathcal{C}$, c'est-à-dire un foncteur $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$, on peut définir l'*homologie de Hochschild* $HH_*(\mathcal{C}; F)$ de $\mathcal{C}$ à coefficients dans F comme $H_*(\mathbf{F}(\mathcal{C}); \varphi^*B)$, où $\mathbf{F}(\mathcal{C})$ est la catégorie des factorisations de $\mathcal{C}$ introduite par Quillen dans [46] (ses objets sont les flèches de $\mathcal{C}$) et $\varphi : \mathbf{F}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$ le foncteur canonique (sur les objets, il associe à une flèche sa source et son but) — cette homologie peut se calculer, comme l'homologie de Hochschild usuelle d'un anneau, par un complexe simplicial explicite de type *bar*. (Pour plus de précisions sur l'homologie et l'homologie de Hochschild d'une petite catégorie, on pourra se reporter à l'appendice C de l'ouvrage [32].)

Le théorème suivant apparaît dans la thèse de S. Scorichenko [51] ; on peut en trouver une présentation partielle dans l'article de V. Franjou et Pirashvili dans l'ouvrage de synthèse [17] et une démonstration complète dans [11], 5.2 (où se trouve explicitement l'énoncé en termes de la catégorie $\mathbf{S}(A)$; l'équivalence entre les énoncés de K-théorie stable et d'homologie des groupes linéaires est discutée dans [15], 2.3)

Théorème 1.3 (Scorichenko). — *Soit A un anneau.*

1. *Pour tout foncteur $F : \mathbf{S}(A) \to \mathbf{Ab}$, l'homologie stable des groupes linéaires sur A à coefficients dans F est naturellement isomorphe, comme groupe abélien gradué,*

à $H_*(\underline{GL_\infty(A)} \times \mathbf{S}(A); p^*F)$*, où* $p : \underline{GL_\infty(A)} \times \mathbf{S}(A) \to \mathbf{S}(A)$ *désigne le foncteur de projection (on rappelle que* $\underline{GL_\infty(A)}$ *désigne la catégorie à un objet associée au groupe* $GL_\infty(A)$*).*

De façon équivalente, la K*-théorie algébrique stable* $K_*^s(A; F)$ *de l'anneau* A *à coefficients dans* F *est naturellement isomorphe au groupe abélien gradué* $H_*(\mathbf{S}(A); F)$*.*

2. *Si* $B : \mathbf{P}(A)^{op} \times \mathbf{P}(A) \to \mathbf{Ab}$ *est un foncteur* polynomial*, on dispose d'un isomorphisme naturel*
$$H_*(\mathbf{S}(A); i^*B) \xrightarrow{\simeq} HH_*(\mathbf{P}(A); B)$$
de groupes abéliens gradués.

Ce résultat profond avait été conjecturé (notamment sous la forme « $THH = K^s$ ») au moins une dizaine d'années avant sa démonstration en 2000 ; S. Betley (dans [2]) et A. Suslin (dans l'appendice de [18]) l'avaient établi indépendamment, très peu de temps auparavant, dans le cas particulier où A est un corps fini (où l'on peut simplifier le résultat final grâce au calcul par Quillen [45] de l'homologie stable à coefficients constants des groupes linéaires sur un corps fini). Le théorème 1.3 permet de calculer, au moins lorsque A est un corps (voir notamment [18]) ou l'anneau des entiers, des groupes d'homologie stable qui semblaient hors d'atteinte.

Signalons également que le théorème 1.3 possède des généralisations et analogues pour l'homologie stable d'autres familles de groupes. Il a été étendu par l'auteur de cet exposé et C. Vespa aux groupes orthogonaux et symplectiques sur un corps fini [15], puis par celui-là aux groupes unitaires et symplectiques sur un anneau quelconque [11]. Le corollaire 1.2 s'étend aussi aux groupes symplectiques sur un anneau commutatif fini, puisque Putman et Sam ont montré, dans [44] (*Theorem D*), un analogue du théorème 0.3 dans ce cadre. Dans [15], les auteurs discutent un cadre formel (légèrement revisité au début de [11]) pour relier homologie stable de groupes à coefficients tordus et homologie des foncteurs ; ils l'appliquent dans [14] aux groupes d'automorphismes des groupes libres.

Dans tout ce qui précède, les groupes linéaires sur A sont vus comme groupes discrets. On peut bien sûr, au moins lorsque A est commutatif, se poser des questions analogues pour les *groupes algébriques* linéaires sur A. Dans ce cas, les foncteurs qui procurent des coefficients « naturels » (c'est-à-dire des familles cohérentes de représentations rationnelles de ces groupes algébriques) sont les *foncteurs polynomiaux stricts*(4) introduits par E. Friedlander et Suslin dans [20]. Sans entrer dans les détails, mentionnons que, au moins sur un corps fini, les calculs cohomologiques entre foncteurs polynomiaux stricts et foncteurs usuels possèdent des liens étroits (voir par exemple [18]). Les foncteurs polynomiaux stricts, outil de calcul très puissant de cohomologie de représentations

4. Les catégories de foncteurs polynomiaux stricts (de degré donné) sont équivalentes à des catégories de modules sur des algèbres de Schur, mais le point de vue fonctoriel présente un certain nombre d'avantages, comme l'a montré le travail fondateur [20] ou [53].

polynomiales des groupes linéaires, ont joué un rôle crucial dans la démonstration d'un résultat de finitude difficile, à savoir que la cohomologie rationnelle d'un groupe algébrique linéaire réductif à coefficients dans une algèbre commutative de type fini est une algèbre de type fini. Ce théorème a été démontré par A. Touzé et van der Kallen [53], confirmant une conjecture de ce dernier. En revanche, la structure globale des foncteurs polynomiaux stricts sur un corps fini k diffère beaucoup de celle de la catégorie $\mathcal{F}(k)$: c'est une catégorie *localement finie* (elle possède également la propriété de finitude duale).

1.3. Les premières avancées sur la conjecture de Lannes et Schwartz et le problème de la filtration de Krull des catégories de foncteurs

(On pourra se reporter à [42] et [9] pour davantage de détails sur cette question.)

Soit k un corps fini. Si E est un ensemble, on désigne par $k[E]$ la somme de copies de k indexées par E. La catégorie $\mathcal{F}(k)$ est localement noethérienne si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur $P_n : V \mapsto k[V^n]$ est noethérien (voir le début de la section 2 ci-après). L'assertion est triviale pour $n = 0$, le foncteur constant en k étant simple. On peut encore démontrer le caractère noethérien de P_1 de manière aisée et directe. De fait, ce foncteur est la somme directe d'un nombre fini de foncteurs *unisériels* (cf. par exemple [29], *Theorem 7.8*), dont le treillis des sous-foncteurs est isomorphe à $\mathbb{N}^{op}$ (sauf pour le terme constant). Le cas où le corps k n'a que deux éléments est particulièrement simple : dans ce cas, P_1 est la somme directe de son terme constant et du foncteur d'idéal d'augmentation (sur $\mathbb{F}_2$) sur les $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels de dimension finie, dont les seuls sous-foncteurs sont donnés par les puissances successives de l'idéal d'augmentation, les sous-quotients de cette filtration étant isomorphes aux puissances extérieures.

En revanche, pour $n \geq 2$, la structure de P_n s'avère très complexe : il n'est plus question de comprendre entièrement le treillis des sous-foncteurs. (Toutefois, dans [38], L. Piriou a démontré des résultats de finitude constituant une étape vers la preuve du caractère noethérien de P_2, pour $k = \mathbb{F}_2$, avec des renseignements explicites sur les treillis de sous-foncteurs). L'approche développée, avant les travaux de Putman, Sam et Snowden, pour aborder les propriétés de finitude des foncteurs P_n a consisté à démontrer des propriétés qualitatives de ce treillis qui s'expriment commodément à l'aide des catégories abéliennes quotients. Rappelons à ce propos la définition suivante (on prendra garde que la filtration introduite *n'*est *pas* la filtration de Krull, même si elle lui est étroitement reliée).

Définition 1.4. — *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On définit par récurrence une suite croissante $(\mathcal{A}_n)$ de sous-catégories épaisses comme suit :*

1. $\mathcal{A}_n = \{0\}$ *pour* $n < 0$ *;*
2. $\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_{n-1}$ *est constituée des objets de longueur finie de* $\mathcal{A}/\mathcal{A}_{n-1}$*, pour* $n \in \mathbb{N}$*.*

Les objets de $\mathcal{A}_n$ sont appelés objets noethériens de type au plus n *de* $\mathcal{A}$.

La terminologie provient de ce qu'un objet est noethérien de type n si et seulement s'il est noethérien et de dimension de Krull n (on renvoie à [21] pour des généralités sur la filtration de Krull).

Powell a émis la forme renforcée suivante de la conjecture de finitude dans $\mathcal{F}(k)$:
Conjecture — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur P_n est noethérien de type n.*

Les travaux de Putman, Sam et Snowden ne semblent pas permettre de progrès immédiats sur cette conjecture. En effet, pour démontrer le caractère localement noethérien de $\mathcal{F}(k)$, ils transitent par des catégories combinatoires sur lesquelles les foncteurs projectifs de type fini ont presque tous une dimension de Krull infinie.

La conjecture précédente est facile pour $n \leq 1$; Powell [39] l'a démontrée pour $n = 2$ et $k = \mathbb{F}_2$ d'une manière indirecte qui utilise plusieurs outils originaux : l'introduction (dans [40]) d'endofoncteurs de $\mathcal{F}(k)$ dont l'effet sur les foncteurs projectifs dépend beaucoup de leur dimension de Krull conjecturale, l'étude de foncteurs remarquables (nommés foncteurs co-Weyl) par lesquels on peut filtrer les foncteurs projectifs de $\mathcal{F}(k)$ (voir le travail [41]), et l'examen minutieux de propriétés des facteurs de composition de P_2.

Le caractère noethérien de type 3 de P_3, pour $k = \mathbb{F}_2$, a été démontré dans [10], en approfondissant les techniques développées par Powell. Dans [9], l'auteur introduit des catégories de foncteurs auxiliaires qui permettent de préciser la conjecture précédente par une description explicite des sous-quotients de la filtration de Krull de la catégorie $\mathcal{F}(k)$. C'est l'usage de ces catégories, ainsi que de multiples endofoncteurs de la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)$ (et l'étude de leurs propriétés, notamment en termes de facteurs de composition), qui, combiné aux méthodes de Powell, a permis d'établir le résultat souhaité pour P_3 (ainsi que pour son produit tensoriel par un foncteur de longueur finie).

Pour $n \geq 4$, la forme forte de la conjecture de finitude dans $\mathcal{F}(k)$ reste totalement ouverte. Le problème de la filtration de Krull pour les Γ-modules à droite est également très naturel, il ne semble toutefois guère avoir été étudié.

2. LA PROPRIÉTÉ NOETHÉRIENNE DANS DIFFÉRENTES CATÉGORIES DE FONCTEURS

2.1. Rappels sur la propriété noethérienne

(Pour plus de détails sur les généralités catégoriques ici abordées, on pourra se référer à [33] et, pour les catégories abéliennes, à [21].)

Un objet d'une catégorie (pas nécessairement abélienne) est dit *noethérien* si toute suite croissante de sous-objets de celui-ci stationne. Une famille $(x_i)_i$ d'objets d'une catégorie $\mathcal{C}$ est dite *génératrice* si le foncteur $\prod_i \mathcal{C}(x_i, -) : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ (catégorie des ensembles) est fidèle. Dans une catégorie abélienne avec colimites, une famille d'objets projectifs est génératrice si et seulement si tout objet est le but d'un épimorphisme dont la source est une somme de copies d'objets de la famille, l'exemple typique étant un anneau A qui, vu comme module sur lui-même, constitue un générateur projectif de la catégorie des A-modules à gauche. Une catégorie abélienne est dite *localement noethérienne* si elle possède un ensemble de générateurs noethériens.

Un objet M d'une catégorie $\mathcal{C}$ est dit *de type fini* si le foncteur $\mathcal{C}(M,-) : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ commute aux colimites filtrantes de monomorphismes. Lorsque $\mathcal{C}$ possède des limites finies et des colimites et que les colimites filtrantes y commutent aux limites finies, un objet de $\mathcal{C}$ est noethérien si et seulement si tous ses sous-objets sont de type fini. Par exemple, si A est un anneau, le A-module à gauche A est toujours de type fini ; il est noethérien si et seulement si A est un anneau noethérien à gauche (au sens ordinaire). Cette condition équivaut encore à dire que la catégorie des A-modules à gauche est localement noethérienne.

Par commodité, nous supposerons presque toujours que les catégories abéliennes considérées sont *de Grothendieck*, c'est-à-dire qu'elles possèdent des colimites, un générateur, et que les colimites filtrantes y sont exactes. Les catégories de modules sont des catégories de Grothendieck ; la restriction à ce type de catégorie suffit largement pour les applications. Dans une catégorie de Grothendieck localement noethérienne, tout objet de type fini est noethérien.

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ sont des catégories, avec $\mathcal{C}$ petite, la catégorie de foncteurs $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ possède des limites ou des colimites s'il en est de même pour $\mathcal{A}$, et celles-ci se calculent au but. En particulier, si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, il en est de même pour $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$.

Soient $\mathcal{C}$ une petite catégorie et $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Dans la suite, on supposera soit que les ensembles de morphismes entre deux objets de $\mathcal{C}$ sont finis, soit que $\mathcal{A}$ possède des sommes directes arbitraires. Une conséquence classique du lemme de Yoneda est l'isomorphisme d'adjonction

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})(M[\mathcal{C}(t,-)],F) \simeq \mathcal{C}(M,F(t))$$

(on rappelle que, étant donné un ensemble E, on note $M[E]$ la somme de copies de M indexées par E) naturel en les objets t de $\mathcal{C}$, M de $\mathcal{A}$ et F de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$. On en déduit en particulier que :

1. $M[\mathcal{C}(t,-)]$ est un objet projectif de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ si M est un objet projectif de $\mathcal{C}$;
2. $M[\mathcal{C}(t,-)]$ est un objet de type fini de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ si M est un objet de type fini de $\mathcal{C}$;
3. si M parcourt un ensemble de générateurs de la catégorie $\mathcal{A}$ et t un squelette des objets de $\mathcal{C}$, alors $M[\mathcal{C}(t,-)]$ décrit un ensemble de générateurs de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$.

En conséquence, on observe que $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ est une catégorie de Grothendieck si c'est le cas de $\mathcal{A}$; si $\mathcal{A}$ est localement noethérienne, alors $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ est localement noethérienne si et seulement si $M[\mathcal{C}(t,-)]$ est un foncteur noethérien pour tout objet noethérien M de $\mathcal{A}$ et tout objet t de $\mathcal{C}$. (Hors du cas trivial où la catégorie $\mathcal{C}$ est vide, la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ ne peut être localement noethérienne que si $\mathcal{A}$ l'est, comme on le voit à l'aide des foncteurs constants.)

Définition 2.1. — *Nous dirons qu'une petite catégorie $\mathcal{C}$ possède la propriété de finitude pour les foncteurs (FF en abrégé) si, pour toute catégorie de Grothendieck localement noethérienne $\mathcal{A}$, la catégorie de foncteurs $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ est localement noethérienne.*

2.2. Changement de catégorie source

On rappelle que, étant donné un foncteur ι, on note ι^* la précomposition par ι. Le maniement systématique de ce type de foncteur constitue l'une des facilités qu'offre le point de vue des catégories de foncteurs.

Définition 2.2. — *Nous dirons qu'un foncteur $\iota : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ vérifie la propriété de finitude pour les sources (FS en abrégé) si, pour tout objet x de $\mathcal{D}$, le foncteur $\iota^*\mathcal{D}(x,-) : \mathcal{C} \to$ **Ens** est isomorphe à un sous-quotient d'une somme **finie** de foncteurs du type $\mathcal{C}(t,-)$, où t est un objet de $\mathcal{C}$.*

Remarque 2.3. — Une composée de foncteurs vérifiant la propriété (FS) vérifie encore cette propriété.

Proposition 2.4. — *Soit $\iota : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur entre petites catégories. On suppose que ι est essentiellement surjectif et vérifie la propriété (FS). Pour toute catégorie abélienne $\mathcal{A}$, si la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ est localement noethérienne, alors il en est de même pour $\mathbf{Fct}(\mathcal{D},\mathcal{A})$. En particulier, si $\mathcal{C}$ possède la propriété (FF), alors il en est de même pour $\mathcal{D}$.*

Démonstration — On peut supposer $\mathcal{A}$ localement noethérienne (sinon, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont vides !). Soient M et x des objets de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$ respectivement, avec M noethérien. La propriété (FS) et l'hypothèse sur $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ impliquent que $\iota^*M[\mathcal{D}(x,-)]$ est un foncteur noethérien de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$. Comme le foncteur ι^* est fidèle (parce que ι est essentiellement surjectif) et exact, cela entraîne que $M[\mathcal{D}(x,-)]$ est lui-même noethérien, d'où la proposition.

Donnons quelques exemples simples mais utiles d'applications de cette proposition. Commençons par quelques rappels de notations : Γ désigne la catégorie des ensembles finis pointés — ou, plus exactement, son squelette constitué des ensembles $[n] := \{0,\dots,n\}$, pour $n \in \mathbb{N}$, pointés par 0. On note également Ω la catégorie des ensembles finis, les morphismes étant les fonctions surjectives, ou plutôt son squelette constitué des ensembles $\mathbf{n} := \{1,\dots,n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Étant donné un anneau A, on note $\mathbf{P}(A)$ le squelette de la catégorie des A-modules à gauche libres de rang fini constitué des modules A^n pour $n \in \mathbb{N}$; $\mathbf{M}(A)$ désigne la sous-catégorie ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont les applications linéaires injectives possédant un scindement. La catégorie $\mathbf{S}(A)$ a les mêmes objets ; ses morphismes sont les monomorphismes A-linéaires scindés, mais cette fois-ci le scindement est donné dans la structure. On note également

$\mathbf{P}'(A)$ la sous-catégorie de $\mathbf{P}(A)$ ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont les applications linéaires dont l'image est facteur direct du but [(5)].

Proposition 2.5. — *Il existe des foncteurs*

$$\alpha : \Omega^{op} \to \Gamma^{op}, \qquad \beta : \Gamma^{op} \to \mathbf{P}(A), \qquad \gamma : \Gamma^{op} \to \mathbf{P}'(A), \qquad \delta : \Omega^{op} \to \mathbf{M}(A)$$

essentiellement surjectifs et possédant la propriété (FS)*, lorsque* A *est un anneau fini.*

Démonstration — Le foncteur α est l'adjonction d'un point de base externe. On a

$$\alpha^*\Gamma(-,T) \simeq \bigsqcup_U \Omega(-,U),$$

où la somme est prise sur l'ensemble des parties U de T, d'où la propriété (FS) pour α.

Le foncteur β associe à un ensemble pointé E le A-module des fonctions (ensemblistes) $E \to A$ nulles sur le point de base. La propriété (FS) pour ce foncteur vient de ce qu'il est adjoint à droite au foncteur composé de la dualité $(-)^\vee : \mathbf{P}(A) \to \mathbf{P}(A^{op})^{op}$ et du foncteur d'oubli $\mathbf{P}(A^{op})^{op} \to \Gamma^{op}$. On note que β prend ses valeurs dans $\mathbf{P}'(A)$; γ est le foncteur induit, il vérifie donc aussi (FS).

Le foncteur δ est donné par $E \mapsto A^E$; la propriété (FS) s'obtient par le monomorphisme naturel

$$\delta^*\mathbf{M}(A)(M,-) \hookrightarrow \delta^*\mathbf{P}(A)(M,-) \simeq \mathbf{Ens}(-,M^\vee) \simeq \bigsqcup_P \Omega(-,P)$$

où la somme est prise sur l'ensemble des parties P de l'*ensemble* sous-jacent à $M^\vee$.

Enfin, tous ces foncteurs sont essentiellement surjectifs.

Remarque 2.6. — On peut remplacer l'utilisation de la première assertion de la proposition précédente, pour la démonstration de propriétés de finitude de $\mathbf{Fct}(\Gamma^{op},\mathcal{A})$ à partir de propriétés analogues pour $\mathbf{Fct}(\Omega^{op},\mathcal{A})$, par le théorème de Pirashvili à la Dold-Kan [36] donnant une équivalence explicite entre ces deux catégories, pour toute catégorie abélienne $\mathcal{A}$.

Remarque 2.7. — Il ne semble en revanche pas possible d'exhiber un foncteur essentiellement surjectif vérifiant (FS) depuis une catégorie entrant dans le cadre développé par Sam et Snowden dans [47] vers la catégorie $\mathbf{S}(A)$, où A est un anneau fini. Cela explique que Putman et Sam aient besoin, pour établir le théorème 0.3, dans [44], de raffiner la méthode de [47].

5. Dans les articles [44] et [47], les auteurs ne considèrent en fait pas $\mathbf{P}(A)$, mais seulement $\mathbf{P}'(A)$ (qu'ils notent $\mathbf{VI}(A)$). Nous avons préféré faire figurer en bonne place la première catégorie, plus usuelle, puisque ses propriétés de finitude s'obtiennent exactement de la même façon.

3. FONCTEURS DEPUIS UN ENSEMBLE ORDONNÉ

Un cas particulièrement favorable à l'étude de la propriété de finitude (FF) est celui d'un ensemble ordonné. On rappelle qu'un tel ensemble $(E, \leq)$ peut être vu comme une petite catégorie, notée $\tilde{E}$, dont les objets sont les éléments de E, et dont l'ensemble des morphismes de source x et de but y est réduit à un élément si $x \leq y$ et vide sinon.

Cette section sert d'échauffement pour la suivante ; elle devrait rendre naturelle la considération des conditions de finitude sur les ensembles ordonnés qui y apparaîtront.

Définition 3.1. — *On dit qu'une relation d'ordre $\leq$ sur un ensemble E est un* quasi-bon ordre *si, pour toute suite infinie $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ d'éléments de E, il existe des entiers $i < j$ tels que $x_i \leq x_j$.*

La terminologie provient de ce qu'une relation d'ordre est un bon ordre si et seulement si c'est un ordre total et un quasi-bon ordre. Tout sous-ensemble d'un ensemble quasi-bien ordonné est quasi-bien ordonné pour l'ordre induit.

Proposition 3.2. — *Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, t un élément de E et k un corps. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *la restriction de $\leq$ au sous-ensemble $[t, \to [\ := \{x \in E \mid t \leq x\}$ de E est un quasi-bon ordre ;*
2. *le foncteur $\tilde{E}(t, -) : \tilde{E} \to \mathbf{Ens}$ est noethérien ;*
3. *le foncteur $k[\tilde{E}(t, -)] : \tilde{E} \to k - \mathbf{Mod}$ est noethérien.*

Démonstration — Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble, ordonné par inclusion, des parties P de $[t, \to [$ telles que $v \in P$ s'il existe $u \in P$ tel que $u \leq v$. Cet ensemble ordonné est isomorphe à l'ensemble ordonné des sous-foncteurs de $\tilde{E}(t, -)$ (resp. $k[\tilde{E}(t, -)]$) : un isomorphisme s'obtient en associant à un tel sous-foncteur F l'ensemble des éléments u de E tels que $F(u)$ soit non vide (resp. non nul). La conclusion s'obtient en observant que $\mathcal{P}$ n'a pas de suite infinie strictement croissante si et seulement si la première assertion est vérifiée (si (P_i) est une suite strictement croissante dans $\mathcal{P}$, considérer des éléments $x_i \in P_{i+1} \setminus P_i$ pour obtenir que $[t, \to [$ n'est pas quasi-bien ordonné ; réciproquement, si (x_i) est une suite infinie de $[t, \to [$, considérer la suite croissante $\Big(\bigcup_{j \leq i} [x_j, \to [\Big)$ d'éléments de $\mathcal{P}$).

Exemple 3.3. — Munissons l'ensemble $\mathbb{N}$ de la relation d'ordre pour laquelle 0 est le plus petit élément et deux éléments distincts non nuls ne sont jamais comparables. Alors le foncteur constant en un corps (ou anneau non nul) fixé k, qui s'identifie à $k[\tilde{\mathbb{N}}(0, -)]$, n'est pas un objet noethérien de $\mathbf{Fct}(\tilde{\mathbb{N}}, k - \mathbf{Mod})$. En particulier, $\tilde{\mathbb{N}}$ ne vérifie pas la propriété (FF).

Le lemme classique suivant permettra de généraliser un peu la proposition 3.2.

Lemme 3.4. — *Soit* $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ *une suite infinie d'éléments d'un ensemble quasi-bien ordonné* $(E, \leq)$. *Il existe une fonction strictement croissante* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *telle que la suite* $x_{\phi(1)}, x_{\phi(2)}, \ldots, x_{\phi(n)}, \ldots$ *soit croissante.*

Démonstration — Soit I l'ensemble des entiers i tels qu'on n'ait jamais $x_i \leq x_j$ pour $j > i$. Comme E est quasi-bien ordonné, I est fini. On prend pour $\phi(0)$ un entier arbitraire strictement supérieur à tous les éléments de I. On définit ensuite par récurrence $\phi(i)$, pour $i > 0$, on observant que $\phi(i-1) \notin I$, de sorte qu'on peut trouver un entier $\phi(i) > \phi(i-1)$ tel que $x_{\phi(i-1)} \leq x_{\phi(i)}$.

Proposition 3.5. — *Soient* E *un ensemble ordonné,* t *un élément de* E *tel que* $[t, \to [$ *soit quasi-bien ordonné et* M *un objet noethérien d'une catégorie abélienne* $\mathcal{A}$. *Alors le foncteur* $M[\tilde{E}(t, -)] : \tilde{E} \to \mathcal{A}$ *est noethérien.*

Démonstration — Supposons qu'il existe une suite strictement croissante (F_n) de sous-foncteurs de $M[\tilde{E}(t, -)]$: pour tout $n > 0$, il existe $x_n \in [t, \to [$ tel que le sous-objet $M_n := F_n(x_n)$ de M contienne strictement $F_{n-1}(x_n)$. Choisissons une fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ comme dans le lemme 3.4. On a alors des inclusions

$$M_{\phi(n-1)} = F_{\phi(n-1)}(x_{\phi(n-1)}) \subset F_{\phi(n)-1}(x_{\phi(n-1)}) \subset F_{\phi(n)-1}(x_{\phi(n)}) \subset F_{\phi(n)}(x_{\phi(n)}) = M_{\phi(n)}$$

dont la dernière est stricte, ce qui contredit le caractère noethérien de M.

Corollaire 3.6. — *Si* E *est un ensemble quasi-bien ordonné, alors la petite catégorie* $\tilde{E}$ *vérifie la propriété* (FF).

Dans la suite, on va chercher, suivant Putman, Sam et Snowden, un cadre plus général que les ensembles ordonnés pour permettre de passer de propriétés noethériennes sur des foncteurs ensemblistes à des propriétés noethériennes sur des foncteurs à valeurs dans une catégorie abélienne.

4. FONCTEURS DEPUIS UNE CATÉGORIE DIRIGÉE

(Tout le contenu de cette section se trouve dans la section 5 de [47].)

Définition 4.1. — *On dit qu'une catégorie* $\mathcal{C}$ *est* dirigée *si ses seuls endomorphismes sont les identités.*

Cette notion est plus générale que celle d'ensemble ordonné, mais plus restrictive que celle de catégorie EI (où tous les endomorphismes sont des isomorphismes). Dans une catégorie EI non dirigée, la propriété (FF) est le plus souvent très difficile à étudier directement, en raison des problèmes de théorie des représentations des groupes d'automorphismes des objets qui y sont sous-jacents.

Dans la suite de cette section, nous supposerons que $\mathcal{C}$ *est une petite catégorie dirigée. Nous supposerons également, par commodité, que* $\mathcal{C}$ *est squelettique (deux objets isomorphes sont égaux).*

Étant donné un objet x de $\mathcal{C}$, notons $\mathcal{C}(x)$ l'ensemble

$$\mathcal{C}(x) := \bigsqcup_{t \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}} \mathcal{C}(x,t)$$

des morphismes de $\mathcal{C}$ de source x, muni de la relation d'ordre $\leq_x$ (notée souvent $\leq$, simplement) définie par $f \leq g$, où $f \in \mathcal{C}(x,t)$ et $g \in \mathcal{C}(x,u)$, s'il existe $\varphi \in \mathcal{C}(t,u)$ tel que $g = \varphi f$ (l'antisymétrie provient précisément de ce que $\mathcal{C}$ est une catégorie dirigée et squelettique).

Le rôle de cet ensemble ordonné pour les propriétés de finitude des foncteurs depuis $\mathcal{C}$ est illustré par le résultat suivant, qui généralise la partie ensembliste de la proposition 3.2.

Proposition 4.2. — *Le foncteur $\mathcal{C}(x,-) : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ est noethérien si et seulement si $\leq_x$ est un quasi-bon ordre sur $\mathcal{C}(x)$.*

Démonstration — Supposons que $\leq_x$ est un quasi-bon ordre et qu'il existe une suite strictement croissante (F_n) de sous-foncteurs de $\mathcal{C}(x,-)$: on dispose d'une suite (t_n) d'objets de $\mathcal{C}$ et de $\xi_n \in F_n(t_n) \setminus F_{n-1}(t_n)$. Regardons les $\xi_n \in \mathcal{C}(x,t_n)$ comme des éléments de $\mathcal{C}(x)$: il existe des entiers $i < j$ tels que $\xi_i \leq \xi_j$, de sorte qu'existe une flèche $g \in \mathcal{C}(t_i,t_j)$ telle que $\xi_j = g\xi_i$. Par conséquent, on a

$$\xi_j = F_i(g)(t_i) \in F_i(t_j) \subset F_{j-1}(t_j),$$

contradiction établissant que le foncteur $\mathcal{C}(x,-)$ est noethérien.

La réciproque, similaire et inutilisée dans la suite, est laissée au lecteur.

En revanche, pour aborder les propriétés de finitude de foncteurs depuis $\mathcal{C}$ vers une catégorie abélienne, nous aurons besoin d'introduire un ingrédient supplémentaire :

Définition 4.3. — *Soit x un objet de $\mathcal{C}$. On appelle* renforcement admissible *de $\leq_x$ toute relation d'ordre $\preceq_x$ (ou simplement $\preceq$) sur $\mathcal{C}(x)$ vérifiant les trois conditions suivantes :*

1. *cette relation renforce $\leq_x$, c'est-à-dire que $f \leq_x g$ implique $f \preceq_x g$;*
2. *$\preceq_x$ est un bon ordre ;*
3. *la relation d'ordre strict $\prec_x$ (ou simplement $\prec$) associée à $\preceq_x$ est compatible à la composition à gauche : pour tous $f \prec_x f'$ avec $f, f' \in \mathcal{C}(x,t)$ et tout $g \in \mathcal{C}(t,u)$, on a $gf \prec_x gf'$.*

Si un tel ordre existe pour tout objet x, les flèches de $\mathcal{C}$ sont nécessairement des monomorphismes, comme le montrent la dernière condition et le caractère total des ordres $\preceq_x$. Cela illustre en particulier qu'un renforcement admissible n'existe pas nécessairement (il est très facile de construire des catégories dirigées dont toutes les flèches ne sont pas des monomorphismes).

La construction fondamentale de Sam et Snowden est la suivante. Supposons que x est un objet de $\mathcal{C}$ tel que $\leq_x$ possède un renforcement admissible $\preceq_x$ (qu'on suppose donné : la construction qui suit dépend du choix de $\preceq_x$). Soit k un corps. Si t est un objet de $\mathcal{C}$ et ξ un élément non nul de $k[\mathcal{C}(x,t)]$, on appelle *terme initial* de ξ le plus grand élément de $\mathcal{C}(x,t) \subset \mathcal{C}(x)$, pour l'ordre $\preceq$, dont le coefficient dans ξ est non nul ; on le note $init(\xi)$. Si F est un sous-foncteur de $k[\mathcal{C}(x,-)] : \mathcal{C} \to k - \mathbf{Mod}$, on note $\mathrm{in}(F)$ le sous-foncteur de $\mathcal{C}(x,-) : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$ donné par

$$\mathrm{in}(F)(t) := \{init(\xi) \mid \xi \in F(t) \setminus \{0\}\}$$

(c'est la dernière hypothèse, de compatibilité à la composition à gauche, sur le renforcement admissible qui assure que $\mathrm{in}(F)$ définit bien un sous-foncteur de $\mathcal{C}(x,-)$).

Le résultat élémentaire suivant constitue le point crucial de l'approche de Sam-Snowden « à la Gröbner ».

Lemme 4.4. — *Soient $F \subset G$ des sous-foncteurs de $k[\mathcal{C}(x,-)]$. On a $\mathrm{in}(F) \subset \mathrm{in}(G)$. Si de plus $\mathrm{in}(F) = \mathrm{in}(G)$, alors $F = G$.*

Démonstration — La première partie est immédiate. Supposons $F \neq G$ et $\mathrm{in}(F) = \mathrm{in}(G)$. Alors il existe un objet t de $\mathcal{C}$ et $\xi \in G(t) \setminus F(t)$ tel que $f := init(\xi) \in \mathcal{C}(x)$ soit *minimal*, pour $\preceq_x$, parmi les éléments de ce type. Comme $f \in \mathrm{in}(G) = \mathrm{in}(F)$, il existe $\zeta \in F(t)$ tel que $init(\zeta) = f$. Par définition du terme initial, cela montre qu'il existe un scalaire non nul u tel que $\xi - u\zeta$ soit combinaison linéaire de morphismes $g \in \mathcal{C}(x,t)$ tels que $g \prec_x f$. Mais on a $\xi - u\zeta \in G(t) \setminus F(t)$, d'où $f \preceq_x init(\xi - u\zeta)$ par minimalité de f, contradiction qui établit le lemme.

En conséquence, on obtient la proposition élémentaire mais fondamentale suivante :

Proposition 4.5. — *Si $\leq_x$ possède un renforcement admissible et que le foncteur*

$$\mathcal{C}(x,-) : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$$

est noethérien, alors le foncteur

$$k[\mathcal{C}(x,-)] : \mathcal{C} \to k - \mathbf{Mod}$$

est noethérien.

Définition 4.6. — *On dit que la petite catégorie dirigée squelettique $\mathcal{C}$ est de Gröbner si, pour tout objet x de $\mathcal{C}$, la relation $\leq_x$ sur $\mathcal{C}(x)$ est un quasi-bon ordre et possède un renforcement admissible.*

Combinant les propositions 4.2 et 4.5, on obtient :

Proposition 4.7. — *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie de Gröbner, alors la catégorie de foncteurs $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, k - \mathbf{Mod})$ est localement noethérienne.*

On a en fait mieux :

Théorème 4.8. — *Toute catégorie (petite, squelettique et dirigée) de Gröbner possède la propriété (FF).*

La démonstration de ce théorème, que nous omettrons, est analogue à celle de la proposition précédente ; il faut redéfinir la notion de terme initial et la construction $F \rightsquigarrow \mathrm{in}(F)$ (pour que le but de ce foncteur ne soit plus la catégorie des ensembles mais son produit en couronnes avec le treillis des sous-objets de M, où M est un objet noethérien d'une catégorie abélienne et F un sous-foncteur de $M[\mathcal{C}(x,-)]$). La difficulté technique supplémentaire est essentiellement la même que celle nécessitée pour la démonstration de la proposition 3.5 par rapport à celle de la proposition 3.2 (il faut faire usage de la même manière du lemme 3.4).

Définition 4.9. — *Soit $\mathcal{D}$ une petite catégorie (pas nécessairement dirigée). On dit que $\mathcal{D}$ est une catégorie quasi-Gröbner s'il existe un foncteur essentiellement surjectif possédant la propriété (FS) d'une catégorie (petite, squelettique et dirigée) de Gröbner vers $\mathcal{D}$*

En combinant le théorème 4.8 à la proposition 2.4, il vient :

Corollaire 4.10. — *Toute catégorie quasi-Gröbner possède la propriété (FF).*

Exemple 4.11 (Cf. [47], section 7). — Ce critère permet de démontrer rapidement que la catégorie Θ des ensembles finis avec injections vérifie la propriété (FF) (ce qui constitue le résultat principal de [5]). Soit en effet Δ_0 la catégorie dont les objets sont les ensembles $\mathbf{n} = \{1, \dots, n\}$ munis de l'ordre total usuel et les morphismes sont les fonctions strictement croissantes et $\iota : \Delta_0 \to \Theta$ le foncteur d'inclusion. Alors ι est essentiellement surjectif et vérifie la propriété (FS), en raison de l'isomorphisme naturel

$$\iota^*\Theta(E,-) \simeq \bigsqcup_{\leq} \Delta_0\big((E,\leq),-\big)$$

(où la somme est prise sur l'ensemble des ordres totaux $\leq$ sur l'ensemble E).

Par ailleurs, Δ_0 est une catégorie de Gröbner : d'abord, c'est clairement une petite catégorie dirigée squelettique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_0(\mathbf{n})$ est la somme sur $i \in \mathbb{N}$ des suites $(a_1, \dots, a_n)$ strictement croissantes de $\mathbf{i}$; si $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ sont deux éléments de cet ensemble ($\underline{a}$ étant une suite de $\mathbf{i}$ et $\underline{b}$ une suite de $\mathbf{j}$), on voit aisément que $\underline{a} \leq \underline{b}$ si et seulement si $a_1 \leq b_1$, $a_i - a_{i-1} \leq b_i - b_{i-1}$ pour $i \in \{2, \dots, n\}$ et $i - a_n \leq j - b_n$. Cela permet de déduire que $\leq_{\mathbf{n}}$ est un quasi-bon ordre de la même propriété de l'ensemble ordonné produit usuel $\mathbb{N}^{n+1}$.

Plongeons à présent l'ensemble $\Delta_0(\mathbf{n})$ dans $\mathbb{N}^{n+1}$ en associant à une suite $(a_1, \dots, a_n)$ strictement croissante de $\mathbf{i}$ le $(n+1)$-uplet $(a_1, \dots, a_n, i)$. On vérifie sans peine que la restriction à $\Delta_0(\mathbf{n})$ de l'ordre lexicographique (pour l'ordre usuel sur chaque facteur $\mathbb{N}$) définit un renforcement admissible de $\leq_{\mathbf{n}}$.

5. LA CATÉGORIE Ω_{SH} ; CONCLUSION

Le contenu de cette section (tiré de la section 8 de [47]) est en un sens analogue à celui de l'exemple 4.11, mais avec de substantielles complications techniques dues au fait que la combinatoire des surjections ensemblistes est beaucoup plus riche que celle des injections.

Si $f : \mathbf{n} \to \mathbf{m}$ est un morphisme de Ω (c'est-à-dire une fonction surjective), on définit une fonction $f^! : \mathbf{m} \to \mathbf{n}$ par

$$f^!(r) := \min f^{-1}(\{r\})$$

(le min étant relatif à l'ordre usuel sur $\mathbf{n}$). On note Ω_{sh} la sous-catégorie de Ω ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont les f tels que $f^!$ soit une fonction croissante (pour les ordres usuels). De fait, il est facile de vérifier que cette condition est stable par composition et que l'on a

$$(g \circ f)^! = f^! \circ g^!$$

si f et g sont deux flèches composables de Ω_{sh} (ce qui n'est pas vrai pour toutes les flèches composables de Ω !). La catégorie Ω_{sh} est notée **OS** (pour *ordered surjections*) dans [47] (où Ω est notée **FS**) ; elle apparaît également (pour des motifs opéradiques indépendants de questions de finitude) dans le travail [26] d'É. Hoffbeck et Vespa, d'où l'on tire l'indice *sh* (pour les battages, *shuffles* en anglais) utilisé dans la notation.

La catégorie Ω_{sh}^{op} est une petite catégorie squelettique dirigée.

Proposition 5.1. — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $\leq_\mathbf{n}$ est un quasi-bon ordre sur l'ensemble $\Omega_{sh}^{op}(\mathbf{n})$.*

Démonstration (esquisse) — Si E est un ensemble fini, l'ensemble ordonné $\mathcal{M}(E)$ des *mots* sur E est l'ensemble des suites finies ordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E, muni de la relation définie par : $(x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_m)$ s'il existe une fonction strictement croissante $\phi : \mathbf{n} \to \mathbf{m}$ telle que $x_i = y_{\phi(i)}$ pour tout $i \in \mathbf{n}$. Par le lemme d'Higman [25], si E est un ensemble fini, alors $\mathcal{M}(E)$ est quasi-bien ordonné. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction

$$\rho : \Omega_{sh}^{op}(\mathbf{n}) \to \mathcal{M}(\mathbf{1}) \times \mathcal{M}(\mathbf{2}) \times \cdots \times \mathcal{M}(\mathbf{n})$$

en associant à une flèche $f \in \Omega_{sh}(\mathbf{i}, \mathbf{n})$ le n-uplet $(g_1, \dots, g_n)$, où g_t est la restriction de f à l'intervalle de $\mathbf{n}$ constitué des entiers strictement compris entre $f^!(t)$ et $f^!(t+1)$ (ou strictement supérieurs à $f^!(n)$ si $t = n$) — cette restriction est vue comme un mot en l'assimilant à la liste ordonnée de ses valeurs, qui appartiennent à $\mathbf{t}$. On vérifie que les relations $f \leq_\mathbf{n} g$ et $\rho(f) \leq \rho(g)$ sont équivalentes, où l'ordre sur $\mathcal{M}(\mathbf{1}) \times \mathcal{M}(\mathbf{2}) \times \cdots \times \mathcal{M}(\mathbf{n})$ est l'ordre produit, qui est un quasi-bon ordre comme tout produit fini de quasi-bons ordres.

Proposition 5.2. — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ordre $\leq_\mathbf{n}$ sur $\Omega_{sh}^{op}(\mathbf{n})$ possède un renforcement admissible $\preceq$.*

Démonstration — On définit cette relation comme suit.

1. Pour $i < j$, on convient que $f \preceq g$ pour tous $f \in \Omega_{sh}(\mathbf{i}, \mathbf{n})$ et $g \in \Omega_{sh}(\mathbf{j}, \mathbf{n})$.
2. La restriction à $\Omega_{sh}(\mathbf{i}, \mathbf{n})$ coïncide avec celle de l'ordre lexicographique sur $\mathbf{n}^i$ (on considère ici $\Omega_{sh}(\mathbf{i}, \mathbf{n})$ comme sous-ensemble de $\mathbf{Ens}(\mathbf{i}, \mathbf{n}) = \mathbf{n}^i$).

Il est clair que $\preceq$ est un bon ordre. Il étend $\leq$ car $f \leq g$, pour $f \in \Omega_{sh}(\mathbf{i}, \mathbf{n})$ et $g \in \Omega_{sh}(\mathbf{j}, \mathbf{n})$, implique $i < j$ ou $f = g$. Vérifions que $f \prec g$ implique $fh \prec gh$, où $f, g \in \Omega_{sh}(\mathbf{i}, \mathbf{n})$ et $h \in \Omega_{sh}(\mathbf{j}, \mathbf{i})$. Il existe r tel que $f(s) = g(s)$ pour $s < r$ et $f(r) < g(r)$. On a alors $fh(t) = gh(t)$ pour $t < h^!(r)$, car cette inégalité entraîne $h(t) < r$ puisque h appartient à Ω_{sh}, et $fh(h^!(r)) = gh(h^!(r))$ puisque $hh^! = \mathrm{Id}$, d'où la proposition.

Proposition 5.3. — *Le foncteur d'inclusion $\iota : \Omega_{sh}^{op} \to \Omega^{op}$ est essentiellement surjectif et vérifie la propriété (FS).*

Démonstration — L'essentielle surjectivité est immédiate. On dispose par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'un isomorphisme de foncteurs

$$\iota^*\Omega(-, \mathbf{n}) \simeq \Omega_{sh}(-, \mathbf{n}) \times \Sigma_n$$

obtenu comme suit. Si $f : \mathbf{i} \to \mathbf{n}$ est une surjection, la fonction $f^! : \mathbf{n} \to \mathbf{i}$ est injective, de sorte qu'il existe une et une seule permutation $\sigma \in \Sigma_n$ telle que $f^!\sigma$ soit croissante. L'isomorphisme est donné par $f \mapsto (\sigma^{-1}f, \sigma)$ (on a $(\sigma^{-1}f)^! = f^!\sigma$, donc $\sigma^{-1}f$ appartient à Ω_{sh}).

En combinant les trois propositions précédentes au corollaire 4.10 et à la proposition 2.5, on obtient la conclusion souhaitée :

Corollaire 5.4. — *La catégorie Ω_{sh}^{op} est de Gröbner, tandis que Ω^{op} et Γ^{op} sont quasi-Gröbner, elles vérifient donc la propriété (FF).*

Si A est un anneau fini, les catégories $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}'(A)$ et $\mathbf{M}(A)$ sont également quasi-Gröbner et vérifient (FF).

Remarque 5.5. — Cette méthode ne paraît pas applicable à la catégorie $\mathbf{S}(A)$, où A est un anneau commutatif fini (cf. remarque 2.7). Pour remédier à cette difficulté, Putman et Sam [44] la modifient légèrement : ils transitent également par une catégorie dirigée auxiliaire $\mathcal{C}$ (qu'ils désignent par $\mathrm{OVI}(A)$), mais qui ne semble pas de Gröbner. Ils parviennent néanmoins à montrer qu'elle vérifie la propriété (FF) en utilisant deux relations d'ordre sur les ensembles sous-jacents aux $\mathcal{C}(x)$, dont l'une est un quasi-bon ordre et l'autre est un bon ordre renforçant la première, mais avec des propriétés de compatibilité à la composition plus faibles et subtiles que celles utilisées pour la notion de renforcement admissible.

RÉFÉRENCES

[1] Maurice Auslander. Coherent functors. In *Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla, Calif., 1965)*, pages 189–231. Springer, New York, 1966.

[2] Stanislaw Betley. Stable K-theory of finite fields. *K-Theory*, 17(2) :103–111, 1999.

[3] Ruth Charney. On the problem of homology stability for congruence subgroups. *Comm. Algebra*, 12(17-18) :2081–2123, 1984.

[4] Thomas Church, Jordan S. Ellenberg, and Benson Farb. FI-modules and stability for representations of symmetric groups. À paraître au *Duke Math. J.*, arXiv :1204.4533, 2012.

[5] Thomas Church, Jordan S. Ellenberg, Benson Farb, and Rohit Nagpal. FI-modules over noetherian rings. arXiv :1210.1854, à paraître dans *Geometry and Topology*, 2012.

[6] Nguyen The Cuong and Lionel Schwartz. Some finiteness results in the category $\mathcal{U}$. arXiv :1401.6684, 2014.

[7] Kirian Delamotte, Nguyen D. H. The Hai, and Lionel Schwartz. Questions and conjectures about the modular representation theory of the general linear group $GL_n(\mathbb{F}_2)$ and the Poincaré series of unstable modules. arXiv :1408.1322, 2014.

[8] Aurélien Djament. Des propriétés de finitude des foncteurs polynomiaux. Prépublication disponible sur http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00853071.

[9] Aurélien Djament. Foncteurs en grassmanniennes, filtration de Krull et cohomologie des foncteurs. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, (111) :xx+213, 2007.

[10] Aurélien Djament. Le foncteur $V \mapsto \mathbb{F}_2[V]^{\otimes 3}$ entre $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels est noethérien. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(2) :459–490, 2009.

[11] Aurélien Djament. Sur l'homologie des groupes unitaires à coefficients polynomiaux. *J. K-Theory*, 10(1) :87–139, 2012.

[12] W. G. Dwyer. Twisted homological stability for general linear groups. *Ann. of Math. (2)*, 111(2) :239–251, 1980.

[13] Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane. On the groups $H(\Pi, n)$. II. Methods of computation. *Ann. of Math. (2)*, 60 :49–139, 1954.

[14] A. Djament et C. Vespa. Sur l'homologie des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients polynomiaux. Accepté à *Commentarii Mathematici Helvetici*, arXiv : 1210.4030.

[15] A. Djament et C. Vespa. Sur l'homologie des groupes orthogonaux et symplectiques à coefficients tordus. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 43(3) :395–459, 2010.

[16] Gérald Gaudens et Lionel Schwartz. Applications depuis $K(\mathbb{Z}/p, 2)$ et une conjecture de N. Kuhn. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 63(2) :763–772, 2013.

[17] Vincent Franjou, Eric M. Friedlander, Teimuraz Pirashvili, and Lionel Schwartz. *Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology*, volume 16 of *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[18] Vincent Franjou, Eric M. Friedlander, Alexander Scorichenko, and Andrei Suslin. General linear and functor cohomology over finite fields. *Ann. of Math. (2)*, 150(2) :663–728, 1999.

[19] Vincent Franjou, Jean Lannes, and Lionel Schwartz. Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis. *Invent. Math.*, 115(3) :513–538, 1994.

[20] Eric M. Friedlander and Andrei Suslin. Cohomology of finite group schemes over a field. *Invent. Math.*, 127(2) :209–270, 1997.

[21] Pierre Gabriel. Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. Math. France*, 90 :323–448, 1962.

[22] Wee Liang Gan and Liping Li. Noetherian property of infinite EI categories. arXiv :1407.8235, 2014.

[23] James A. Green. *Polynomial representations of* GL_n, volume 830 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.

[24] Hans-Werner Henn, Jean Lannes, and Lionel Schwartz. The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects. *Amer. J. Math.*, 115(5) :1053–1106, 1993.

[25] Graham Higman. Ordering by divisibility in abstract algebras. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 2 :326–336, 1952.

[26] Éric Hoffbeck and Christine Vespa. Leibniz homology of Lie algebras as functor homology. arXiv : 1401.6139, 2014.

[27] Henning Krause and Claus Michael Ringel, editors. *Infinite length modules*. Trends in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000. Invited lectures from the conference held in Bielefeld, September 7–11, 1998.

[28] Nicholas J. Kuhn. Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. I. *Amer. J. Math.*, 116(2) :327–360, 1994.

[29] Nicholas J. Kuhn. Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. II. *K-Theory*, 8(4) :395–428, 1994.

[30] Nicholas J. Kuhn. Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. III. *K-Theory*, 9(3) :273–303, 1995.

[31] Jean Lannes. Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (75) :135–244, 1992. Avec un appendice par Michel Zisman.

[32] Jean-Louis Loday. *Cyclic homology*, volume 301 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998. Appendix E by María O. Ronco, Chapter 13 by the author in collaboration with Teimuraz Pirashvili.

[33] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[34] Haynes Miller. The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces. *Ann. of Math. (2)*, 120(1) :39–87, 1984.

[35] Haynes Miller. Correction to : "The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces" [Ann. of Math. (2) **120** (1984), no. 1, 39–87 ; MR0750716 (85i :55012)]. *Ann. of Math. (2)*, 121(3) :605–609, 1985.

[36] Teimuraz Pirashvili. Dold-Kan type theorem for Γ-groups. *Math. Ann.*, 318(2) :277–298, 2000.

[37] Teimuraz Pirashvili. Hodge decomposition for higher order Hochschild homology. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 33(2) :151–179, 2000.

[38] Laurent Piriou. Sous-objets de $\overline{I} \otimes \Lambda^n$ dans la catégorie des foncteurs entre $\mathbf{F}_2$-espaces vectoriels. *J. Algebra*, 194(1) :53–78, 1997.

[39] Geoffrey M. L. Powell. The Artinian conjecture for $I^{\otimes 2}$. *J. Pure Appl. Algebra*, 128(3) :291–310, 1998. With an appendix by Lionel Schwartz.

[40] Geoffrey M. L. Powell. Polynomial filtrations and Lannes' T-functor. *K-Theory*, 13(3) :279–304, 1998.

[41] Geoffrey M. L. Powell. The structure of indecomposable injectives in generic representation theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(10) :4167–4193, 1998.

[42] Geoffrey M. L. Powell. On Artinian objects in the category of functors between $\mathbf{F}_2$-vector spaces. In *Infinite length modules (Bielefeld, 1998)*, Trends Math., pages 213–228. Birkhäuser, Basel, 2000.

[43] Geoffrey M. L. Powell. Endomorphisms of $H^*(K(V, n); \mathbb{F}_2)$ in the category of unstable modules. *Math. Z.*, 254(1) :55–115, 2006.

[44] Andrew Putman and Steven Sam. Representation stability and finite linear groups. arXiv : 1408.3694.

[45] Daniel Quillen. On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field. *Ann. of Math. (2)*, 96 :552–586, 1972.

[46] Daniel Quillen. Higher algebraic K-theory. I. In *Algebraic K-theory, I : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, pages 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. 341. Springer, Berlin, 1973.

[47] Steven Sam and Andrew Snowden. Gröbner methods for representations of combinatorial categories. arXiv : 1408.3694.

[48] Lionel Schwartz. La conjecture de Sullivan (d'après H. Miller). *Astérisque*, (133-134) :101–112, 1986. Séminaire Bourbaki, Vol. 1984/85.

[49] Lionel Schwartz. *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1994.

[50] Stefan Schwede. On the homotopy groups of symmetric spectra. *Geom. Topol.*, 12(3) :1313–1344, 2008.

[51] Alexander Scorichenko. *Stable K-theory and functor homology over a ring*. PhD thesis, Evanston, 2000.

[52] Graeme Segal. Categories and cohomology theories. *Topology*, 13 :293–312, 1974.

[53] Antoine Touzé and Wilberd van der Kallen. Bifunctor cohomology and cohomological finite generation for reductive groups. *Duke Math. J.*, 151(2) :251–278, 2010.

[54] Wilberd van der Kallen. Homology stability for linear groups. *Invent. Math.*, 60(3) :269–295, 1980.

Aurélien DJAMENT

Université de Nantes
Laboratoire de mathématiques Jean Leray
UMR CNRS 6629
2 rue de la Houssinière
BP 92208
F–44322 Nantes Cedex 3
E-mail : aurelien.djament@univ-nantes.fr