Séminaire BOURBAKI Janvier 2016
68ème année, 2015-2016, n$^{\text{o}}$ 1111

PROBLÈMES DE MODULES FORMELS [d'après Drinfeld, Kontsevich, Hinich, Manetti, Pridham, Lurie ...]

par **Bertrand TOËN**

INTRODUCTION

La théorie des déformations se propose d'étudier les variations infinitésimales d'objets d'origines géométrico-algébriques. Il est d'abord question de déterminer des espaces tangents, approximations linéaires des problèmes de déformations considérés, dans l'esprit de l'étude des variations infinitésimales de structures complexes de [Fro-Nij], [Ko-Sp] etc. À la fin des années 50, la notion de schémas amène d'une part la possibilité d'utiliser des anneaux et des schémas artiniens, mais aussi le point de vue des *foncteurs des points* (voir [Gr]). Cela permet à la théorie des déformations de se formaliser autour de la notion de foncteurs définis sur la catégorie des anneaux artiniens, de leurs propriétés d'exactitudes et de leur représentabilité (voir [Sc]). L'exemple typique est le problème des déformations d'une variété algébrique lisse X_0 fixée sur k. Le foncteur correspondant

$$\mathrm{Def}_{X_0} : \mathbf{art}_k^* \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

envoie une algèbre artinienne augmentée A sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de paires (X, u), où X est un schéma plat sur $\mathrm{Spec}\, A$ et u un isomorphisme de variétés algébriques $u : X \otimes_A k \simeq X_0$. Étudier le foncteur Def_{X_0} revient à étudier la structure formelle de l'espace des déformations de X_0. Parmi les résultats standards on montre par exemple que $\mathrm{Def}_{X_0}(k[\epsilon]) \simeq H^1(X_0, \mathbb{T}_{X_0})$, et que les obstructions à la lissité de Def_{X_0} vivent dans $H^2(X_0, \mathbb{T}_{X_0})$.

C'est plus tard, au cours des années 80, que le lien entre théorie de Lie et théorie des déformations émerge, à travers les idées combinées de P. Deligne et V. Drinfeld d'abord, puis de M. Kontsevich, J. Stasheff, M. Schlessinger, S. Barannikov, V. Schechtman, V. Hinich, M. Manetti et bien d'autres. Ce lien est resté pendant très longtemps un principe qui s'énonce de la manière suivante :

Tout problème de déformations naturel est contrôlé par une algèbre de Lie différentielle graduée.

Ce principe est basé sur la construction qui à une dg-algèbre de Lie associe un foncteur sur les anneaux artiniens (et donc un problème de déformations) donné par les solutions de l'équation de Maurer-Cartan. De manière plus précise, si L est une dg-algèbre de Lie (concentrée en degrés cohomologiques $[1,\infty[$ pour simplifier) et A une algèbre locale artinienne augmentée d'idéal maximal m, on forme l'ensemble $MC(L\otimes_k m)$ des éléments x de degré 1 dans $L\otimes_k m$ et vérifiant la fameuse équation de Maurer-Cartan $d(x)+\frac{1}{2}[x,x]=0$. Ceci définit un foncteur

$$X_L : \mathbf{art}_k^* \longrightarrow \mathrm{Ens},$$

qui est le problème de déformations associé à L. Lorsqu'un problème de déformations s'écrit de la forme X_L la connaissance de L en donne énormément d'informations et permet, par des manipulations purement algèbriques sur L, de comprendre et de décrire le problème de déformations en question. Par exemple, l'espace tangent est simplement $H^1(L)$, et $H^2(L)$ est toujours un espace d'obstructions à la lissité formelle de X_L. L'anneau des fonctions formelles de X_L s'identifie par ailleurs à $H^0(\widehat{C}^*(L))$, où $\widehat{C}^*(L)$ est le complexe de Chevalley de L (voir §1.2). Ceci permet de dire, par exemple, que si la différentielle de L est nulle, alors les singularités de X_L sont au plus quadratiques, et si le crochet de L est nul alors X_L est toujours formellement lisse. Enfin, la construction $L\mapsto X_L$ s'étend aussi au cas où L est en degré quelconque en remplaçant les ensembles $MC(L\otimes_k m)$ par les espaces de Maurer-Cartan $\underline{MC}(L\otimes_k m)$ (voir par exemple [Hi]). Dans ce cas $H^0(L)$ représente les symétries infinitésimales (automorphismes infinitésimaux), et les $H^i(L)$ pour $i<0$ des symétries d'ordre supérieur. Les espaces $H^i(L)$ pour $i>2$ sont quant à eux des espaces d'obstructions supérieurs qui n'interviennent pas dans la construction de X_L.

Sans que cela soit un théorème précis, on pouvait remarquer que la construction de Maurer-Cartan $L\mapsto X_L$ produisait tous les problèmes de déformations que l'on rencontre dans la pratique, et cela a permis de très nombreuses avancées, certaines spectaculaires. On pourrait par exemple citer la quantification par déformation des variétés de Poisson (voir [Ko]), l'étude locale des espaces de représentations de groupes fondamentaux de variétés projectives complexes (voir [Go-Mi, Si]), ou encore le théorème de Bogomolov-Tian-Todorov et ses généralisations (voir par exemple [Ka-Ko-Pa, §4]). Cependant, la situation n'était pas satisfaisante car il n'y avait pas de méthode précise pour construire la dg-algèbre de Lie correspondant à un problème de déformations donné, il fallait donc la deviner au cas par cas. Pire, plusieurs dg-algèbres de Lie différentes pouvaient incarner le même problème de déformations, avec parfois plusieurs choix pertinents qui peuvent aller jusqu'à donner des espaces d'obstructions différents (voir par exemple [Dr] commentaire (4)). Enfin, les espaces d'obstructions supérieurs $H^i(L)$ pour $i>2$ restent sans interprétation en termes du foncteur X_L.

Ce n'est que récemment que le principe ci-dessus est devenu un théorème, grâce aux résultats de J. Lurie de [Lu1] et indépendamment de J. Pridham de [Pr1]. Ce point culminant de l'histoire de la théorie des déformations est en réalité l'aboutissement de tout un courant d'idées qui porte souvent le nom de *DDT* (pour *Derived Deformation Theory*), principalement initié par V. Drinfeld dans sa fameuse lettre [Dr], développé et véhiculé par M. Kontsevich et poursuivi plus récemment par V. Hinich, M. Manetti,

M. Kapranov et I. Ciocan-Fontanine, et enfin J. Pridham et J. Lurie. La DDT prévoit qu'il est nécessaire d'étendre les foncteurs définis sur des algèbres artiniennes en des foncteurs définis sur les dg-algèbres artiniennes si l'on souhaite pouvoir mettre en relation biunivoque les dg-algèbres de Lie L avec leurs problèmes de déformations correspondants X_L. C'est le point de vue qui est explicitement adopté dans les travaux [Hi] et [Man], dans lesquels la construction du foncteur des solutions à l'équation de Maurer-Cartan est étendue et le définit comme un foncteur sur les dg-algèbres artiniennes. Dans [Lu1] et [Pr1], J. Lurie et J. Pridham reprennent ce point de vue et vont plus loin : ils montrent que la construction $L \mapsto X_L$, étendue aux dg-algèbres artiniennes de manière pertinente, réalise une équivalence de catégories, entre la catégorie homotopique des dg-algèbres de Lie et la catégorie homotopiques des *problèmes de modules formels* (qui sont définis comme des foncteurs sur les dg-algèbres artiniennes vérifiant certaines conditions d'exactitude).

Théorème 0.1 (Lurie-Pridham). — *La construction $L \mapsto X_L$ s'étend en une équivalence de théories homotopiques*

$$\{\textit{dg-algèbres de Lie}\} \simeq \{\textit{problèmes de modules formels}\}.$$

Ce théorème est de toute évidence une avancée majeure dans la théorie des déformations. D'une part, il répond aux problèmes conceptuels et techniques que la théorie des déformations rencontrait en faisant d'un principe peu précis un théorème. D'autre part, J. Lurie étend aussi cette équivalence en dehors du cadre conventionnel de la géométrie algébrique en en démontrant des variantes non commutatives où les dg-algèbres commutatives sont remplacées par des $\mathbb{E}_n$-algèbres, mais aussi en en donnant une version axiomatique. Ce sont ces résultats que nous allons décire dans cet texte, et nous basons sur la manière dont ils sont abordés dans [Lu1].

Avant de décrire brièvement le contenu de ce texte, signalons la raison profonde qui invite les dg-algèbres artiniennes dans la théorie des déformations. Un problème de déformations (au sens classique) est un foncteur

$$F : \mathbf{art}_k^* \longrightarrow \mathrm{Ens},$$

des k-algèbres artiniennes augmentées vers les ensembles, à qui l'on peut demander de satisfaire certaines conditions (voir par exemple [Sc]). Pour une algèbre artinienne A, on pense à $F(A)$ comme à l'ensemble des classes d'équivalences de familles d'objets de F paramétrées par le schéma artinien $Spec\, A$. La première information que l'on peut décrire est l'espace tangent de F, défini comme étant $T = F(k[\epsilon])$, l'ensemble des valeurs de F sur les nombres duaux. Si F représente un espace formel lisse, alors la donnée de T caractérise complètement F, qui devient pro-représentable par l'anneau de séries formelles $k[[T^\vee]]$. Il est très rare que F soit lisse, et on cherche alors à étudier son défaut de lissité. Typiquement, on se pose la question des fibres de l'application

$$F(k[x]/x^3) \longrightarrow F(k[x]/x^2) = T,$$

c'est-à-dire la question de l'extension d'arcs d'ordre 1 (vecteurs tangents) en arcs d'ordre 2 dans F, et précisément à comprendre les obstructions à l'existence de ces extensions. Il se trouve que l'étude des fibres de cette application fait intervenir des dg-algèbres artiniennes qui ne sont plus des algèbres artiniennes au sens usuel. En effet, il est connu depuis Quillen que la projection $k[x]/x^3 \longrightarrow k[x]/x^2$ se comporte comme un espace principal homogène, et qu'en tant que tel il est déterminé par un carré homotopiquement cartésien

$$\begin{tikzcd} k[x]/x^3 \arrow[r] \arrow[d] & k \arrow[d] \\ k[x]/x^2 \arrow[r] & k[\epsilon_{-1}], \end{tikzcd}$$

où $k[\epsilon_{-1}]$ est une dg-algèbre de nombres duaux pour laquelle la variable ϵ_{-1} est de degré cohomologique -1 (pour l'analogie avec les fibrés principaux $k[\epsilon_{-1}]$ joue le rôle de l'espace classifiant BG, où G est le groupe structural). On aimerait alors pouvoir dire que le diagramme correspondant

$$\begin{tikzcd} F(k[x]/x^3) \arrow[r] \arrow[d] & F(k) \arrow[d] \\ F(k[x]/x^2) \arrow[r] & F(k[\epsilon_{-1}]) \end{tikzcd}$$

reste cartésien, sans que cela ait un sens car $F(k[\epsilon_{-1}])$ n'est pas défini pour un problème de déformations au sens classique. On voit ainsi que si F provient par restriction d'un foncteur défini sur les dg-algèbres artiniennes, on peut alors étudier le défaut de lissité de F à l'aide du diagramme ci-dessus. Il se trouve que la vie est bien faite, car tous les problèmes de déformations que l'on rencontre dans la nature proviennent effectivement par restriction de foncteurs naturellement définis sur les dg-algèbres artiniennes. Il est donc raisonnable, et même souhaitable, de revoir la notion de problèmes de déformations en y remplaçant les algèbres artiniennes par leurs analogues différentielles gradués, et c'est ce qui est fait dans [Lu1]. Par définition, les problèmes de modules formels au sens de Lurie sont précisément des foncteurs définis sur les dg-algèbres artiniennes (à valeurs dans les ensembles simpliciaux) et vérifiant des conditions d'exactitude assurant en particulier que le diagramme ci-dessus est (homotopiquement) cartésien. On le voit ici, l'introduction des dg-algères artiniennes et des problèmes de modules formels offre une nouvelle compréhension de situation classique, à savoir le comportement de l'application $F(k[x]/x^3) \longrightarrow F(k[x]/x^2)$ et plus générale de la théorie de l'obstruction.

Pour terminer cette introduction, signalons que nous avons découpé le texte en trois grandes parties. Dans un premier temps nous rappellerons les définitions et les faits généraux sur les dg-algèbres de Lie. Nous introduirons en particulier leurs complexes de Chevalley (notion qui remonte à [Ch-Ei]) qui seront au cœur de l'équivalence entre dg-algèbres de Lie et problèmes de modules formels. Nous mentionnerons aussi leur théorie de l'homotopie. Le second paragraphe est consacré à la notion de problèmes de modules formels et à leur classification par des dg-algèbres de Lie. Nous indiquerons en particulier comment on peut construire pour toute dg-algèbre de Lie L un problème de modules formel X_L. Il faut penser à X_L comme aux solutions de l'équation de Maurer-Cartan dans L, bien qu'étonnamment la construction $L \mapsto X_L$ ne mentionne à aucun moment les éléments de Maurer-Cartan (une des originalités de [Lu1] est précisément de ne pas utiliser la notion d'éléments de Maurer-Cartan, qui est problématique dans le contexte homotopique, voir [Lu1, 2.0.2, 2.0.3]). La construction du foncteur X_- est relativement sophistiquée et nous ne ferons qu'esquisser sa construction ainsi que quelques éléments de la preuve qu'il induit une équivalence de catégories. Enfin, dans une dernière partie nous mentionnons des extensions de ce théorème, tout d'abord au cas non commutatif basée sur la notion de $\mathbb{E}_n$-algèbres, puis au cas relatif sur une base qui n'est plus un corps k mais peut-être un anneau ou un schéma. Nous verrons que dans ce cadre général tout n'est pas encore connu. Nous avons par ailleurs parsemé le texte d'exemples, certains tirés de [Lu1], d'autres plus originaux, en espérant qu'ils aident à la compréhension et convainquent de l'importance des résultats contenus dans [Lu1].

Conventions et notations. Nous travaillons au-dessus d'un corps de base k supposé de caractéristique nulle (sauf mention contraire). Les complexes de k-espaces vectoriels sont $\mathbb{Z}$-gradués et leurs différentielles augmentent le degré de 1. Leur catégorie sera notée $\mathbf{dg}_k$. Étant donnés deux complexes de k-espaces vectoriels E et F, nous notons $E \otimes_k F$ leur produit tensoriel. Il s'agit du complexe défini par

$$(E \otimes_k F)^n := \bigoplus_{p+q=n} E^p \otimes_k F^q,$$

et avec la différentielle déterminée par $d(x \otimes y) = d(x) \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes d(y)$, où $|x|$ désigne le degré de x.

Rappelons que la catégorie des complexes sur k, munie du produit tensoriel $\otimes_k$ et des isomorphismes d'associativité et d'unité usuels, est une catégorie monoïdale fermée. Elle est de plus symétrique pour la famille d'isomorphismes $\sigma : E \otimes_k F \simeq F \otimes_k E$ qui envoie $x \otimes y$ sur $(-1)^{|x| \cdot |y|} y \otimes x$. L'objet unité de cette structure monoïdale est k, considéré comme complexe concentré en degré 0.

Pour $i \in \mathbb{Z}$, nous notons $k[i]$ le complexe valant k en degré $-i$ et nul en tout autre degré. Par définition, le i-ième décalé d'un complexe E est défini par $E[i] := k[i] \otimes_k E$. Le complexe $E[1]$ s'identifie naturellement au complexe dont le terme de degré n est E^{n+1} et dont la différentielle est $-d$, l'opposée de la différentielle de E.

Pour un complexe E sur k, on note $H^i(E)$ le i-ème espace de cohomologie, et $Z^i(E) \subset E^i$ l'ensemble des cocycles de degré i. Nous utiliserons la notation

$$\pi_i(E) := H^{-i}(E).$$

Nous noterons $D(k)$ la catégorie dérivée d'un anneau k, définie comme la localisation de la catégorie des complexes de k-modules le long des quasi-isomorphismes. Plus généralement, pour une catégorie de modèles M nous désignerons par $\mathrm{Ho}(M) := W^{-1}M$ la catégorie obtenue à partir de M en localisant les équivalences faibles de M (voir [Ho, §1]). Nous noterons $[-,-]_M$ (ou bien $[-,-]$ si M est claire) les ensembles de morphismes dans $Ho(M)$. De même, nous noterons $\mathbf{Map}_M : \mathrm{Ho}(M)^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Ho}(M) \longrightarrow \mathrm{Ho}(S\mathrm{Ens})$ (ou bien simplement $\mathbf{Map}$) les espaces simpliciaux de morphismes dans M (voir [Ho, §5]).

Enfin, nous nous autoriserons un abus de langage en se permettant de déclarer que certains foncteurs définis sur les catégories homotopiques de catégories de modèles commutent à certaines limites ou colimites homotopiques, ce qui n'a pas de sens en soi. Le lecteur doit garder à l'esprit que cela n'a de sens que parceque les foncteurs en questions proviennent de foncteurs naturels définis avant le passage aux catégories homotopiques.

Des ∞-catégories et des catégories de modèles. Notre texte est écrit dans le langage de l'algèbre homotopique de Quillen (catégories de modèles), et nous supposons que le lecteur possède une vague idée de ce dont il s'agit. Cependant, [Lu1] est écrit dans le langage des ∞-catégories, plus puissant, plus naturel mais aussi plus difficile d'accès. Nous souhaitons signaler ici que le choix d'utiliser les catégories de modèles ne représente pas les goûts personnels de l'auteur, mais nous pensons qu'il peut rendre plus accessible le contenu de [Lu1] aux non-experts. Par ailleurs, signalons qu'il existe un dictionnaire relativement précis entre ces deux langages (voir par exemple [To, §2.1]). Nous avons aussi essayé de faire quelques commentaires ici et là pour expliquer le sens ∞-caégorique de certaines constructions, constructions qui sont souvent moins naturelles dans le contexte des catégories de modèles.

Remerciements : Je tiens à remercier J. Lurie, T. Pantev, C. Simpson, J. Tapia et G. Vezzosi pour leurs commentaires qui ont aidé, je l'espère, à améliorer ce texte.

1. ALGÈBRES DE LIE DIFFÉRENTIELLES GRADUÉES

Dans cette première section nous présentons la notion de dg-algèbre de Lie ainsi que leurs complexes de Chevalley. Nous présentons aussi quelques rudiments de leur théorie homotopique afin de comprendre la catégorie homotopique des dg-algèbres de Lie, obtenue par inversion formelle des quasi-isomorphismes.

1.1. Définitions et exemples

DÉFINITION 1.1. — *Une* algèbre de Lie différentielle graduée sur *k, ou simplement* dg-algèbre de Lie*, est la donnée d'une paire $(L, [-,-])$, formée d'un complexe L de*

k-espaces vectoriels et d'un morphisme de complexes

$$[-,-] : L \otimes_k L \longrightarrow L$$

telle que pour tous éléments x, y et z de L, de degrés respectifs $|x|$, $|y|$ et $|z|$, on ait :

1. *(Antisymétrie)* $[x, y] = (-1)^{|x|.|y|+1}[y, x]$
2. *(Jacobi)* $[x, [y, z]] + (-1)^{|x|.(|y|+|z|)}[y, [z, x]] + (-1)^{|z|.(|x|+|y|)}[z, [x, y]] = 0$.

On dispose d'une notion évidente de morphismes entre dg-algèbres de Lie L et L', qui consiste en la donnée d'un morphisme de complexes $f : L \longrightarrow L'$ tel que $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$ pour tous éléments x et y de L. Les dg-algèbres de Lie forment ainsi une catégorie que nous noterons $\mathbf{dgLie}_k$.

Quelques exemples élémentaires de dg-algèbres de Lie sont les suivants.

1. **Dg-algèbres de Lie discrètes.** Une k-algèbre de Lie g peut être vue comme une dg-algèbre de Lie en la considérant comme concentrée en degré 0. De cette manière, on obtient un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des algèbres de Lie dans celle des dg-algèbres de Lie. Les dg-algèbres de Lie de cette forme seront qualifiées de *discrètes*.
2. **Dg-algèbres de Lie abéliennes.** Tout complexe de k-espaces vectoriels E peut être considéré comme une dg-algèbre de Lie en le munissant du crochet nul $[-,-] = 0 : E \otimes_k E \longrightarrow E$. Cela founit un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des complexes dans $\mathbf{dgLie}_k$, et les objets dans son image essentielle seront appelés les *dg-algèbres de Lie abéliennes*.
3. **Dg-algèbres de Lie libres.** On dispose d'un foncteur d'oubli $\mathbf{dgLie}_k \longrightarrow \mathbf{dg}_k$, qui à une dg-algèbre de Lie L associe son complexe sous-jacent. Ce foncteur possède un adjoint à gauche $\mathrm{Lie}(-) : \mathbf{dg}_k \longrightarrow \mathbf{dgLie}_k$. Par définition, pour un complexe E la dg-algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(E)$ est la *dg-algèbre de Lie libre sur E*. L'existence du foncteur Lie peut se voir à l'aide d'énoncés généraux sur les catégories d'algèbres sur des opérades (voir par exemple [Lo-Va, §5.2.5]).

   Notons que lorsque i est un entier pair, $k[i]$, vue comme dg-algèbre de Lie abélienne, est libre. En revanche, $k[i]$ n'est pas libre lorsque i est impair : $k[-1]$ muni du crochet nul n'est pas une dg-algèbre de Lie libre, et nous reviendrons sur cet exemple précis et fondamental par la suite.
4. **Dg-algèbres enveloppantes.** Une dg-algèbre sur k est la donnée d'un complexe B muni d'un morphisme de complexes $B \otimes_k B \longrightarrow B$ et d'un 0-cocycle $e \in Z^0(B)$ qui satisfont des axiomes d'associativité et d'unité évidents. Toute dg-algèbre B définit une dg-algèbre de Lie dont le complexe sous-jacent est encore B muni du crochet défini par $[x, y] := xy - (-1)^{|x|.|y|}yx$. Cette construction définit un foncteur depuis la catégorie des dg-algèbres vers celle des dg-algèbres de Lie. Ce foncteur possède un adjoint à gauche $U : \mathbf{dgLie}_k \longrightarrow \mathbf{dgalg}_k$ qui par définition envoie une dg-algèbre de Lie L sur sa dg-algèbre enveloppante $U(L)$.

Le foncteur d'oubli $\mathbf{dgLie}_k \longrightarrow \mathbf{dg}_k$ est monadique et en particulier cela implique que $\mathbf{dgLie}_k$ possède tout type de limites et colimites ([Lo-Va, §5.2.12]). De manière plus générale, ce foncteur d'oubli permet aussi de relever la structure de modèles standard sur $\mathbf{dg}_k$ pour laquelle les fibrations sont les épimorphismes de complexes et les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes. Nous dirons donc qu'un morphisme $f : L \longrightarrow L'$ dans $\mathbf{dgLie}_k$ est un quasi-isomorphisme si le morphisme induit $H^*(f) : H^*(L) \longrightarrow H^*(L')$ est bijectif. De même, f est une fibration si pour tout $i \in \mathbb{Z}$ l'application $f^i : L^i \longrightarrow (L')^i$ est surjective.

Le proposition suivante est bien connue (voir par exemple [Hi, §2.4] ou encore [Lu1, Prop. 2.1.10]).

Proposition 1.2. — *La catégorie $\mathbf{dgLie}_k$ est munie d'une structure de catégorie de modèles pour laquelle les fibrations et les équivalences faibles sont définies ci-dessus.*

L'importance de ce résultat est un contrôle de la catégorie homotopique des dg-algèbres de Lie $Ho(\mathbf{dgLie}_k)$. Rappelons que la catégorie $Ho(\mathbf{dgLie}_k)$ est définie comme étant la localisée de Gabriel-Zisman de la catégorie $\mathbf{dgLie}_k$ le long des quasi-isomorphismes. Il s'agit donc d'une catégorie munie d'un foncteur $\mathbf{dgLie}_k \longrightarrow Ho(\mathbf{dgLie}_k)$ qui envoie les quasi-isomorphismes sur des isomorphismes et qui est universelle pour cette propriété. En général, de telles catégories obtenues par localisation ne sont pas descriptibles de manière pertinente autre que leur propriété universelle. L'intérêt des structures de modèles est précisément d'apporter une description intéressante des ensembles de morphismes dans les catégories localisées en termes de classes d'homotopie de morphismes. La théorie générale se trouve par exemple dans [Ho], et en ce qui nous concerne elle se décline dans les faits suivants.

1. **Objets cellulaires.** Parmis les dg-algèbres de Lie on distingue la classe des *objets cellulaires*. Il s'agit des dg-algèbres de Lie L qui s'écrivent comme réunion de sous-dg-algèbres de Lie
$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n \subset L_{n+1} \subset \cdots \cup L_i = L$$
telles que chaque inclusion $L_n \hookrightarrow L_{n+1}$ soit un push-out de la forme
$$\begin{tikzcd} L_n \arrow[r] & L_{n+1} \\ \coprod_\alpha \mathrm{Lie}(k[n_\alpha]) \arrow[u] \arrow[r] & \coprod_\alpha \mathrm{Lie}(k\langle n_\alpha\rangle). \arrow[u] \end{tikzcd}$$
Ici, $n_\alpha \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{Lie}(k[n_\alpha])$ est la dg-algèbre de Lie libre sur $k[n_\alpha]$. De même, $k\langle n_\alpha\rangle$ désigne le complexe acylique $0 \ldots \longrightarrow k \xrightarrow{id} k \longrightarrow 0 \ldots$ concentré en degrés $-n_\alpha - 1$ et $-n_\alpha$, et $\mathrm{Lie}(k\langle n_\alpha\rangle)$ est la dg-algèbre de Lie libre correspondante. En d'autres termes, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on dispose d'une famille de cocycles $z_\alpha \in Z^{-n_\alpha}(L_n)$ de degré $-n_\alpha$, et L_{n+1} est obtenue à partir de L_n en rajoutant des générateurs y_α en degré $-n_\alpha - 1$ vérifiant $d(y_\alpha) = x_\alpha$. On dit aussi que L_{n+1} est obtenue à partir de L_n par rajout de cellules de dimension $n_\alpha + 1$.

Les dg-algèbres de Lie cellulaires jouent un rôle analogue à celui des complexes CW dans le cadre de la théorie de l'homotopie des espaces topologiques. On montre que les objets cofibrants pour la structure de modèles sur $\mathbf{dgLie}_k$ sont exactement les rétractes d'objets cellulaires. Par ailleurs, toute dg-algèbre de Lie L possède un remplacement cellulaire $p : QL \xrightarrow{\sim} L$. Par définition cela signifie que QL est cellulaire et que p est un quasi-isomorphisme surjectif. On peut de plus choisir QL et p de manière fonctorielle grâce à l'argument du petit objet (voir [Ho, §2] ainsi que [Lu1, §1.4]).

2. **Espaces de morphismes.** Pour deux morphismes $f, g : L \longrightarrow L'$ dans $\mathbf{dgLie}_k$, une homotopie naïve de f vers g est la donnée d'un diagramme commutatif comme suit

$$\begin{tikzcd} & L' \\ L \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g"'] & L' \otimes_k C^*(\mathbb{A}^1_k) \arrow[u, "i_0^*"'] \arrow[d, "i_{1*}"] \\ & L. \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, $C^*(\mathbb{A}^1)$ désigne la dg-algèbre (commutative) de cohomologie de de Rham algébrique de la droite affine $\mathbb{A}^1_k$ au-dessus de k. En termes plus explicites $C^*(\mathbb{A}^1)$ est le complexe (concentré en degré 0 et 1) $k[T] \xrightarrow{dR} k[T].dT$, où dR envoie un polynôme $P(T)$ sur sa différentielle $P'(T).dT$. Le produit tensoriel d'une dg-algèbre de Lie L' par une dg-algèbre commutative A est encore, de manière canonique, une dg-algèbre de Lie $L' \otimes_k A$, pour le crochet donné par

$$[x \otimes a, y \otimes b] := (-1)^{|a|.|y|}[x, y] \otimes ab.$$

Ainsi $L' \otimes C^*(\mathbb{A}^1_k)$ est une dg-algèbre de Lie. Enfin, les deux morphismes verticaux de droite sont induits par les deux k-points 0 et 1 de la droite $\mathbb{A}^1_k$ qui induisent des augmentations sur les dg-algèbres de de Rham $i_0^*, i_1^* : C^*(\mathbb{A}^1_k) \longrightarrow C^*(\operatorname{Spec} k) = k$.

Cette notion d'homotopie se généralise en un ensemble simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}^{\Delta}(L, L')$ de morphismes entre L et L', dont les 0-simplexes sont les morphismes de dg-algèbres de Lie et les 1-simplexes les homotopies h comme ci-dessus. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathbf{\Delta}^n$ la sous-variété de $\mathbb{A}^{n+1}$ d'équation $\sum x_i = 1$, que nous appellerons le simplexe algébrique de dimension n. La famille de variétés $n \mapsto \mathbf{\Delta}^n$ s'organise en un objet cosimplicial de la catégorie des variétés algébriques sur k, pour laquelle les cofaces et codégénérescences sont induites par les inclusions d'hyperplans de coordonnées $\mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{A}^{n+1}$ ainsi que les morphismes $\mathbb{A}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{A}^n$ qui somment deux des coordonnées consécutives. En d'autres termes, pour une application croissante $u : \{0, \ldots, n\} \longrightarrow \{0, \ldots, m\}$ on définit $u : \mathbf{\Delta}^n \longrightarrow \mathbf{\Delta}^m$ en envoyant un point $(x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1}$ vérifiant $\sum x_i = 1$ sur $(y_0, \ldots, y_m) \in k^{m+1}$ où $y_j := \sum_{i \in u^{-1}(j)} x_i$. L'ensemble simplicial des morphismes entre L et L' est alors défini comme

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{\Delta}(L, L') : [n] \mapsto \mathrm{Hom}(L, L' \otimes_k C^*(\boldsymbol{\Delta}^n)),$$

où C^* désigne comme ci-dessus la dg-algèbre de de Rham. Nous nous intéresserons principalement à la version dérivée de cette construction, à savoir

$$\mathbf{Map}(L, L') := \underline{\mathrm{Hom}}^{\Delta}(QL, L'),$$

où QL est un remplacement cofibrant de L. L'ensemble simplicial $\mathbf{Map}(L, L')$ n'est alors bien défini qu'au choix de Q près. Cependant, il est bien déterminé à équivalence faible près et fournit un foncteur

$$\mathbf{Map} : \mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k)^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathrm{SEns}).$$

3. **Catégorie homotopique.** La catégorie homotopique $\mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k)$, définie abstraitement par localisation de $\mathbf{dgLie}_k$ le long des quasi-isomorphismes, se décrit alors de la manière suivante. Soit $\mathbf{dgLie}_k^{\mathrm{cel}}$ la sous-catégorie pleine formée des dg-algèbres de Lie cellulaires. On dispose d'un foncteur naturel $\mathbf{dgLie}_k^{cel} \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k)$, déduit de l'inclusion $\mathbf{dgLie}_k^{\mathrm{cel}} \subset \mathbf{dgLie}_k$ suivie du foncteur de localisation. Ce foncteur est essentiellement surjectif, et de plus pour deux dg-algèbres de Lie cellulaires L et L' il induit une bijection

$$\pi_0(\mathbf{Map}(L, L')) \simeq [L, L'] := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k)}(L, L').$$

En d'autres termes, l'inclusion naturelle induit une équivalence entre $\mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k)$ et la catégorie des dg-algèbres cellulaires et classes d'homotopie de morphismes entre elles.

Remarque 1.3. — La description ci-dessus de la catégorie homotopique des dg-algèbres de Lie se promeut en un énoncé bien plus fort au niveau des ∞-catégories (voir [Lu2] et [To, §2.1]). On montre en effet que la catégorie simplicialement enrichie $\mathbf{dgLie}_k^{\mathrm{cel}}$ formée des dg-algèbres de Lie cellulaires et des espaces de morphismes $\underline{\mathrm{Hom}}^{\Delta}$, vue comme ∞-catégorie, est naturellement équivalente à la ∞-catégorie $L(\mathbf{dgLie}_k)$ obtenue à partir de $\mathbf{dgLie}_k$ par localisation le long des quasi-isomorphismes (voir [Lu1, Def. 2.1.14] et [To, §2.1]). De manière équivalente, pour toute ∞-catégorie $\mathcal{C}$, les deux ∞-catégories ci-dessous sont naturellement équivalentes :

1. la ∞-catégorie des ∞-foncteurs $L(\mathbf{dgLie}_k) \longrightarrow \mathcal{C}$
2. la ∞-catégorie des ∞-foncteurs $\mathbf{dgLie}_k \longrightarrow \mathcal{C}$ envoyant les quasi-isomorphismes sur des équivalences dans $\mathcal{C}$.

Cette remarque de nature ∞-catégorique n'est pas nécessaire pour la suite, mais elle éclaire de nombreuses constructions.

Pour terminer ce premier paragraphe voici deux exemples élémentaires de calcul d'ensembles de morphismes dans $\mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k)$ que nous pensons particulièrement éclairants.

Dg-algèbres de Lie discrètes. On considère k comme une dg-algèbre de Lie pour le crochet nul. C'est une dg-algèbre de Lie libre et donc cellulaire. Ainsi, les morphismes $[k,k]$ dans $\mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k)$ sont donnés par les composantes connexes de l'ensemble simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}^{\Delta}(k,k)$. Il est facile de voir que cet ensemble simplicial est constant isomorphe à l'ensemble des morphismes $k \longrightarrow k$. Ainsi, on trouve $[k,k] \simeq k$. De manière plus générale on peut voir que pour deux algèbres de Lie g et h, considérées comme dg-algèbres de Lie discrètes, on a $[g,h] \simeq \mathrm{Hom}(g,h)$, l'ensemble des morphismes d'algèbres de Lie. Plus précisément on peut voir que $\mathbf{Map}(g,h)$ est homotopiquement discret et équivalent à l'ensemble $\mathrm{Hom}(g,h)$ des morphismes d'algèbres de Lie.

Endomorphismes de $k[-1]$. Considérons maintenant $k[-1]$ muni du crochet nul. Cette dg-algèbre de Lie n'est plus libre et une approximation cellulaire est explicitement donnée de la manière suivante. On considère l'algèbre de Lie graduée libre sur un nombre dénombrable de générateurs $x_1, x_2, \dots x_n, \dots$ tous de degré 1. On munit cette algèbre de Lie graduée libre d'une différentielle en posant

$$d(x_1) = 0 \qquad d(x_n) + \frac{1}{2}.\sum_{i+j=n} [x_i, x_j] = 0.$$

Notons L cette dg-algèbre de Lie. Elle est cellulaire, en l'écrivant comme réunion des sous-dg-algèbres de Lie L_n engendrées par les x_i pour $i \leq n$. En effet L_{n+1} est obtenue à partir de L_n en lui rajoutant une cellule de dimension 1 à savoir x_{n+1}. On dispose d'un morphisme naturel de dg-algèbres de Lie $\pi : L \longrightarrow k[-1]$, qui envoie x_1 sur le générateur $1 \in k$ et tous les x_i sur 0 pour $i > 1$. On peut montrer que le morphisme π est un quasi-isomorphisme (c'est par exemple un corollaire de [Hi, Prop. 3.3.2 (2)] pour $g = k[-1]$), et L se trouve donc être un remplacement cellulaire (et donc cofibrant) de $k[-1]$. Ainsi, $[k[-1], k[-1]]$ peut se calculer comme l'ensemble des composantes connexes de $\underline{\mathrm{Hom}}^{\Delta}(L, k[-1])$. Les 0-simplexes de cet ensemble simplicial sont en bijection avec $Tk[[T]]$, les séries formelles sans termes constants, bijection réalisée en associant à un morphisme $u : L \longrightarrow k[-1]$ la série $\sum_{i>0} u(x_i).T^i$. On voit sans mal que l'ensemble simplicial $\underline{\mathrm{Hom}}^{\Delta}(L, k[-1])$ est constant. On trouve ainsi que $\mathbf{Map}(k[-1], k[-1])$ est un ensemble simplicial homotopiquement discret et

$$[k[-1], k[-1]] \simeq \pi_0(\mathbf{Map}(k[-1], k[-1])) \simeq Tk[[T]].$$

Comme nous le verrons, $k[-1]$ correspond au problème de modules formel représenté par la droite formelle $\widehat{\mathbb{A}}^1_k$. Ainsi, $[k[-1], k[-1]] \simeq Tk[[T]]$ exprime que les endomorphismes du schéma formel $\widehat{\mathbb{A}}^1_k$ qui préservent l'origine sont en bijection avec les séries formelles sans terme constant.

1.2. Complexe de Chevalley

Soit L une dg-algèbre de Lie (sur k). On lui associe un complexe de Chevalley $C^*(L)$ qui calcule la cohomologie de L à coefficients dans le L-module k. Il est possible de voir $C^*(L)$ de plusieurs manières différentes et nous présentons ici deux objets $C^*(L)$

et $\widehat{C}^*(L)$ associés à L. Le complexe de Chevalley à proprement parler est $\widehat{C}^*(L)$, et nous le définirons comme le complexe total associé à un complexe gradué mixte $C^*(L)$ qui lui en est un raffinement.

Pour toute dg-algèbre de Lie L on dispose d'une notion de L-dg-modules. Il s'agit de paires (E, u), formée d'un complexe E sur k et d'un morphisme de complexes $u : L \otimes_k E \longrightarrow E$ tel que

$$u([x, y] \otimes e) = u(x \otimes u(y \otimes e)) - (-1)^{|x||y|} u(y \otimes u(x \otimes e)),$$

pour tous e dans E et x, y dans L. Cette condition est équivalente au fait que le morphisme adjoint de u, $L \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(E, E)$, soit un morphisme de dg-algèbres de Lie où le crochet du membre de droite est le commutateur gradué $[f, g] := fg - (-1)^{|f||g|} gf$. Les L-dg-modules forment da manière évidente une catégorie notée $L - \mathbf{dgmod}$. Cette catégorie est de plus munie d'une structure monoïdale symétrique $\otimes_k$ définie de la manière suivante. Pour deux L-dg-modules (E, u) et (E', u'), on considère une structure de L-dg-module sur $E \otimes_k E'$ en posant $v : L \otimes_k (E \otimes_k E') \longrightarrow E \otimes_k E'$

$$v(x \otimes e \otimes e') := u(x \otimes e) \otimes e' + (-1)^{|e||x|} e \otimes u'(x \otimes e').$$

Soit $k[-1]$ la dg-algèbre de Lie abélienne de valeur k en degré 1. La catégorie des $k[-1]$-dg-modules sera appelée la catégorie des *complexes mixtes* (sur k). De manière explicite un complexe mixte est la donnée d'une paire (E, ϵ), avec E un complexe sur k et $\epsilon : E \longrightarrow E[1]$ un morphisme de complexes tel que $\epsilon^2 = 0$. On voit souvent ϵ comme une nouvelle différentielle sur l'espace gradué E, compatible avec la différentielle cohomologique au sens où $d\epsilon + \epsilon d = 0$. La catégorie des complexes mixtes est munie d'une structure monoïdale symétrique $\otimes_k$, qui consiste, pour deux objets (E, ϵ) et (E', ϵ'), à effectuer le produit tensoriel des complexes $E \otimes_k E'$ et le munir de la structure mixte $e \otimes e' \mapsto \epsilon(e) \otimes e' + (-1)^{|e|} e \otimes \epsilon'(e')$. On dispose donc d'une notion de *dg-algèbres commutatives mixtes*, qui par définition sont des monoïdes commutatifs et unitaires dans la catégorie monoïdale symétrique des complexes mixtes sur k. De manière explicite une dg-algèbre commutative mixte est la donnée d'une dg-algèbre commutative A sur k, dont le complexe sous-jacent est muni d'une structure mixte ϵ qui est de plus compatible à la multiplication au sens où $\epsilon(ab) = \epsilon(a)b + (-1)^{|a|} a\epsilon(b)$.

La notion de complexes mixtes se raffine en la notion de *complexes gradués mixtes*. Il s'agit de complexes mixtes (E, ϵ) munis d'une $\mathbb{Z}$-graduation sur E de sorte que ϵ soit homogène pour cette graduation et l'augmente d'une unité. En clair, les complexes gradués mixtes sont des familles de complexes $E = \{E(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ munies de morphismes de complexes

$$\epsilon : E(n) \longrightarrow E(n + 1)[1]$$

tels que $\epsilon^2 = 0$. La catégorie des complexes mixtes gradués sera notée $\mathbf{dgmod}_k^{\epsilon, gr}$. Comme celle des complexes mixtes, elle possède une structure monoïdale $\otimes_k$ en posant $(E \otimes_k E')(n) = \oplus_{i+j=n} E(i) \otimes_k E(j)$, et avec les mêmes formules pour la structure mixte induite. On dispose ainsi d'une notion de dg-algèbre commutative graduée mixte définie comme étant les monoïdes commutatifs dans $\mathbf{dgmod}_k^{\epsilon,gr}$.

Soit maintenant L une dg-algèbre de Lie. On note $E^\vee := \underline{\mathrm{Hom}}_k(E,k)$ le complexe dual d'un complexe E et on pose

$$C^*(L) := \mathrm{Sym}_k(L[1])^\vee \simeq \bigoplus_i (\wedge_k^i L)^\vee[-i],$$

le dual de la dg-algèbre commutative libre sur $L[1]$. Le complexe $C^*(L)$ sera vu comme un complexe gradué avec $C^*(L)(i) = (\wedge_k^i L)^\vee[-i]$. On dispose alors d'une structure mixte ϵ sur $C^*(L)$ vérifiant les deux propriétés suivantes.

1. La structure mixte ϵ est compatible avec la structure multiplicative et la graduation et fait de $C^*(L)$ une dg-algèbre commutative graduée mixte.
2. La structure mixte $\epsilon : C^*(L) \longrightarrow C^*(L)[1]$ restreinte à la composante $L^\vee[-1] = C^*(L)(1)$ est égale au (décalé du) dual du crochet de Lie

$$\epsilon = [-,-]^\vee : L^\vee[-1] \longrightarrow (L \wedge L)^\vee[-1].$$

Le lecteur trouvera aussi des formules explicites pour ϵ dans [Lu1, Rem. 2.2.4].

Définition 1.4. — *Le* complexe gradué mixte de Chevalley de L *est la dg-algèbre commutative graduée mixte* $(C^*(L),\epsilon)$ *définie ci-dessus.*

L'objet mixte $(C^*(L),\epsilon)$ est un objet de nature intermédiaire, mais qui possède un certain intérêt. Pour terminer cette partie sur les complexes de Chevalley nous introduisons le foncteur de totalisation

$$|-| : \mathbf{dgmod}_k^{\epsilon,gr} \longrightarrow \mathbf{dgmod}_k,$$

des complexes gradués mixtes vers les complexes. Il s'agit d'une version du complexe total qui est complété en utilisant la graduation. Pour un complexe gradué mixte $(\{E(n)\}_n,\epsilon)$ on pose

$$|E| := \prod_{n\geq 0} E(n).$$

On munit $|E|$ de la différentielle D somme des différentielles cohomologiques $d(n)$ des $E(n)$ et de ϵ. En clair, pour une famille $x := \{x_n \in E(n)^i\}_{n\geq 0}$ d'éléments de degré i, la n-ième composante de $D(x) = \{D(x)_n \in E(n)^{i+1}\}_{n\geq 0}$ est donnée par $D(x)_n := d(n)(x_n) + \epsilon(x_{n-1})$ avec comme convention $x_n = 0$ si $n < 0$. Cela définit un foncteur

$$|-| : \mathbf{dgmod}_k^{\epsilon,gr} \longrightarrow \mathbf{dgmod}_k$$

qui est de manière naturelle un foncteur lax monoïdal symétrique : il existe pour E et E' deux objets de $\mathbf{dgmod}_k^{\epsilon,gr}$ un morphisme naturel $|E| \otimes_k |E'| \longrightarrow |E \otimes_k E'|$ qui est unitaire associatif et commutatif. En particulier, $|-|$ se promeut en un foncteur des dg-algèbres commutatives graduées mixtes vers les dg-algèbres commutatives.

Définition 1.5. — *Soit L une dg-algèbre de Lie. Le* complexe de Chevalley de L (complété) *est la dg-algèbre commutative*

$$\widehat{C}^*(L) := |C^*(L)|,$$

où $C^*(L)$ est la dg-algèbre commutative graduée mixte de la définition 1.4.

De manière plus explicite, $\widehat{C}^*(L)$ est $\widehat{Sym}_k(L[1])^\vee = \prod_{n\geq 0}(\wedge_k^n L)^\vee[-n]$, muni d'une différentielle somme de la différentielle cohomologique déduite de celle de L, et de la structure mixte ϵ induite par le crochet de Lie sur L. Le lemme suivant donne une interprétation de $\widehat{C}^*(L)$ en termes de la catégorie des L-dg-modules.

Lemme 1.6. — *Soit L une dg-algèbre de Lie et soit k considéré comme L-dg-module avec l'action triviale. Alors, on a un isomorphisme naturel dans $D(k)$*

$$\mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{L-\mathbf{dgmod}}(k,k) \simeq \widehat{C}^*(L),$$

où $\mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{L-\mathbf{dgmod}} \in D(k)$ désigne le complexe des endomorphismes dérivés de k comme L-dg-module. En particulier, on a des isomorphismes naturels $\mathrm{Ext}^i_{L-\mathbf{dgmod}}(k,k) \simeq H^i(\widehat{C}^*(L))$.

Preuve — Le complexe $\mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{L-\mathbf{dgmod}}(k,k)$ se calcule par $\underline{\mathrm{Hom}}_{L-\mathbf{dgmod}}(Qk,k)$, où Qk est un modèle cofibrant de k comme L-dg-module. Il s'agit donc d'identifier un modèle cofibrant de k explicite de sorte que le complexe $\underline{\mathrm{Hom}}_{L-\mathbf{dgmod}}(Qk,k)$ soit naturellement isomorphe à $\widehat{C}^*(L)$. Ce modèle cofibrant est la dg-algèbre enveloppante $U(Cn(L))$, où $Cn(L)$ est la dg-algèbre de Lie définie comme le cône de l'identité de g (voir [Lu1, 2.2.1]). □

Par construction on dispose d'un foncteur $\widehat{C}^* : \mathbf{dgLie}_k^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{cdga}_k$, de la catégorie opposée à celle des dg-algèbres de Lie vers celle des dg-algèbres commutatives. De plus, on dispose toujours d'une augmentation naturelle $\widehat{C}^*(L) \longrightarrow k$, et le foncteur ci-dessus s'écrit $\widehat{C}^* : \mathbf{dgLie}_k^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{cdga}_k^*$, où l'on note $\mathbf{cdga}_k^* = \mathbf{cdga}_k/k$. Ce foncteur envoie les quasi-isomorphismes de dg-algèbres de Lie sur des quasi-isomorphismes de dg-algèbres commutatives. Il induit donc un foncteur sur les catégories homotopiques $\mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathbf{cdga}_k^*)$ obtenues après inversion des quasi-isomorphismes. De manière plus fine, il induit un ∞-foncteur $\widehat{C}^* : L(\mathbf{dgLie}_k)^{\mathrm{op}} \longrightarrow L(\mathbf{cdga}_k^*)$, sur les ∞-catégories obtenues par localisation le long des quasi-isomorphismes (voir Rem. 1.3). Ce foncteur n'est pas une équivalence mais, comme nous le verrons, se restreint en une équivalence sur des sous-catégories convenables. Par ailleurs, $\widehat{C}^*$ n'est pas un foncteur de Quillen pour les structures de modèles standards sur $\mathbf{dgLie}_k$ et $\mathbf{cdga}_k^*$, car il ne possède même pas d'adjoint (e.g. le foncteur $\widehat{C}^*$ n'envoie pas les sommes de dg-algèbres de Lie sur des produits de dg-algèbres augmentées comme on peut le vérifier avec deux copies de k). Cependant, on peut tout de même montrer que le ∞-foncteur $\widehat{C}^*$ possède un ∞-foncteur adjoint $\mathcal{D} : L(\mathbf{cdga}_k^*) \longrightarrow L(\mathbf{dgLie}_k)^{\mathrm{op}}$. L'existence de $\mathcal{D}$ est une conséquence formelle de la version ∞-catégorique du théorème de Freyd d'existence d'adjoints (voir [Lu1, Prop. 2.2.17] et [Lu2, Cor. 5.5.2.9]). On le voit ici, l'approche ∞-catégorique permet de considérer le ∞-foncteur adjoint $\mathcal{D}$ sans pour autant que le foncteur $\widehat{C}^*$ possède un adjoint au niveau des catégories $\mathbf{dgLie}_k$ et $\mathbf{cdga}_k^*$ avant localisation par les quasi-isomorphismes.

Pour finir cette section voici deux exemples de comportement du foncteur $\widehat{C}^*(L)$, et particulièrement du fait qu'il ne soit pas pleinement fidèle, pour les dg-algèbres de Lie discrètes et pour notre exemple fondamental $k[-1]$.

1. **Algèbres de Lie discrètes.** Soit g une algèbre de Lie considérée comme une dg-algèbre de Lie discrète. Le complexe $\widehat{C}^*(g)$ est le complexe de Chevalley usuel de [Ch-Ei]. Lorsque g est l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique réductif et géométriquement connexe sur k, $H^*(\widehat{C}^*(g))$ est naturellement isomorphe à $H^*_{dR}(G)$, la cohomologie de de Rham algébrique de la variété algébrique sous-jacente à G (voir [Ch-Ei, Thm. 15.2]). Ainsi, pour $g = sl_2$, $H^i(\widehat{C}^*(sl_2)) \simeq 0$ pour $i \neq 3$ et $H^3(\widehat{C}^*(sl_2)) \simeq k$, et $\widehat{C}^*(sl_2)$ est alors (quasi-isomorphe à) la dg-algèbre commutative libre sur un cocycle en degré 3. On trouve que le groupe des automorphismes de $\widehat{C}^*(sl_2)$ comme objet de $Ho(\mathbf{cdga}_k)$ est isomorphe au groupe k^*, qui opère sur $\widehat{C}^*(sl_2)$ par homothétie sur le générateur du H^3. En revanche, l'algèbre de Lie sl_2 possède de nombreux automorphismes, à savoir le groupe $SL_2(k)$ pour l'action adjointe. Cet exemple montre que le foncteur $\widehat{C}^*$ est loin d'être pleinement fidèle.
2. **Le cas de $k[-1]$.** Un autre exemple de comportement du foncteur $\widehat{C}^*$ est obtenu en considérant la dg-algèbre de Lie $k[-1]$. Le complexe de Chevalley $\widehat{C}^*(k[-1])$ est ici $k[[T]]$, la k-algèbre des séries formelles. Les endomorphismes de $k[[T]]$ dans $Ho(\mathbf{cdga}_k^*)$ sont donc les endomorphismes de $k[[T]]$ comme k-algèbre augmentée, alors que nous avons déjà vu que les endomorphismes de $k[-1]$ comme objet de $Ho(\mathbf{dgLie}_k)$ sont en bijection avec $Tk[[T]]$, les séries formelles sans terme constant. L'application induite par $\widehat{C}^*$ est l'inclusion naturelle de $Tk[[T]]$ dans $End_{k-alg^*}(k[[T]])$, qui à une série formelle $P(T) \in Tk[[T]]$ associe l'endomorphisme continu de $k[[T]]$ qui envoie T sur $P(T)$. On voit ici que les endomorphismes de $k[-1]$ ne produisent que des endomorphismes continus de $k[[T]]$. De manière générale, un des défauts de pleine fidèlité de $\widehat{C}^*$ vient du fait que les dg-algèbres de Chevalley sont naturellement des limites compliquées de dg-algèbres qui les munissent d'une structure additionnelle que les seules dg-algèbres sous-jacentes « ne voient pas » (e.g. la structure naturelle de pro-objet sur $k[[T]]$ dans l'exemple présent).

Pour conclure cette première section, nous avons construit un foncteur

$$\widehat{C}^* : \mathbf{dgLie}_k^{op} \longrightarrow \mathbf{cdga}_k^*.$$

Ce foncteur est le point de départ du lien entre théorie des déformations et dg-algèbres de Lie. Cependant, comme nous venons de le voir, il n'induit pas une équivalence de catégorie, y compris après avoir localisé le long des quasi-isomorphismes. Il s'agit maintenant de modifier la catégorie $\mathbf{cdga}_k^*$, en la remplaçant par celle des *problèmes de modules formels*, afin que le foncteur $\widehat{C}^*$ devienne une équivalence.

2. PROBLÈMES DE MODULES FORMELS

Tout au long de cette section nous notons $\mathbf{cdga}_k$ la catégorie des dg-algèbres commutatives sur k. Rappelons que ses objets sont les complexes A sur k munis d'un morphisme de complexes (multiplication) $A \otimes_k A \longrightarrow A$ et d'un 0-cocycle $1 \in Z^0(A)$ (unité) tels que l'on ait

$$a(bc) = (ab)c \qquad ab = (-1)^{|a|.|b|}ba \qquad a.1 = 1.a = a,$$

pour tous a, b et c dans A avec $|x| = \deg(x)$.

Tout comme pour le cas des dg-algèbres de Lie, la catégorie $\mathbf{cdga}_k$ possède une structure de modèles pour laquelle les équivalences sont les quasi-isomorphismes et les fibrations sont les épimorphismes de complexes. On dispose aussi d'ensembles simpliciaux de morphismes $\underline{\mathrm{Hom}}^{\Delta}$ dont l'ensemble des n-simplexes est défini comme pour le cas des dg-algèbres de Lie $\underline{\mathrm{Hom}}^{\Delta}(A, B)_n := \mathrm{Hom}(A, B \otimes_k C^*(\boldsymbol{\Delta}^n))$. On a ainsi des foncteurs $\mathbf{Map} : \mathrm{Ho}(\mathbf{cdga}_k^{\mathrm{op}}) \times Ho(\mathbf{cdga}_k) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathbf{cdga}_k)$ par $\mathbf{Map}(A, B) := \underline{\mathrm{Hom}}^{\Delta}(QA, B)$ où QA est un modèle cofibrant de A.

2.1. Définitions et exemples

On pose $\mathbf{cdga}_k^* := \mathbf{cdga}_k/k$ la catégorie des dg-algèbres commutatives (sur k) et augmentées sur k. On isole dans $\mathbf{cdga}_k^*$ une sous-catégorie d'objets *artiniens* définie comme suit.

DÉFINITION 2.1. — *Une dg-algèbre commutative augmentée $A \in \mathbf{cdga}_k^*$ est* artinienne *si les trois conditions suivantes sont vérifiées.*

1. *On a $\pi_i(A) \simeq 0$ pour $i < 0$ et pour i assez grand.*
2. *La k-algèbre $\pi_0(A)$ est locale artinienne.*
3. *Pour tout i le k-espace vectoriel $\pi_i(A)$ est de dimension finie sur k.*

La sous-catégorie pleine de $\mathbf{cdga}_k^*$ formée des dg-algèbres commutatives artiniennes est notée $\mathbf{dgArt}_k^*$.

Remarque 2.2. — Attention, la sous-catégorie pleine $\mathbf{dgArt}_k^*$ de $\mathbf{cdga}_k^*$ ne possède pas de structure de modèles induite car elle ne possède par exemple pas de limites ou de colimites. Nous contrôlerons cependant la théorie de l'homotopie de $\mathbf{dgArt}_k^*$ en utilisant la théorie homotopique ambiante associée à $\mathbf{cdga}_k^*$. D'un point de vue ∞-catégorique cela signifie que la ∞-catégorie $L(\mathbf{dgArt}_k^*)$ sera vue comme une sous-∞-catégorie pleine de $L(\mathbf{cdga}_k^*)$.

Toute dg-algèbre commutative A telle que $\pi_i(A) \simeq 0$ pour $i < 0$ possède une décomposition de Postnikov (voir [To-Ve, Lem. 2.2.1.1]). Il s'agit d'une tour de fibrations dans $\mathbf{cdga}_k$

$$A \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_{\leq n+1} \longrightarrow A_{\leq n} \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_{\leq 1} \longrightarrow A_{\leq 0} = \pi_0(A)$$

qui vérifie les conditions suivantes. On a $\pi_i(A_{\leq n}) \simeq 0$ pour tout n et tout $i > n$. De plus, chaque morphisme $A_{\leq n+1} \longrightarrow A_{\leq n}$ induit des isomorphismes $\pi_i(A_{\leq n+1}) \simeq \pi_i(A_{\leq n})$ pour $i \leq n$. On montre qu'une telle tour existe et est unique à quasi-isomorphismes près. De plus, le morphisme naturel $A \longrightarrow \lim_n A_{\leq n}$ est toujours un quasi-isomorphisme (et de plus le membre de droite est aussi une limite homotopique).

Dans le cas plus spécifique où $A \in \mathbf{dgArt}_k^*$ on voit que $A \simeq A_{\leq m}$ pour m assez grand. On dispose ainsi d'une décomposition de A comme suite de fibrations successives

$$A_{\leq n+1} \longrightarrow A_{\leq n}$$

dont les noyaux K_{n+1} sont tels que $\pi_i(K_{n+1}) \simeq 0$ si $i \neq n+1$ et $\pi_{n+1}(K_{n+1}) \simeq \pi_{n+1}(A)$. Dans une telle situation on dit que $A_{\leq n+1}$ est obtenue à partir de $A_{\leq n}$ par une extension de carré nul par $\pi_{n+1}(A)[n+1]$ (voir plus loin pour plus de détails sur cette notion). On voit ainsi que les dg-algèbres de $\mathbf{dgArt}_k^*$ sont artiniennes en un sens relativement clair : elles sont obtenues, à quasi-isomorphisme près, comme extensions de carré nul successives à partir de la k-algèbre unité k.

Nous arrivons à la définition centrale de cet exposé, à savoir celle des problèmes de modules formels. Pour cela, nous commençons par isoler une classe de carrés commutatifs dans $\mathbf{dgArt}_k^*$. Nous dirons qu'un diagramme commutatif dans $\mathbf{dgArt}_k^*$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

est *distingué* s'il vérifie les deux conditions suivantes.

1. Le carré est homotopiquement cartésien dans $\mathbf{cdga}_k$.
2. Chacun des morphismes induits $\pi_0(B) \longrightarrow \pi_0(A)$ et $\pi_0(C) \longrightarrow \pi_0(A)$ est surjectif.

La condition (1) ci-dessus est équivalente au fait que le morphisme naturel de complexes $D \longrightarrow \mathrm{Cocone}(B \oplus C \longrightarrow A)$ est un quasi-isomorphisme.

DÉFINITION 2.3. — *Un* problème de modules formel *(sur k) est la donnée d'un foncteur*

$$F : \mathbf{dgArt}_k^* \longrightarrow \mathrm{SEns}$$

vérifiant les trois conditions suivantes.

1. *Le foncteur F envoie un quasi-isomorphisme de dg-algèbres commutatives sur une équivalence d'ensembles simpliciaux.*
2. *On a une équivalence $F(k) \simeq *$.*

3. *L'image par F de tout carré commutatif distingué dans $\mathbf{dgArt}_k^*$ est un carré homotopiquement cartésien d'ensembles simpliciaux.*

Les problèmes de modules formels s'organisent en une catégorie de la manière suivante. On dispose dans la catégorie des foncteurs $\mathrm{Fun}(\mathbf{dgArt}_k^*, \mathrm{SEns})$ d'une notion d'équivalence : il s'agit des morphismes $f : F \longrightarrow G$ tels que pour tout $A \in \mathbf{dgArt}_k^*$ le morphisme induit $F(A) \longrightarrow G(A)$ soit une équivalence d'ensembles simpliciaux. La catégorie localisée par rapport à cette notion d'équivalence sera notée $\mathcal{PMF}^{pr}$.

Définition 2.4. — 1. *La* catégorie des préproblèmes de modules formels *est $\mathcal{PMF}^{pr}$ définie ci-dessus.*

2. *La* catégorie des problèmes de modules formels *est la sous-catégorie pleine $\mathcal{PMF} \subset \mathcal{PMF}^{pr}$ formée des problèmes de modules formels au sens de la définition 2.3*

Nous verrons au paragraphe suivant plusieurs exemples de problèmes de modules formels d'origines variées. Contentons-nous pour l'instant des exemples élémentaires suivants.

1. **Construction par limites.** La sous-catégorie $\mathcal{PMF} \subset \mathcal{PMF}^{pr}$ est stable par limites homotopiques au sens suivant. Si I est une petite catégorie et $F : I \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathbf{dgArt}_k^*, \mathrm{SEns})$ un I-diagramme de foncteurs, et si pour tout $i \in I$ l'objet $F(i)$ est un problème de modules formel, alors la limite homotopique $\mathrm{holim}_i F(i) \in \mathrm{Fun}(\mathbf{dgArt}_k^*, \mathrm{SEns})$ est encore un objet de $\mathcal{PMF}$. Cela se déduit simplement du fait que les limites homotopiques commutent entre elles. Du point de vue des ∞-catégories, cela s'exprime par le fait que non seulement la ∞-catégorie $\mathcal{PMF}$ admet des limites mais aussi que l'inclusion $\mathcal{PMF} \hookrightarrow \mathcal{PMF}^{pr}$ commute avec celles-ci.

   Un cas particulier important est le laçage, qui à $F \in \mathcal{PMF}$ associe
   $$\Omega_* F := * \times_F * \in \mathcal{PMF}.$$
   Si l'on pense à F comme représentant un problème de déformations d'une certaine structure alors on doit penser à $\Omega_* F$ comme le problème de déformations des automorphismes de cette structure.

2. **Problèmes de modules formels associés.** On peut vérifier par des arguments abstraits que l'inclusion naturelle $\mathcal{PMF} \hookrightarrow \mathcal{PMF}^{pr}$ possède un adjoint à gauche $F \mapsto \widetilde{F}$ (il s'agit d'une localisation de Bousfield de la catégorie de modèles des foncteurs, voir [Lu2, §A.3.7]). Cet adjoint est appelé le *problème de modules formels associé*, en référence à la notion de *faisceau associé*. Il n'est pas facile à décrire de manière explicite mais s'avère très utile pour construire des problèmes de modules formels. Une des conséquences directes de son existence est le fait que la théorie homotopique des problèmes de modules formels possède des colimites homotopiques, ou en termes équivalents que la ∞-catégorie $\mathcal{PMF}$ est cocomplète.

En termes plus concrets, si $F : I \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathbf{dgArt}_k^*, \mathrm{SEns})$ est un I-diagramme avec $F(i) \in \mathcal{PMF}$ pour tout i, la colimite homotopique $\mathrm{colim}_i F(i) \in \mathcal{PMF}^{pr}$ n'est plus un problème de modules formel en général. Cependant, $\widetilde{\mathrm{colim}}_i F(i) \in \mathcal{PMF}$ est une colimite homotopique du diagramme F dans $\mathcal{PMF}$. Nous sommes donc dans une situation tout à fait similaire à celle des colimites de faisceaux, qui se calculent explicitement en prenant la colimite dans les préfaisceaux puis en appliquant le foncteur de faisceau associé.

3. **Objets (pro)représentables.** Soit $A \in \mathbf{cdga}_k$ une dg-algèbre commutative sur k munie d'une augmentation $A \longrightarrow k$. On définit un foncteur
$$\mathbf{Spf}\, A : \mathbf{dgArt}_k^* \longrightarrow \mathrm{SEns}$$
par $\mathbf{Spf}\, A(B) := \mathbf{Map}^*(A, B)$. Ici, $\mathbf{Map}^*$ désigne les espaces de morphismes dans la théorie homotopique $\mathbf{cdga}_k^*$ des dg-algèbres commutatives augmentées. Concrètement $\mathbf{Map}^*(A, B)$ est défini comme étant le produit fibré
$$\begin{tikzcd} \mathbf{Map}^*(A,B) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Map}(A,B) \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \mathbf{Map}(A,k), \end{tikzcd}$$
où le morphisme $* \longrightarrow \mathbf{Map}(A, k)$ correspond à l'augmentation $A \longrightarrow k$. Le foncteur $\mathbf{Spf}\, A$ est un problème de modules formel, et cela se déduit immédiatement du fait que $\mathbf{Map}^*(A, -)$ commute (à équivalence près) aux limites homotopiques quelconques. Les objets $\mathbf{Spf}\, A \in \mathcal{PMF}$ ne sont pas représentables à proprement parler, à moins que A soit elle-même artinienne.

La construction $\mathbf{Spf}$ s'étend aux pro-objets de $\mathbf{cdga}_k^*$ par continuité. Pour $A =$ « $\lim_i A_i$ » un tel pro-objet on pose $\mathbf{Spf}\, A := \mathrm{colim}_i\, \mathbf{Spf}\, A_i$, où la colimite est prise dans la catégorie des foncteurs de $\mathbf{dgArt}_k^*$ vers SEns. Comme les colimites filtrantes d'ensembles simpliciaux commutent, à équivalence près, avec les limites homotopiques finies, on voit que $\mathbf{Spf}\, A$ est encore un objet de $\mathcal{PMF}$.

Supposons que A soit une k-algèbre commutative de type finie, correspondant à un k-schéma $X = \mathrm{Spec}\, A$. Soit $A \to k$ un k-point x de X qui permet de voir A comme un objet de $\mathbf{cdga}_k^*$. On dipose alors d'un problème de modules formels $\mathbf{Spf}\, A \in \mathcal{PMF}$. On peut montrer que $\mathbf{Spf}\, A$ n'est autre que le complété formel $\hat{X}_x$ de X en x au sens suivant. Soit $\hat{A}$ le complété formel de A le long de l'idéal maximal correspondant à x, qui est de manière naturelle un pro-objet dans les k-algèbres locales artiniennes. On dispose alors d'une équivalence naturelle dans $\mathcal{PMF}$
$$\mathbf{Spf}\, A \simeq \mathbf{Spf}\, \widehat{A}.$$
De manière peut-être étonnante à première vue, l'existence d'une telle équivalence n'est pas une évidence et demande une preuve relativement élaborée (voir par exemple [Ga-Ro1, Prop. 6.8.2]). Il est facile de voir que les deux foncteurs

> **Spf** A et **Spf** $\widehat{A}$ deviennent naturellement équivalents après restriction à la sous-catégorie pleine $\mathbf{art}_k^*$ des k-algèbres artiniennes (non-dg), mais cela ne suffit pas pour les identifier. Il s'agit donc de montrer que la complétion formelle au sens usuel coïncide avec une version dérivée de la complétion formelle. Pour des schémas non noethériens ces deux notions ne coïncident à priori plus.

Terminons ce paragraphe par un exemple de problème de modules formels associé aux déformations de structures algébriques. Pour cela, fixons E un complexe de k-espaces vectoriels et $\mathcal{O}$ une dg-opérade sur k (voir [Lo-Va]). On définit un foncteur

$$\mathcal{O}(E) : \mathbf{dgArt}_k^* \longrightarrow \mathrm{SEns}_*$$

qui associe à $A \in \mathbf{dgArt}_k^*$ l'ensemble simplicial $\mathcal{O}(E)(A)$ défini par

$$\mathcal{O}(E)(A) := \mathbf{Map}_{\mathrm{Op}_k}(\mathcal{O}, \underline{\mathrm{End}}^{\otimes}(E) \otimes_k A).$$

Ici, Op_k est la catégorie des dg-opérades k-linéaires et $\underline{\mathrm{End}}^{\otimes}(E)$ désigne l'opérade des endomorphismes de E (dont le complexe des opérations n-aires est $\underline{\mathrm{Hom}}(E^{\otimes n}, E)$). Cette catégorie possède une structure de modèles pour laquelle les équivalences et les fibrations sont les quasi-isomorphismes et les épimorphismes respectivement. Les ensemble simpliciaux $\mathbf{Map}_{\mathrm{Op}_k}$ sont les espaces de morphismes dans Op_k relatifs à cette structure de modèles. En clair,

$$\mathcal{O}(E)(A) \sim \mathrm{Hom}_{\mathrm{Op}_k}(\widetilde{\mathcal{O}}, \underline{\mathrm{End}}^{\otimes}(E) \otimes_k A \otimes_k C^*(\mathbf{\Delta}^*)),$$

où $\widetilde{\mathcal{O}}$ est un modèle cofibrant pour $\mathcal{O}$.

L'ensemble simplicial $\mathcal{O}(E)(A)$ est un espace classifiant les structures de $\mathcal{O}$-algèbres sur $E \otimes_k A$, au sens où il existe une bijection naturelle entre $\pi_0(\mathcal{O}(E)(A))$ et l'ensemble des classes de quasi-isomorphismes de paires (B, u), où B est une $\mathcal{O} \otimes_k A$-algèbre et $u : B \sim E \otimes_k A$ un quasi-isomorphisme de A-dg-modules. Cependant, $\mathcal{O}(E)$ n'est pas un problème de modules formel, car $\mathcal{O}(E)(k)$ n'est pas contractile. Pour cela, on fixe $u : \mathcal{O} \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}^{\otimes}(E)$ une structure de $\mathcal{O}$-algèbre sur E, et on pose pour tout $A \in \mathbf{dgArt}_k^*$

$$\mathcal{O}^u(E)(A) := \mathrm{hofibre}\left(\mathcal{O}(E)(A) \longrightarrow \mathcal{O}(E)(k)\right),$$

où la fibre homotopique est prise au-dessus du point fixé u. Le foncteur $\mathcal{O}^u(E)$ est alors un problème de modules formel qui code les déformations de la structure de $\mathcal{O}$-algèbre u fixée sur E (on peut montrer que ce problème de modules formel est en fait de la forme **Spf** A, voir par exemple [Ya, Thm. 0.6]). En prenant $\mathcal{O} = \mathrm{Ass}$ l'opérade associative et E un espace vectoriel (considéré comme un complexe concentré en degré 0), on trouve pour toute structure d'algèbre u sur E, un problème de modules formel $Ass^u(E) \in \mathcal{PMF}$ qui contrôle les déformations formelles de E comme algèbre associative.

2.2. Classification des problèmes de modules formels

Nous arrivons à l'énoncé central de cet exposé, à savoir la construction d'une équivalence de catégories

$$X_{-} : \mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k) \rightleftharpoons \mathcal{PMF} : \ell_{-}$$

entre la catégorie homotopique des dg-algèbres de Lie sur k et celle des problèmes de modules formels. La construction des foncteurs X et ℓ va occuper une grande partie de cette section.

Soit V un complexe borné de k-espaces vectoriels de dimensions finies. Nous notons $\mathrm{Lie}(V)$ la dg-algèbre de Lie libre sur V. Nous noterons $\mathbf{dgLie}_k^0 \subset \mathbf{dgLie}_k$ la sous-catégorie pleine formée des dg-algèbres de Lie cofibrantes et quasi-isomorphes à des objets de la forme $\mathrm{Lie}(V)$, pour V concentré en degrés 2 et plus ($V_i = 0$ pour $i < 2$). De même, pour un complexe borné de dimension finie V et concentré en degrés 2 et plus, de complexe dual $V^\vee$, nous notons $k \oplus V^\vee[-1]$ la dg-algèbre commutative extension de carré nul de k par $V^\vee[-1]$. On dispose d'une augmentation canonique $k \oplus V^\vee[-1] \to k$. De part les choix des degrés de V, le complexe $V^\vee[-1]$ est concentré en degrés inférieurs à -1, et donc $k \oplus V^\vee[-1]$ est un objet de $\mathbf{dgArt}_k^*$.

Lemme 2.5. — *Pour tout complexe borné V de dimension fini et concentré en degrés 2 et plus, il existe un quasi-isomorphisme naturel dans $\mathbf{dgArt}_k^*$*

$$\widehat{C}^*(\mathrm{Lie}(V)) \simeq k \oplus V^\vee[-1].$$

Preuve — On dispose d'une inclusion naturelle de complexes $V \hookrightarrow \mathrm{Lie}(V)$, dont l'application duale est $\mathrm{Lie}(V)^\vee \longrightarrow V^\vee$. Par définition, l'algèbre graduée sous-jacente à $\widehat{C}^*(\mathrm{Lie}(V))$ (en oubliant sa différentielle) est $\mathrm{Sym}_k(\mathrm{Lie}(V)^\vee[-1])$ (où le Sym n'a pas besoin ici d'être complété par des considérations de degrés). Il existe un morphisme d'algèbres graduées

$$\widehat{C}^*(Lie(V)) \longrightarrow k \oplus V^\vee[-1],$$

obtenu en composant la projection

$$\mathrm{Sym}_k(\mathrm{Lie}(V)^\vee[-1]) \longrightarrow \mathrm{Sym}_k^{\leq 1}(\mathrm{Lie}(V)^\vee[-1]) = k \oplus \mathrm{Lie}(V)^\vee[-1]$$

avec la projection $\mathrm{Lie}(V)^\vee \longrightarrow V^\vee$. On vérifie que cela définit un morphisme de dg-algèbres commutatives augmentées $\pi : \widehat{C}^*(\mathrm{Lie}(V)) \longrightarrow k \oplus V^\vee[-1]$. La vérification que ce morphisme est bien un quasi-isomorphisme se déduit du lemme 1.6 et du fait que k possède un modèle cofibrant comme $Lie(V)$-dg-modules explicitement donné par le cône du morphisme de multiplication dans la dg-algèbre tensorielle $T^*(V)$ $T^*(V) \otimes_k V \longrightarrow T^*(V)$, ce qui implique que $\mathrm{Ext}^*_{\mathrm{Lie}(V)-\mathbf{dgmod}}(k,k) \simeq k \oplus \pi_*(V[-1])$. On vérifie alors que le morphisme π ci-dessus induit une bijection sur les groupes d'homotopie. $\square$

Le lemme 2.5 permet de conclure que le foncteur $\widehat{C}^*$ se restreint en un foncteur

$$\widehat{C}^* : \mathbf{dgLie}_k^0 \longrightarrow (\mathbf{dgArt}_k^*)^{\mathrm{op}}.$$

Cela nous donne un point de départ pour comparer les dg-algèbres de Lie et les problèmes de modules formels. Pour l'étendre à toutes les dg-algèbres de Lie nous devons comprendre le lien entre la sous-catégorie $\mathbf{dgLie}_k^0$ et la catégorie $\mathbf{dgLie}_k$ tout entière. On considère pour cela le foncteur de Yoneda

$$\underline{h}_- : \mathbf{dgLie}_k^{\mathrm{cof}} \longrightarrow \mathrm{Fun}((\mathbf{dgLie}_k^0)^{\mathrm{op}}, \mathrm{SEns}),$$

qui à une dg-algèbre de Lie cofibrante L associe $\underline{h}_L : (\mathbf{dgLie}_k^0)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{SEns}$ défini par $\underline{h}_L(L') := \underline{\mathrm{Hom}}^\Delta(L', L)$, où $\underline{\mathrm{Hom}}^\Delta$ sont les ensembles simpliciaux de morphismes définis au §1.1.

Proposition 2.6. — *Le foncteur $\underline{h}$ induit un foncteur pleinement fidèle*

$$\underline{h}_- : \mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k^{cof}) \simeq \mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathrm{Fun}((\mathbf{dgLie}_k^0)^{\mathrm{op}}, \mathrm{SEns})).$$

Preuve (Esquisse) — Le foncteur $\underline{h}$ de la proposition possède un adjoint à gauche r. Le foncteur r est défini par une extension de Kan homotopique à gauche (voir [Du]) et possède les propriétés caractéristiques suivantes.

1. Pour tout $L \in \mathbf{dgLie}_k^0$, le morphisme d'adjonction $r\underline{h}_L \longrightarrow L$ est un isomorphisme dans $\mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k)$.
2. Le foncteur r commute aux colimites homotopiques arbitraires.

Dire que $\underline{h}$ est pleinement fidèle est équivalent à dire que pour toute dg-algèbre de Lie L le morpisme d'adjonction

$$u_L : r\underline{h}_L \longrightarrow L$$

est un isomorphisme dans $\mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k)$.

On commence par remarquer que le lemme de Yoneda (version homotopique) implique que $\underline{h}$ est pleinement fidèle lorsque restreint à $\mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k^0)$. Par ailleurs, ce foncteur commute aux colimites filtrantes, car les objets de $\mathbf{dgLie}_k^0$ sont compacts pour la théorie homotopique des dg-algèbres de Lie. On voit ainsi que pour tout L qui est une colimite filtrante d'objets de $\mathbf{dgLie}_k^0$, le morphisme d'adjonction u_L est un isomorphisme. Cela montre en particulier que c'est le cas pour $L = Lie(V)$ une dg-algèbre de Lie libre sur un espace gradué V arbitraire concentré en degrés 2 et plus. Enfin, si $L \in \mathbf{dgLie}_k$ est concentrée en degrés 2 et plus, alors on peut résoudre L par une résolution libre

$$L_* \longrightarrow L.$$

Ici, L_* est un objet simplicial qui est tel que chaque L_n est libre concentrée en degrés 2 et plus. Le fait que L_* soit une résolution de L nous dit que le morphisme naturel $\mathrm{hocolim}_n L_n \longrightarrow L$ est un isomorphisme dans $\mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k)$. On peut de plus construire L_* de sorte à ce que l'objet simplicial $\underline{h}_{L_*}$ reste une résolution de $\underline{h}_L$, et donc de sorte à ce que l'on ait $\underline{h}_L \simeq \mathrm{hocolim}_n \underline{L}_n$. Comme r commute aux colimites homotopiques, on trouve que le morphisme d'adjonction u_L est encore un isomorphisme.

Nous venons de voir que $\underline{h}$ se restreint en un foncteur pleinement fidèle sur la sous-catégorie des dg-algèbres de Lie concentrées en degrés 2 et plus. Pour étendre cela à toutes les dg-algèbres de Lie L, on utilise un procédé *d'hyper-recouvrement formellement lisses* au sens de [Lu1, Prop. 1.5.8]. Ce procédé nous permet de dire que L s'écrit comme une colimite homotopique $\mathrm{hocolim}_n L_n \simeq L$, avec L_* un objet simplicial qui est tel que

1. chaque L_n est concentrée en degrés 2 et plus,
2. le morphisme $\mathrm{hocolim}_n \underline{h}_{L_n} \longrightarrow \underline{h}_L$ est un isomorphisme.

Nous en déduisons que le morphisme d'adjonction u_L est la colimite homotopique des morphismes u_{L_n} et est donc un isomorphisme. □

Nous arrivons enfin à la construction du foncteur $\ell : \mathcal{PMF} \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k)$. On commence par le foncteur $\widehat{C}^* : (\mathbf{dgLie}_k^0)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{dgArt}_k^*$ qui induit par restriction un foncteur au niveau des catégories de foncteurs vers des ensembles simpliciaux

$$(\hat{C}^*)^{-1} : \mathrm{Fun}(\mathbf{dgArt}_k^*, \mathrm{SEns}) \longrightarrow \mathrm{Fun}((\mathbf{dgLie}_k^0)^{\mathrm{op}}, \mathrm{SEns}).$$

Théorème 2.7 (Lurie). — 1. *Le foncteur ci-dessus*

$$(\hat{C}^*)^{-1} : \mathrm{Ho}(\mathrm{Fun}(\mathbf{dgArt}_k^*, \mathrm{SEns})) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathrm{Fun}((\mathbf{dgLie}_k^0)^{\mathrm{op}}, \mathrm{SEns}))$$

envoie les problèmes de modules formels dans l'image essentielle du foncteur $\underline{h}$ de la proposition 2.6.

2. *Par* (1) *ci-dessus on déduit un foncteur*

$$\ell : \mathcal{PMF} \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k).$$

Ce foncteur ℓ est une équivalence de catégories.

Il ne serait pas raisonnable de donner la preuve de ce théorème, qui est relativement longue. Par ailleurs, elle utilise de manière essentielle l'arsenal des techniques de ∞-catégories qui ne peut être évité qu'au prix de complications techniques supplémentaires. Indiquons-en cependant les grandes étapes.

Le point (1) du théorème se fait par dévissage. On commence par remarquer que pour un objet représentable $F = \mathbf{Spf}\, A \in \mathcal{PMF}$, avec $A \in \mathbf{dgArt}_k^*$, alors $(\hat{C}^*)^{-1}(F)$ est de la forme $\underline{h}_{\ell_F}$, pour $\ell_F \in \mathbf{dgLie}_k$. Ici ℓ_F peut-être explicitée comme suit. On choisit $A \longrightarrow A'$ un remplacement cofibrant dans $\mathbf{cdga}_k$ de l'augmentation $A \longrightarrow k$. On pose alors $\ell_F := Der_A(A', A')$ la dg-algèbre de Lie des dérivations de A' qui sont A-linéaires. On vérifie, à l'aide de la propriété universelle des dérivations et du lemme 2.5 que le foncteur $(\hat{C}^*)^{-1}(F)$ est bien équivalent à $\underline{h}_{\ell_F}$.

Lorsque plus généralement $F = \mathrm{colim}_i \mathbf{Spf}\, A_i$ pour « $\lim_i A_i$ » un pro-objet dans $\mathbf{dgArt}_k^*$ (voir §2.1), alors on a de même $\underline{h}_{\ell_F} \simeq (\hat{C}^*)^{-1}(F)$, où on a posé $\ell_F := \mathrm{colim}_i \ell_{\mathbf{Spf}\, A_i} \in \mathbf{dgLie}_k$. Enfin, pour passer du cas pro-représentable au cas d'un problème de modules formels général $F \in \mathcal{PMF}$ on invoque de nouveau un argument *d'hyperrecouvrements formellement lisses* (voir [Lu1, Prop. 1.5.8]).

La preuve du point (2) du théorème procède comme suit. On commence par exhiber un foncteur $X_{-} : \mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k) \longrightarrow \mathcal{PMF}$ adjoint à gauche du foncteur ℓ. Pour cela, on utilise l'extension de Kan à gauche le long du foncteur $\widehat{C}^*$

$$\widehat{C}^*_! : \mathrm{Fun}((\mathbf{dgLie}_k^0)^{\mathrm{op}}, \mathrm{SEns}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathbf{dgArt}_k^*, \mathrm{SEns}).$$

Son foncteur dérivé à gauche, précomposé avec le foncteur $\underline{h}$ de la proposition 2.6, définit un foncteur $\mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k) \longrightarrow \mathcal{PMF}^{pr}$. On compose ce foncteur avec le problème de modules associé pour avoir

$$X_{-} : \mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k) \longrightarrow \mathcal{PMF}.$$

Il nous reste à montrer que l'adjonction donnée par X et ℓ est une équivalence, et pour cela on commence par remarquer que le foncteur ℓ est conservatif. Par construction et le lemme 2.5 si $f : F \longrightarrow G$ est un morphisme dans $\mathcal{PMF}$ tel que $\ell_F \longrightarrow \ell_G$ est un isomorphisme dans $\mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k)$, alors pour tout $n \geq 1$ le morphisme induit $F(k \oplus k[n]) \longrightarrow G(k \oplus k[n])$ est une équivalence faible. En utilisant le fait que F et G sont des problèmes de modules formels on voit en prenant des produits finis de $k \oplus k[n]$ que les morphismes induits $F(k \oplus V[n]) \longrightarrow G(k \oplus V[n])$ sont encore des équivalences, et ce pour tout espace vectoriel V de dimension finie. Par ailleurs, tout objet $A \in \mathbf{dgArt}_k^*$ possède une décomposition de Postnikov

$$A = A_m \longrightarrow A_{m-1} \longrightarrow \dots \qquad A_1 \longrightarrow A_0 = \pi_0(A),$$

telle que pour tout $i > 0$ on ait un carré homotopiquement cartésien dans $\mathbf{dgArt}_k^*$

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r] \arrow[d] & A_{i-1} \arrow[d] \\ k \arrow[r] & k \oplus V_i[i+1]. \end{tikzcd}$$

En appliquant de nouveau la condition que F et G sont des problèmes de modules formels on voit que le morphisme induit $F(A) \longrightarrow G(A)$ est une équivalence si $F(\pi_0(A)) \longrightarrow G(\pi_0(A))$ est une équivalence. Enfin, $\pi_0(A)$ possède une filtration canonique par les puissances de son idéal d'augmentation m, ce qui produit une seconde tour

$$A_0 = A_{0,m} \longrightarrow A_{0,m-1} \longrightarrow \dots \qquad A_{0,1} \longrightarrow A_{0,0} = k,$$

ainsi que des carrés homotopiquement cartésiens

$$\begin{tikzcd} A_{i,0} \arrow[r] \arrow[d] & A_{0,i-1} \arrow[d] \\ k \arrow[r] & k \oplus W_i[1], \end{tikzcd}$$

où $W_i = m^i/m^{i-1}$. En appliquant encore la condition que F et G sont des problèmes de modules formels on voit que $F(\pi_0(A)) \longrightarrow G(\pi_0(A))$ est une équivalence, et donc que $F(A) \longrightarrow G(A)$ l'est aussi. Comme ceci vaut pour tout A on voit que $F \longrightarrow G$ est un isomorphisme dans $\mathcal{PMF}$.

Nous venons de voir que ℓ est un foncteur conservatif. Pour voir que c'est une équivalence il reste à montrer que, pour tout $F \in \mathcal{PMF}$, le morphisme d'adjonction $\alpha_F : X_{\ell(F)} \longrightarrow F$ est un isomorphisme dans $\mathcal{PMF}$. C'est la partie la plus délicate et le cœur véritable de la preuve. On commence par montrer que α_F est un isomorphisme lorsque F est représentable et de la forme $\mathbf{Spf}\, A$ pour $A \in \mathbf{dgArt}_k^*$. Ce fait est équivalent au fait que le foncteur $\widehat{C}^* : (\mathbf{dgLie}_k)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{cdga}_k^*$ se restreint en une équivalence $\mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k^a)^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{Ho}(\mathbf{dgArt}_k^*)$, où $\mathbf{dgLie}_k^a$ est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{dgLie}_k$ obtenue à partir des objets de $\mathbf{dgLie}_k^0$ en autorisant le rajout d'un nombre fini de générateurs et de relations en degrés 1 et plus. Dans une seconde étape on montre que α_F est un isomorphisme lorsque F est pro-représentable par un simple passage à la limite. Enfin, le cas général se déduit du cas pro-représentable en approximant F par des objets pro-représentables de nouveau à l'aide de la construction d'hyperrecouvrements formellement lisses de [Lu1, Prop. 1.5.8].

Pour clore ce paragraphe citons quelques-unes des propriétés de l'équivalence du théorème. Comme ci-dessus nous notons X_- l'inverse de ℓ.

1. L'équivalence du théorème 2.7 provient d'une équivalence de théories homotopiques, c'est-à-dire d'une chaîne d'équivalences de Quillen entre catégories de modèles (ou de manière équivalente d'une équivalence de ∞-catégories). Cela implique que les équivalences ℓ et X_- préservent les espaces simpliciaux de morphismes

$$\mathbf{Map}(L, L') \simeq \mathbf{Map}(X_L, X_{L'}) \qquad \mathbf{Map}(\ell_F, \ell_g) \simeq \mathbf{Map}(F, G),$$

pour $L, L' \in \mathbf{dgLie}_k$ et $F, G \in \mathcal{PMF}$, et les $\mathbf{Map}$ sont pris dans la théorie homotopique $\mathbf{dgLie}_k$ ou bien celle des foncteurs $\mathrm{Fun}(\mathbf{dgArt}_k^*, \mathrm{SEns})$.

Par ailleurs, on a des isomorphismes naturels

$$H^{n-i}(L) \simeq \pi_i(X_L(k \oplus k[n+1])),$$

pour tout $L \in \mathbf{dgLie}_k$, tout $i \geq 0$ et tout $n \geq 0$. L'ensemble simplicial $X_L(k \oplus k[1])$ est naturellement équivalent à $DK(L)$, l'ensemble simplicial obtenu par la correspondance de Dold-Kan à partir du complexe sous-jacent à L. On voit ainsi que tous les espaces de cohomologies $H^i(L)$ possèdent maintenant des interprétations en termes du foncteur X_L. Par exemple $H^2(L)$ se trouve être l'ensemble des composantes connexes de $X_L(k \oplus k[1])$, ensemble qui peut se penser comme les déformations d'objets de F paramétrées par $k[\epsilon_{-1}]$, une version différentielle graduée des nombres duaux où $\epsilon_{-1}^2 = 0$ mais est aussi de degré -1.

2. Soit $A \in \mathbf{dgArt}_k^*$, alors $\ell_{\mathbf{Spf}\,A}$ peut se décrire explicitement de la manière suivante. On considère $A \hookrightarrow A' \twoheadrightarrow k$, un modèle cofibrant de k en tant que A-dg-algèbre commutative (i.e. la factorisation dans $\mathbf{cdga}_k$ de $A \to k$ en une cofibration suivie d'une fibration triviale). On dispose d'une dg-algèbre de Lie $Der_A(A', A')$ des dg-dérivations A-linéaires de A' dans A'. On a un isomorphisme dans $Ho(\mathbf{dgLie}_k)$
$$\ell_{\mathbf{Spf}\,A} \simeq Der_A(A', A').$$
En particulier, le complexe sous-jacent à $\ell_{\mathbf{Spf}\,A}$ est naturellement quasi-isomorphe à $\mathbb{T}_{A/k} \otimes_A^{\mathbb{L}} k[-1]$ où $\mathbb{T}_{A/k}$ est le complexe tangent de A sur k. Cette construction d'une dg-algèbre de Lie associée à une dg-algèbre commutative augmentée se trouve déjà dans [Sc-St].
3. L'équivalence ℓ du théorème 2.7 est compatible avec les notions de modules naturelles qui existent de part et d'autre. Soit L une dg-algèbre de Lie. On dispose d'une notion de L-dg-modules et de sa catégorie dérivée $D(L) := \mathrm{Ho}(L-\mathbf{dgmod})$, obtenue par localisation des quasi-isomorphismes. De même, pour $A \in \mathbf{dgArt}_k^*$ on dispose de $D(A) := Ho(A - \mathbf{dgmod})$ la catégorie dérivée des A-dg-modules. Si $X_L = \mathbf{Spf}\,A$, il existe un foncteur $\widehat{C}^*(L, -) : D(L) \longrightarrow D(A)$, qui à un L-dg-module E associe son complexe de Chevalley $\widehat{C}^*(L, M)$ (voir [Lu1, §2.2]). Ce foncteur envoie le dg-module trivial k sur A et induit une équivalence
$$D_{\mathrm{parf}}(L) \simeq D(A)$$
où $D_{\mathrm{parf}}(L) := \langle k \rangle$ est la sous-catégorie pleine de $D(L)$ qui est engendrée par colimites homotopiques et décalages par l'objet k. De manière équivalente il existe un plongement pleinement fidèle $D(A) \longrightarrow D(L)$, dont l'image essentielle est la sous-catégorie engendrée (au sens triangulé) par k. On montre que ce plongement induit une équivalence sur les sous-catégories d'objets cohomologiquement bornés à droite (voir [Lu1, Prop. 2.4.34])
$$D^-(A) \simeq D^-(L).$$
Par ailleurs, il identifie aussi la sous-catégorie $D^b_{\mathrm{coh}}(A)$ des A-dg-modules de dimension finie sur k à $D_c(L) \subset D(L)$ la sous-catégorie des objets compacts. En d'autres termes, on dispose d'une équivalence
$$D^{\mathrm{ind}}_{\mathrm{coh}}(A) \simeq D(L)$$
où le membre de gauche est la catégorie dérivée des complexes ind-cohérents au sens de [Ga], définie comme la complétion par colimites homotopiques de la théorie homotopique des A-dg-modules de dimensions finies.

   Cette équivalence se généralise au cas d'un problème de modules formel général $F \in \mathcal{PMF}$ par approximation de F par des objets représentables
$$D^{\mathrm{ind}}_{\mathrm{coh}}(F) \simeq D(\ell_F),$$
où le membre de gauche est défini par une limite d'∞-catégories (dont on prend la catégorie homotopique, voir par exemple [To, §4.1]).

Remarque 2.8. — Nous trouvons l'exemple simple suivant instructif. Soit $A = k[\epsilon]$ la k-algèbre des nombres duaux. On a $A \simeq \widehat{C}^*(L)$ où $L = \mathrm{Lie}(k[-1])$ est la dg-algèbre de Lie libre sur un générateur de degré 1. Les L-dg-modules forment une catégorie équivalente aux $k\langle x\rangle$-dg-modules, où $k\langle x\rangle$ est la dg-algèbre associative libre sur un générateur x en degré 1. Le plongement $D(k[\epsilon]) \longrightarrow D(k\langle x\rangle)$ envoie un complexe de $k[\epsilon]$-modules E sur $k \otimes^{\mathbb{L}}_{k[\epsilon]} E$, qui est un dg-module sur $k\langle x\rangle \simeq \mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{k[\epsilon]}(k,k)$. Ce foncteur est pleinement fidèle mais pas essentiellement surjectif, car par exemple l'objet $k\langle x\rangle$ n'est pas dans son image essentielle. L'objet de $D(k[\epsilon])$ qui devrait correspondre à $k\langle x\rangle$ est le complexe infini

$$k[\epsilon] \xrightarrow{\epsilon} k[\epsilon] \xrightarrow{\epsilon} \dots,$$

qui est quasi-isomorphe à k (et $k \otimes^{\mathbb{L}}_{k[\epsilon]} k$ n'est pas équivalent à $k\langle x\rangle$). Ce complexe infini peut être réalisé de manière non triviale comme un objet de $D^{\mathrm{ind}}_{\mathrm{coh}}(k[\epsilon])$, qui alors correspond à $k\langle x\rangle$ par l'équivalence $D^{\mathrm{ind}}_{\mathrm{coh}}(k[\epsilon]) \simeq D(k\langle x\rangle)$.

2.3. Corollaires et exemples

Commençons par quelques corollaires généraux du théorème 2.7. Rappelons qu'un problème de modules formel est dit pro-représentable s'il est de la forme $\mathbf{Spf}\,A := \mathrm{colim}_i \mathbf{Spf}\,A_i$ pour « $\lim_i A_i$ » un pro-objet dans $\mathbf{dgArt}^*_k$ (voir §2.1). Le corollaire suivant donne un critère simple de pro-représentabilité.

COROLLAIRE 2.9. — *Soit $X_L \in \mathcal{PMF}$ un problème de modules formel correspondant à une dg-algèbre de Lie $L \in \mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k)$. Alors X_L est pro-représentable si et seulement si $H^i(L) = 0$ pour tout $i < 1$.*

PREUVE (Esquisse) — On sait que si $F = \mathbf{Spf}\,A$ pour $A \in \mathbf{dgArt}^*_k$, alors $\ell_F \simeq \mathbb{T}_{A/k} \otimes^{\mathbb{L}}_A k[-1]$, ce qui montre que la condition est nécessaire pour les représentables. De plus, comme ℓ commute aux colimites filtrantes et que la cohomologie commute aussi aux colimites filtrantes, on voit que la condition est aussi nécessaire pour les pro-représentables.

Inversement, si g est telle que $H^i(L) = 0$ pour $i < 1$, on peut trouver un modèle cellulaire de L obtenu par générateurs et relations en degrés 1 et plus. Cela permet de dire qu'on l'on a une présentation en colimite filtrante $L = \mathrm{colim}_i L_i$ où chaque L_i est cellulaire fini avec des générateurs en degré 1 et plus. On a $X_L = \mathrm{colim}_i X_{L_i}$, et donc X_L est pro-représentable si on montre que chaque X_{L_i} est représentable. On conclut par une récurrence sur le nombre de cellules de L_i et par le fait si L_i est libre en degré n alors X_{L_i} est représentable par $k \oplus k[n-1]$ (voir [Lu1, Cor. 2.3.6] pour les détails). $\square$

Remarque 2.10. — Une conséquence importante du corollaire 2.9 est le fait suivant. Soit $F \in \mathcal{PMF}$ un problème de module formel tel que $H^i(\ell_F) = 0$ pour $i < 1$. Alors la restriction de F à la sous-catégorie pleine $\mathbf{art}^*_{\mathbf{k}} \subset \mathbf{dgArt}^*_{\mathbf{k}}$ des k-algèbres artiniennes (non « dg ») est pro-représentable par une k-algèbre pro-artinienne. Cette algèbre pro-artinienne est simplemment donnée par « $\lim_i \pi_0(A_i)$ » pour un pro-objet « $\lim_i A_i$ » dans $\mathbf{dgArt}_k^*$ qui pro-représente F. Le corollaire 2.9 entraîne donc un critère de pro-représentabilité dans le cas classique (non « dg ») : pour qu'un foncteur $F : \mathbf{art}_\mathbf{k}^* \longrightarrow \mathrm{SEns}$ soit pro-représentable il faut et il suffit qu'il soit la restriction d'un objet $\widetilde{F} \in \mathcal{PMF}$. Il s'agit d'un critère extrêmement puissant dans la pratique, bien plus simple à vérifier que les versions classiques de pro-représentabilité (par exemple [Sc]).

Un second fait général et immédiat est le corollaire suivant.

Corollaire 2.11. — *Soient $F \in \mathcal{PMF}$ et $L = \ell_F$ la dg-algèbre de Lie correspondante. Notons $F(k[[t]]) := lim_i F(k[t]/t^i) \in \mathrm{SEns}$. Alors on a une équivalence faible naturelle*

$$F(k[[t]]) \simeq \mathbf{Map}(k[-1], L).$$

L'intérêt du corollaire précédent tient au fait que $\mathbf{Map}(k[-1], L)$ se calcule de manière explicite en termes d'éléments de Maurer-Cartan. En effet, nous avons vu un modèle cofibrant de $k[-1]$ explicite (voir §1.1). Cela implique que $\mathbf{Map}(k[-1], L)$ peut être décrit de manière explicite comme suit. Rappelons que pour une dg-lie quelconque h on note $MC(h)$ l'ensemble des éléments Maurer-Cartan de h : c'est-à-dire l'ensemble des éléments $x \in h^1$ qui vérifient $d(x) + \frac{1}{2}[x,x] = 0$. De même, l'espace des éléments de Maurer-Cartan est $\mathcal{MC}(h) \in \mathrm{SEns}$, dont les n-simplexes sont par définition

$$\mathcal{MC}(h)_n := MC(h \otimes_k C^*(\Delta^n)).$$

Avec les notations du corollaire précédent on a donc

$$F(k[[t]]) \simeq \mathcal{MC}(tL[[t]]),$$

où $tL[[t]]$ est la dg-algèbre de Lie $L \otimes_k tk[[t]]$ des séries formelles à coefficients dans L et sans terme constant, munie du crochet naturel. Ainsi, le corollaire 2.11 donne une formule explicite pour les arcs formels dans un problème de modules formel en termes de la dg-algèbre de Lie correspondante.

Terminons cette section par quelques exemples de problèmes de modules formels, la description des dg-algèbres de Lie correspondantes, et par certaines applications. De très nombreux problèmes de modules formels apparaissent d'abord comme des foncteurs $F : \mathbf{dgArt}_k^* \longrightarrow \mathrm{SEns}$ qui ne vérifient que les conditions (1) et (3) de la définition 2.3 sans que (2) soit nécessairement vérifiée. Dans ce cas, si l'on fixe un 0-simplexe $x \in F(k)$, on définit le problème de modules formels de F localisé en x par

$$\mathrm{Def}_F(x) : \mathbf{dgArt}_k^* \longrightarrow \mathrm{SEns},$$

qui envoie $A \in \mathbf{dgArt}_k^*$ sur la fibre homotopique de $F(A) \longrightarrow F(k)$ prise en x. Le foncteur $\mathrm{Def}_F(x)$ vérifie alors $(1)-(3)$ de 2.3 et définit donc un objet $\mathrm{Def}_F(x) \in \mathcal{PMF}$.

Complété formel d'un schéma en un point. Soient X un k-schéma, $x \in X(k)$ un k-point et $A := \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow k$ l'anneau local de X en x muni de son augmentation naturelle. On voit A comme un objet de $\mathbf{cdga}_k^*$, ce qui nous permet de définir le complété formel de X en x comme

$$\hat{X}_x := \mathbf{Spf}\, A : \mathbf{dgArt}_k^* \longrightarrow \mathrm{SEns}.$$

Ce foncteur est un problème de modules formel et définit donc un objet $\hat{X}_x \in \mathcal{PMF}$. La dg-algèbre de Lie correspondante est $\ell_{\hat{X}_x} \simeq \mathrm{Der}_A(A', A')$, la dg-algèbre de Lie des dg-dérivations de A' qui sont A-linéaires, où A' est un remplacement cofibrant de k comme A-dg-algèbre commutative. Il s'agit de la dg-algèbre de Lie exhibée dans [Sc-St]. Le complexe sous-jacent à $\ell_{\hat{X}_x}$ est naturellement quasi-isomorphe à $\mathbb{T}_{X/k} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} k[-1]$, la fibre en x du complexe tangent $\mathbb{T}_{X/k}$ de X sur k. D'après le corollaire 2.9, $\hat{X}_x$ est pro-représentable par un pro-objet « $\lim_i A_i$ » dans $\mathbf{dgArt}_k^*$. Lorsque X est localement noethérien ce pro-objet est équivalent à « $\lim_i\, A/m^i$ », le complété formel de A en x (voir [Ga-Ro1, Prop. 6.8.2]). Cependant, si X n'est pas noethérien alors « $\lim_i\, A_i$ » peut ne pas être représentable par une algèbre pro-artinienne et posséder de l'homotopie non triviale.

Dans tous les cas, on dispose toujours d'un isomorphisme de pro-algèbres

$$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} = \lim_i A/m^i \simeq H^0(\widehat{C}^*(\ell_{\hat{X}_x})).$$

Le connaissance de la dg-algèbre de Lie permet ainsi de donner une présentation explicite de l'anneau $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ par générateurs et relations. Cette formule permet par exemple d'étudier les propriétés formelles de singularités d'espaces de modules (on pourrait citer [Go-Mi], [Si, §10] et [Ka-Ko-Pa] comme exemples d'applications).

Déformation de schémas et de champs. Soit X_0 un k-schéma fixé et cherchons à en étudier les déformations formelles. Pour commencer, supposons que $X_0 = Spec\, B_0$ soit affine. Pour $A \in \mathbf{dgArt}_k^*$ une A-dg-algèbre commutative plate B est la donnée d'une cdga B munie d'un morphisme $A \to B$ et vérifiant les deux conditions suivantes.

1. La $\pi_0(A)$-algèbre $\pi_0(B)$ est plate.
2. Pour tout i le morphisme naturel $\pi_i(A) \otimes_{\pi_0(A)} \pi_0(B) \longrightarrow \pi_i(B)$ est un isomorphisme.

On définit alors un foncteur

$$\mathrm{CAlg} : \mathbf{dgArt}_k^* \longrightarrow \mathrm{SEns}$$

qui à A associe l'ensemble simplicial nerf des quasi-isomorphismes entre A-dg-algèbres commutatives cofibrantes et plates. Pour $A \to A'$ le morphisme $\mathrm{CAlg}(A) \longrightarrow \mathrm{CAlg}(A')$ est induit par le foncteur de changement de base $- \otimes_A A'$ (qui préserve les quasi-isomorphismes entre A-cdga cofibrantes).

Le foncteur CAlg vérifie les conditions (1) et (3) de la définition 2.3, et on peut donc définir le problème de modules formel $\mathrm{Def}_{\mathrm{CAlg}}(B_0) \in \mathcal{PMF}$ localisé en $B_0 \in \mathrm{CAlg}(k)$, qui par définition est le problème de modules formel des déformations de B_0 comme k-algèbre commutative.

Proposition 2.12. — *La dg-algèbre de Lie correspondante à* $\mathrm{Def}_{\mathrm{CAlg}}(B_0)$ *est*

$$\ell_{\mathrm{Def}_{\mathrm{CAlg}}(B_0)} \simeq \mathrm{Der}_k(B_0', B_0'),$$

les dg-dérivations de B_0' *dans elle-même, où* B_0' *est un modèle cofibrant de* B_0 *en tant que dg-algèbre commutative sur* k.

Cette proposition fait partie d'un lot de résultats considérés comme folkloriques, mais nous ne connaissons pas de preuve complète qui n'utilise pas les résultats de [Lu1]. Il est en effet facile de voir que le complexe sous-jacent à $\ell_{\mathrm{Def}_{\mathrm{CAlg}}(B_0)}$ est quasi-isomorphe à $\mathrm{Der}_k(B_0', B_0')$, mais la difficulté réside dans l'identification de la structure de dg-algèbre de Lie. L'idée clé de cette identification est d'utiliser le fait que la donnée d'une A-cdga plate C est équivalente à la donnée d'une k-cdga C_0 munie d'une action de $\ell_{\mathbf{Spf}\,A}$ par dérivation (en utilisant une extension de l'équivalence $D^-(A) \simeq D^-(\ell_{\mathbf{Spf}\,A})$ au niveau des dg-algèbres commutatives munies d'actions de A et de $\ell_{\mathbf{Spf}\,A}$). Ainsi, on peut construire une équivalence naturelle en A entre $Def_{\mathrm{CAlg}}(B_0)(A)$ et $\mathbf{Map}(\ell_{\mathbf{Spf}\,A}, Der_k(B_0', B_0'))$, ou en d'autres termes un isomorphisme dans $\mathcal{PMF}$

$$\mathrm{Def}_{\mathrm{CAlg}}(B_0) \simeq X_{\mathrm{Der}_k(B_0', B_0')}.$$

La proposition précédente s'étend à la situation globale d'un schéma, voire d'un champ algébrique ou même d'un n-champ algébrique X quelconque (voir par exemple [Pr2]). Le foncteur CAlg est remplacé par $n-\mathrm{StAlg} : \mathbf{dgArt}_k^* \longrightarrow \mathrm{SEns}$, qui à A associe un certain espace classifiant de n-champs algébriques dérivés et plats sur A (voir [To, 1.8, 1.9] pour ces notions). Si on fixe $X \in n - \mathrm{StAlg}(k)$, alors on peut définir $\mathrm{Def}_{n-\mathrm{StAlg}}(X) \in \mathcal{PMF}$ le problème de modules formel localisé en X, qui par définition est le problème de modules formel des déformations de X. La dg-algèbre de Lie correspondante peut alors s'identifier à

$$\ell_{\mathrm{Def}_{n-\mathrm{StAlg}}(X)} \simeq \mathbb{R}\Gamma(X, \mathbb{T}_{X/k}),$$

où $\mathbb{T}_X$ est le complexe tangent de X sur k. L'identification ci-dessus est dans $\mathrm{Ho}(\mathbf{dgLie}_k)$ et la structure de Lie sur le membre de droite est définie en utilisant une version du crochet des champs de vecteurs.

Un corollaire intéressant de tout ceci est la preuve, rapide, du théorème de Bogomolov-Tian-Todorov affirmant la lissité formelle de l'espace des modules des variétés de Calabi-Yau propres et lisses (voir [Ka-Ko-Pa]). En effet, par ce que l'on vient de voir, si X est une telle variété de Calabi-Yau, la pro-algèbre qui représente le problème de déformations formelles de X est donnée par

$$\widehat{\mathcal{O}} \simeq H^0(\widehat{C}^*(L)),$$

où $L = \mathbb{R}\Gamma(X, \mathbb{T}_{X/k})$. Or la théorie de Hodge montre que la dg-algèbre de Lie L est toujours quasi isomorphe à une dg-algèbre de Lie abélienne. On trouve donc que $\widehat{\mathcal{O}}$ est une k-algèbre de séries formelles. D'autres exemples de ce type se retrouvent facilement à l'aide des problèmes de modules formels, comme par exemple le fait que les espaces de modules de représentations de groupes fondamentaux de variétés algébriques complexes ont des singularités au plus quadratiques (voir [Si, §10]).

Déformations d'objets dans des catégories dérivées. Intéressons-nous maintenant à la théorie des déformations d'objets dans des catégories dérivées. Pour fixer les idées, fixons une dg-algèbre associative unitaire B (sur k, non nécessairement bornée), et cherchons à comprendre la théorie des déformations d'objets dans $D(B)$ la catégorie dérivée des B-dg-modules. Pour cela, on commence par définir un foncteur

$$B - \mathrm{Mod} : \mathbf{dgArt}_k^* \longrightarrow \mathrm{SEns},$$

qui à A associe le nerf des quasi-isomorphismes entre $B \otimes_k A$-dg-modules cofibrants et cohomologiquement bornés à droite. Ce foncteur vérifie (1) et (3) de la définition 2.3 et on peut donc le localiser en un objet $E_0 \in B - \mathrm{Mod}(k)$ pour obtenir un problème de modules formel $\mathrm{Def}_{B-\mathrm{Mod}}(E_0) \in \mathcal{PMF}$.

Proposition 2.13. — *La dg-algèbre de Lie correspondant à* $\mathrm{Def}_{B-\mathrm{Mod}}(E_0)$ *est*

$$\ell_{\mathrm{Def}_{B-\mathrm{Mod}}(E_0)} \simeq \underline{\mathrm{End}}(E'_0),$$

les dg-endomorphismes de B-dg-modules de E'_0 dans lui-même, où E'_0 est un modèle cofibrant de E_0 en tant que B-dg-module.

Tout comme pour la proposition 2.12 cette proposition est du domaine du folklore, et est démontrée en détail dans [Lu1, Thm. 5.2.8] (ainsi que son extension sans hypothèse de borne cohomologique). Citons aussi [Ef-Lu-Or] qui contient une version tronquée de cet énoncé. Le point clé est encore le même, à savoir l'équivalence entre les théories homotopiques des A-dg-modules (cohomologiquement bornées à droite) et celle des $\ell_{\mathbf{Spf}\, A}$-dg-modules : se donner un $B \otimes_k A$-dg-module E cohomologiquement borné à droite c'est la même chose que de se donner un B-module E_0 (cohomologiquement borné à droite) et une action compatible de $\ell_{\mathbf{Spf}\, A}$.

Cette proposition permet par exemple d'étudier la théorie des déformations d'objets $E_0 \in D^-_{\mathrm{qcoh}}(X)$ pour X un k-schéma quasi compact et quasi séparé. En effet, d'après [Bo-Vd] on sait que $D^-_{\mathrm{qcoh}}(X)$ s'écrit comme $D^-(B)$ et peut donc étudier les déformations de l'objet correspondant à E_0 dans $D(B)$. Par exemple, lorsque X est propre et lisse et de Calabi-Yau, et que E_0 est un complexe parfait, la dg-algèbre de Lie $\mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}(E_0, E_0)$ vient avec un pairing non dégénéré provenant de la dualité de Serre. L'existence de ce pairing induit de fortes restrictions sur la structure locale de l'espace des déformations de E_0, comme cela est démontré par exemple dans [Br-Bu-Jo, Cor. 6.7] pour des objets simples dans $D(X)$ avec X Calabi-Yau de dimension 3. Un autre exemple d'application de la théorie des déformations d'objets dans $D(B)$ est donné dans [Se], où elle est utilisée afin de montrer l'existence de structure équivariante sur certains objets rigides.

Déformation de (dg-)catégories. On termine ces exemples par la théorie des déformations des catégories et plus généralement des dg-catégories. La situation se complique ici car les foncteurs naturels $\mathbf{dgArt}_k^* \longrightarrow \mathrm{SEns}$ associés au problème des déformations de dg-catégories ne sont pas des problèmes de modules formels (ils ne vérifient pas (3) de la définition 2.3). Cependant, il est communément admis que la théorie des déformations d'une dg-catégorie T_0 fixée doit correspondre à la dg-algèbre de Lie $HH^*(T)[1]$, le complexe de cohomologie de Hochschild de T muni du crochet de Gerstenhaber (voir [Ke, §3]). Cette question est laissée en suspens dans [Lu1, Rem. 5.3.38], mais des progrès ultérieurs on été obtenus (voir [Pre, Thm. 5.3.3.4]), que nous allons présenter maintenant.

Pour tout $A \in \mathbf{dgArt}_k^*$ on dispose d'une notion de dg-catégories A-linéaires, qui ne sont autres que les catégories enrichies dans les A-dg-modules. Un dg-foncteur $T \longrightarrow T'$ entre deux telles dg-catégories sera appelé une *équivalence Morita* si le foncteur induit sur les catégories de dg-modules $D(T') \longrightarrow D(T)$ est une équivalence de catégories. On construit alors

$$\mathrm{DgCat} : \mathbf{dgArt}_k^* \longrightarrow \mathrm{SEns},$$

qui à A associe le nerf de la catégorie des dg-catégories A-linéaires (cofibrantes) et équivalences Morita entre elles. Si T_0 est une dg-catégorie fixée sur k on localise ce foncteur en $\mathrm{Def}_{\mathrm{DgCat}}(T_0) : \mathbf{dgArt}_k^* \longrightarrow \mathrm{SEns}$, qui à A associe la fibre homotopique de $\mathrm{DgCat}(A) \longrightarrow \mathrm{DgCat}(k)$ prise en T_0.

On peut montrer que le foncteur $\mathrm{Def}_{\mathrm{DgCat}}(T_0)$ n'est pas un problème de modules formel en général et que la condition (3) de 2.3 n'est pas satisfaite. Il existe un contre-exemple explicite dans [Ke-Lo] (voir aussi [Lu1, Rem. 5.3.38]). Dans [Lu1, Thm. 5.3.33], des conditions suffisantes sur T_0 sont données afin que cette condition (3) soit réalisée. Il s'agit cependant de conditions très restrictives, par exemple pratiquement jamais réalisées pour T_0 (un dg-modèle à) la catégorie dérivée $D^b_{\mathrm{coh}}(X)$ d'une variété lisse et projective X (le cas où X est une courbe elliptique est déjà un contre-exemple). Pour contourner ce problème on pose la définition suivante.

DÉFINITION 2.14. — *Le* problème de modules formel des déformations de T_0 *est le problème de modules formel associé à* $\mathrm{Def}_{\mathrm{DgCat}}(T_0) \in \mathcal{PMF}^{pr}$ *(voir §2.1). Il est noté* $\widetilde{\mathrm{Def}}_{\mathrm{DgCat}}(T_0) \in \mathcal{PMF}$.

Par définition, $\widetilde{\mathrm{Def}}_{\mathrm{DgCat}}(T_0)$ est donc défini comme la meilleure approximation possible de $\mathrm{Def}_{\mathrm{DgCat}}(T_0) \in \mathcal{PMF}^{pr}$ par un objet de $\mathcal{PMF} \subset \mathcal{PMF}^{pr}$. Cette définition pourrait être canulée, car le foncteur problème de modules formel associé peut détruire énormément d'informations. Cependant, cette définition est raisonnable, comme le montre le théorème suivant, qui réalise le lien attendu entre cohomologie de Hochschild et déformations de dg-catégories.

THÉORÈME 2.15 (Preygel). — *Soient T_0 une dg-categorie k-linéaire, et $HH^*(T_0)[1]$ la dg-algèbre de Lie de cohomologie de Hochschild de T_0.*

1. *Il existe une équivalence dans $\mathcal{PMF}$*
$$X_{HH^*(T_0)[1]} \simeq \widetilde{\mathrm{Def}}_{\mathrm{DgCat}}(T_0).$$
2. *On a une équivalence naturelle d'ensembles simpliciaux*
$$\widetilde{\mathrm{Def}}_{\mathrm{DgCat}}(T_0)(k[[t]]) \simeq \{\textit{Structures } k[u]\textit{-linéaires sur } T_0\},$$
où $k[u]$ est la dg-algèbre commutative libre sur un générateur u de degré 2.

Remarque 2.16. — Quelques mots d'explications sur l'énoncé du théorème.

1. Tout d'abord, $HH^*(T_0)$ est ici le complexe de Hochschild de T_0. Le complexe décalé $HH^*(T_0)[1]$ possède deux structures de dg-algèbres de Lie : une induite par des formules explicites dites de Gerstenhaber (voir [Ke, §3]) et une seconde, plus implicite, induite par le fait que $HH^*(T_0)$ porte naturellement une structure de E_2-algèbre (voir [Lu3, §5.3]). À notre connaissance, le théorème 2.15 fait référence à cette seconde structure. Ces deux structures sont très probablement équivalentes, mais nous ne connaissons aucune référence où cela soit démontré.
2. Dans le point (2), l'ensemble simplicial de droite possède plusieurs descriptions possibles. On peut le définir comme la fibre homotopique du morphisme d'oubli
$$\mathrm{DgCat}(k[u]) \longrightarrow \mathrm{DgCat}(k),$$
entre les nerfs d'équivalences Morita entre dg-catégories sur $k[u]$ et sur k. On peut aussi le décrire comme un espace de morphismes dans les E_2-algèbres $\mathbf{Map}(k[u], HH^*(T_0))$, où $HH^*(T_0)$ est muni de sa structure de E_2-algèbre donnée par la fameuse conjecture de Deligne (voir [Lu3, §5.3]).

Le théorème précédent apparaît dans [Pre]. Le point (2) est un cas particulier d'un énoncé plus général qui affirme que pour $A \in \mathbf{dgArt}_k^*$ (ou plus généralement si A est un pro-objet de $\mathbf{dgArt}_k$) l'ensemble simplicial $\widetilde{\mathrm{Def}}_{\mathrm{DgCat}}(T_0)(A)$ est équivalent à un certain ensemble simplicial classifiant les structures $D^2(A)$-liéaires sur T_0, où $D^2(A)$ est le E_2-dual de Koszul de A (voir [Pre, Thm. 5.3.3.4]). Dans le cas où $A = k[[t]]$ ce E_2-dual de Koszul est précisément $k[u]$. Il existe par ailleurs de nombreux travaux tentant de décrire les $k[[t]]$-points de $\widetilde{\mathrm{Def}}_{\mathrm{DgCat}}(T_0)$ en termes de certaines dg-catégories avec courbure sur $k[[t]]$ mais sans que cela puisse donner un résultat réellement satisfaisant.

Dans une autre direction, un travail récent de A. Blanc et P. Pandit montre que, si T_0 satisfait des conditions plus restrictives (par exemple être propre et lisse), alors le morphisme naturel
$$\mathrm{Def}_{\mathrm{DgCat}}(T_0)(k[[t]]) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Def}}_{\mathrm{DgCat}}(T_0)(k[[t]])$$
est une équivalence (bien que cela soit faux si l'on remplace $k[[t]]$ par $A \in \mathbf{dgArt}_k^*$, même l'hypothèse propre et lisse n'implique pas que $\mathrm{Def}_{\mathrm{DgCat}}(T_0)$ satisfait (3) de la définition 2.3). Cet énoncé possède des cas particuliers dans [Lo-Vb] et [Pe], exprimés sous la forme d'existence de générateurs compacts dans des déformations formelles de dg-catégories.

3. GÉNÉRALISATIONS

Le théorème 2.7 possède un lot de généralisations dans des directions variées. Nous en décrirons deux ci-dessous. D'une part la version axiomatique de la notion de problèmes de modules formels et ses conséquences sur l'existence de théories des déformations dans le cadre des $\mathbb{E}_n$-algèbres, valables en dehors de la caractéristique nulle. Par ailleurs des généralisations sur des bases plus générales que des corps k avec des versions relatives des problèmes de modules formels. Notons aussi l'existence d'extensions en dehors du cas de la caractéristique nulle basée sur une généralisation de la notion de dg-algèbre de Lie décrite dans [Pr1].

3.1. Extensions à d'autres contextes de théorie des déformations

Le théorème 2.7 est un cas particulier d'un théorème général portant sur une axiomatique des problèmes de modules formels. Ce théorème général est délicat à énoncer sans le langage des ∞-catégories (sans que cela soit totalement impossible), et les simples notions de *contexte de déformation* et de *théorie des déformations* présentées dans [Lu1] dépassent le cadre de ce texte. Nous nous contenterons ici d'une famille d'applications de cette théorie axiomatique, à savoir les versions du théorème 2.7 dans le cadre des $\mathbb{E}_n$-agèbres.

Fixons un entier $n > 0$. Rappelons que l'on dispose d'une opérade topologique Disk_n des petits disques de dimension n (voir [Ma, §4]). Sa valeur en k est $\mathrm{Disk}_n(k)$ l'espace de configurations de k disques de dimension n dans le disque de dimension n standard. Pour chaque k, l'espace $\mathrm{Disk}_n(k)$ possède le type d'homotopie de l'espace des configurations $\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$ de k points dans $\mathbb{R}^n$. La structure d'opérade sur Disk_n est définie en substituant une configuration de k disques dans un des disques d'une configuration de k' disques, ce qui définit les applications de composition

$$\mathrm{Disk}_n(k) \times \mathrm{Disk}_n(k') \longrightarrow \mathrm{Disk}_n(k + k' - 1)$$

(et il y a en tout k' de ces applications, dépendant du choix d'un des k' disques dans lequel on opère la substitution).

En prenant pour chaque k le complexe des chaînes singulières $C_*(\mathrm{Disk}_n(k))$ on trouve une dg-opérade (i.e. une opérade dans les complexes de k-espaces vectoriels) que l'on note $\mathbb{E}_n$. Par définition, une $\mathbb{E}_n$-algèbre est un complexe A muni d'une action de l'opérade $\mathbb{E}_n$, c'est-à-dire muni de morphismes de complexes

$$C_*(\mathrm{Disk}_n(k)) \otimes_k A^{\otimes k} \longrightarrow A$$

satisfaisant à des propriétés de compatibilité standard (voir [Ma]). Ces $\mathbb{E}_n$-algèbres forment une catégorie, et même une catégorie de modèles (pour laquelle les équivalences sont les quasi-isomorphismes et les fibrations les épimorphismes). On la note $\mathbb{E}_n - \mathbf{alg}_k$.

On peut alors définir une notion de $\mathbb{E}_n$-algèbres artiniennes et de $\mathbb{E}_n$-problèmes de modules formels de manière tout à fait analogue au cas des dg-algèbres commutatives.

Pour cela on note $\mathbb{E}_n - \mathbf{dgArt}^*_k$ la sous-catégorie pleine de $(\mathbb{E}_n - \mathbf{alg}_k)/k$ formée des $\mathbb{E}_n$-algèbres augmentées $A \longrightarrow k$ vérifiant les conditions suivantes.

1. On a $\pi_i(A) = 0$ pour $i < 0$ et i assez grand.
2. Pour tout i le k-espace vectoriel $\pi_i(A)$ est de dimension finie.
3. Si $r \subset \pi_0(A)$ est le radical de la k-algèbre $\pi_0(A)$, alors $\pi_0(A)/r \simeq k$.

On dispose, comme pour $\mathbf{dgArt}^*_k$ d'une notion de carrés distingués dans $\mathbb{E}_n - \mathbf{dgArt}^*_k$, qui sont les carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

homotopiquement cartésiens dans $\mathbb{E}_n - \mathbf{alg}_k$ et tels que chacun des morphismes induits $\pi_0(B) \longrightarrow \pi_0(A)$ et $\pi_0(C) \longrightarrow \pi_0(A)$ soit surjectif.

Par définition, un $\mathbb{E}_n$-*problème de modules formels* est un foncteur

$$F : \mathbb{E}_n - \mathbf{dgArt}^*_k \longrightarrow \mathrm{SEns},$$

tel que les trois propriétés suivantes soient satisfaites.

1. Le foncteur F envoie les quasi-isomorphismes de $\mathbb{E}_n$-algèbres sur des équivalences d'ensembles simpliciaux.
2. On a une équivalence $F(k) \simeq *$.
3. L'image par F de tout carré commutatif distingué dans $\mathbb{E}_n - \mathbf{dgArt}^*_k$ est un carré homotopiquement cartésien d'ensembles simpliciaux.

On note $\mathcal{PMF}^{\mathbb{E}_n} \subset Ho(\mathrm{Fun}(\mathbb{E}_n - \mathbf{dgArt}^*_k, \mathrm{SEns}))$ la sous-catégorie pleine de la catégorie homotopique des foncteurs formée des $\mathbb{E}_n$-problèmes de modules formels. L'analogue du théorème 2.15 est alors l'énoncé suivant.

Théorème 3.1 (Lurie). — *Il existe une équivalence de catégories*

$$X_- : Ho(\mathbb{E}_n - \mathbf{alg}^*_k) \rightleftarrows \mathcal{PMF}^{\mathbb{E}_n} : \ell_-,$$

où $\mathrm{Ho}(\mathbb{E}_n - \mathbf{alg}^*_k)$ *est la catégorie homotopique des* $\mathbb{E}_n$*-algèbres augmentées.*

Remarque 3.2. — Pour le théorème précédent, k peut être de caractéristique quelconque.

On peut bien entendu être plus précis sur cet énoncé. Pour commencer, les foncteurs ℓ_- et X_- peuvent être décrits explicitement tout comme dans le cas de 2.7. Ils possèdent par ailleurs deux propriétés remarquables.

1. Si $F = \mathbf{Spf}\, A \in \mathcal{PMF}^{\mathbb{E}_n}$ est représentable par $A \in \mathbb{E}_n - \mathbf{dgArt}_k^*$, alors les deux $\mathbb{E}_n$-algèbres augmentées A et $\ell_{\mathbf{Spf}\, A}$ sont en *dualité de Koszul.* Cela exprime qu'il existe un morphisme de $\mathbb{E}_n$-algèbres
$$A \otimes_k \ell_{\mathbf{Spf}\, A} \longrightarrow k$$
qui est non dégénéré en un certain sens (voir [Lu1, Prop. 4.4.1]).
2. L'équivalence du théorème 3.1 est compatible avec celle du 2.7. Tout d'abord, il existe un foncteur d'oubli $\mathbf{cdga}_k \longrightarrow \mathbb{E}_n - \mathbf{alg}_k$, correspondant à un morphisme d'opérades $\mathbb{E}_n \longrightarrow \mathbb{E}_\infty$ qui consiste à inclure $Conf_k(\mathbb{R}^n)$ dans $Conf_k(\mathbb{R}^\infty)$. Ceci permet d'avoir un foncteur d'extension
$$Ext^{\mathbb{E}_n} : \mathcal{PMF}^{\mathbb{E}_n} \longrightarrow \mathcal{PMF}$$
obtenu en restreignant les foncteurs définis sur les $\mathbb{E}_n$-algèbres aux **cdga** à travers ce foncteur d'oubli. On dispose aussi d'un foncteur d'oubli $\mathbb{E}_n - \mathbf{alg}_k \longrightarrow \mathbf{dgLie}_k$, correspondant à une inclusion de l'opérade de Lie (décalée de $n-1$) dans l'opérade $\mathbb{E}_n$

   Alors, pour tout $F \in \mathcal{PMF}^{\mathbb{E}_n}$, on a une équivalence naturelle de dg-algèbres de Lie $\ell_{Ext^{\mathbb{E}_n}(F)} \simeq \ell_F[n-1]$. En particulier, si F est un $\mathbb{E}_n$-problème de modules formel, la dg-algèbre de Lie $\ell_{Ext^{\mathbb{E}_n}(F)}$ est toujours sous-jacente à une $\mathbb{E}_n$-algèbre. Le cas $n = 1$ est particulièrement intéressant : si $F \in \mathcal{PMF}$ provient d'un $\mathbb{E}_1$-problème de modules formel, alors ℓ_F est une dg-lie qui est obtenue en considérant le commutateur dans une dg-algèbre naturelle. C'est pas exemple le cas pour la théorie des déformations d'objets dans une catégorie dérivée $Def_{B-Mod}(E_0)$ de la proposition 2.13. Dans ce cas précis, la dg-algèbre sous-jacente est bien entendu $\underline{End}(E_0')$.

Pour terminer ce paragraphe, signalons des applications de la notion de $\mathbb{E}_n$-problèmes de modules formels au cadre de la théorie des déformations des $\mathbb{E}_n$-algèbres. Par exemple, on peut formaliser le problème des déformations de catégories comme un $\mathbb{E}_2$-problème de modules formel, celui des catégories monoïdales comme un $\mathbb{E}_3$-problème de modules formel, et celui des catégories monoïdales tressées comme un $\mathbb{E}_4$-problème de modules formel. De manière plus générale, on peut énoncer un problème de modules formel des n-catégories linéaires comme un $\mathbb{E}_{n+1}$-problème de modules formel. Cela est par exemple étudié dans [Fr] avec comme conséquence une preuve conceptuelle de la conjecture de Deligne et de sa généralisation en dimension supérieure. Par exemple, lorsque $n = 2$ on peut considérer le problème des déformations d'une dg-catégorie T_0 (voir théorème 2.15) comme un $\mathbb{E}_2$-problème de modules formel (voir [Lu1, §5.3]). Une conséquence des théorèmes 2.15 et 3.1 est le fait que $HH(T_0)$ soit toujours quasi-isomorphe au complexe sous-jacent d'une $\mathbb{E}_2$-algèbre naturelle.

3.2. Aspects globaux : algèbres de Lie tangentes

Ce dernier paragraphe est consacré à la présentation de certains développements plus récents qui concernent l'extension du théorème 2.7, et de la théorie des déformations en général, à des bases plus générales que des corps k. On aimerait en effet pouvoir remplacer k par un anneau commutatif, ou même une dg-algèbre commutative, voire ultimement par un schéma de base S ou un champ algébrique dérivé. Par ailleurs, on aimerait aussi se débarrasser de l'hypothèse de caractéristique nulle et pouvoir travailler en inégale caractéristique (la théorie des déformations galoisienne est typiquement de ce dernier type et vit au-dessus de $\mathbf{Spf}\,\mathbb{Z}_\ell$). Il existe plusieurs travaux récents allant vers de telles généralisations (par exemple [Pr1, He, Ga-Ro1]). Une des plus abouties et des plus générales est la notion de *indschémas dérivés* de [Ga-Ro1], mais l'analogue du théorème 2.7 n'est pour l'instant pas établi (voir aussi [Ga-Ro2] pour des travaux en cours).

On peut voir rapidement les difficultés s'accumuler lorsque l'on tente de généraliser la correspondance entre problèmes de modules formels et dg-algèbres de Lie à des bases plus générales. Pour commencer, les théories homotopiques des dg-algèbres de Lie et des dg-algèbres commutatives deviennent pathologiques en caractéristique positive ou en caractéristique mixte. Ce problème est contourné dans [Pr1] en utilisant d'une part des algèbres simpliciales commutatives artiniennes, et d'autres part une notion alternative de dg-algèbre de lie basée sur des techniques simpliciales-cosimpliciales délicates. Par ailleurs, les problèmes de modules formels au sens de la définition 2.3 sont, par définition, pointés, ce qui est reflété par le fait qu'ils soient définis sur des dg-algèbres artiniennes munies d'augmentations (ainsi que la condition $F(k) \simeq *$). Lorsque k n'est plus un corps, mais par exemple un anneau, on peut imager l'existence de problèmes de modules formels F au-dessus de $\mathrm{Spec}\,k$ tels que par exemple $F(k) = \emptyset$. Cela signifie qu'il est nécessaire d'abandonner les augmentations, ce qui au niveau des dg-algèbres de Lie correspondrait au fait d'introduire des courbures au sens des $\mathcal{L}_\infty$-algèbres de Lie. Cependant, la théorie homotopique des dg-algèbres de Lie courbées reste mystérieuse car l'on perd en général la notion de quasi-isomorphisme. Enfin, on peut aussi imaginer des problèmes de modules formels en dessous de $Spec\,k$, dont l'exemple prototypique serait $\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbf{Spf}\,\mathbb{Z}_p$. Ceux-ci correspondraient à la notion de dg-algébroïdes de Lie, qui ne sont plus à proprement parler des objets k-linéaires (le crochet vérifie une règle de Liebniz qui mesure le défaut de linéarité). Au final, on voit que la théorie générale des problèmes de modules formels devrait être en correspondance avec une notion de *dg-algébroïde de Lie courbée*. L'extension du théorème 2.7 dans ce cadre n'existe pour l'instant pas, et nous allons décrire ici un premier pas vers une telle généralisation en restant dans le cadre des dg-algèbres de Lie au-dessus de dg-algèbres commutatives et plus généralement de schémas et de champs dérivés. Il s'agit ainsi d'étudier le comportement en famille des notions de problèmes de modules formels et des dg-algèbres de Lie et de leurs relations. Nous allons voir que cela amène déjà à des phénomènes globaux dignes d'intérêt, comme par exemple la notion de classes d'Atiyah et celle de supports singuliers de faisceaux cohérents.

Commençons par nous fixer une dg-algèbre A commutative sur k (toujours supposé un corps de caractéristique nulle). On suppose de plus que A est connective : $\pi_i(A) = 0$ pour $i < 0$. On associe à A un complexe cotangent $\mathbb{L}_{A/k}$, bien défini à isomorphisme prés dans $D(A)$, la catégorie homotopique des A-dg-modules. Concrètement, on choisit un modèle cofibrant $A' \simeq A$, et on regarde $\Omega^1_{A'/k}$, le A'-dg-module des différentielles de Kähler sur A' (sur k). Comme le quasi-isomorphisme induit une équivalence de catégories $D(A) \simeq D(A')$ on peut considérer $\Omega^1_{A'}$ comme un objet de $D(A)$ que l'on note $\mathbb{L}_{A/k}$. Le A-dg-module dual de $\mathbb{L}_{A/k}$ est noté $\mathbb{T}_{A/k} \in D(A)$ et est appelé le complexe tangent de A (sur k).

Supposons maintenant que $A \longrightarrow k$ soit une augmentation. On dispose du problème de modules formel $\mathbf{Spf}\, A \in \mathcal{PMF}$ représenté par A. Par ailleurs, on sait que le complexe sous-jacent de la dg-algèbre de Lie correspondante $\ell_{\mathbf{Spf}\, A}$ s'identifie à $\mathbb{T}_{A/k} \otimes^{\mathbb{L}}_A k[-1]$. Ainsi, on voit que, pour tout A comme ci-dessus, le A-dg-module $\mathbb{T}_{A/k}[-1]$ est tel que pour toute augmentation $A \longrightarrow k$ le complexe $\mathbb{T}_{A/k} \otimes^{\mathbb{L}}_A k[-1]$ est quasi-isomorphe à une dg-algèbre de Lie naturelle. Cela suggère que cette structure de Lie existe déjà sur $\mathbb{T}_{A/k}[-1]$ lui-même. Cette discussion peut aussi se globaliser en remplaçant A par un faisceau de dg-algèbres commutatives et plus spécifiquement par un schéma ou un champ dérivé au sens de [To-Ve] (qui est un objet qui par définition localement ressemble à $\operatorname{Spec} A$). On a alors le théorème suivant.

Théorème 3.3. — *Soit X un n-champ algébrique dérivé localement de présentation finie sur k. Il existe un faisceau de dg-algèbres de Lie $\mathcal{O}_X$-linéaires quasi cohérent ℓ_X sur X et un isomorphisme, fonctoriel en X, dans $D_{\mathrm{qcoh}}(X)$*

$$\ell_X \simeq \mathbb{T}_{X/k}[-1],$$

où $\mathbb{T}_{X/k}$ est le complexe tangent de X sur k.

Par ailleurs, si $x \in X(k)$ est un k-point, alors il existe un isomorphisme naturel de problèmes de modules formels

$$X_{\mathbb{T}_{X/k}[-1] \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} k} \simeq \hat{X}_x,$$

où $\hat{X}_x$ est simplement la restriction du foncteur représenté par X aux dg-algèbres commutatives artiniennes augmentées.

Ce théorème a une longue histoire. On en trouve une version pour des variétés lisses et en termes de $\mathcal{L}_\infty$-structures dans [Ka] (voir aussi [Ca-Ca-Tu] pour des généralisations aux classes d'Atiyah d'immersions fermées). La version générale ci-dessus se trouve dans [He] et sa preuve emprunte très largement les résultats de [Lu1]. On trouve aussi plusieurs versions de cet énoncé dans [Ar-Ga1, App. G] et [Be-Na].

Remarque 3.4. — 1) Lorsque $X = \operatorname{Spec} A$ pour $A \in \mathbf{cdga}_k$ connective comme ci-dessus, le théorème affirme précisément que $\mathbb{T}_{A/k}[-1]$ est quasi isomorphe au complexe sous-jacent d'une dg-algèbre de Lie A-linéaire. La fibre de cette dg-algèbre de Lie en une augmentation $A \longrightarrow k$ est par ailleurs celle correspondant à $\mathbf{Spf}\, A$ par l'équivalence du théorème 2.7.

En général la dg-algèbre de Lie ℓ_X du théorème doit être vue comme correspondant à une famille de problèmes de modules formels paramétrée par X, famille qui n'est autre que la famille tautologique des complétés formels de X en tous ses points. On peut formaliser cela en introduisant une notion de problèmes de modules formels sur X et en montrant que ℓ_X correspond à $\widehat{X \times X} \longrightarrow X$, le complété formel de la diagonale de X (voir [He] pour plus de détails).

2) Lorsque X est un schéma affine lisse on peut montrer que ℓ_X est (quasi-isomorphe à) une dg-algèbre de Lie abélienne. Ceci est à mettre en relation avec le fait que le schéma formel $\widehat{X \times X} \longrightarrow X$, complété formel de la diagonale, est isomorphe à $\widehat{TX} \longrightarrow X$, le complété formel de l'espace tangent total le long de la section nulle.

Si X est une variété lisse sur k, alors il n'est plus vrai que ℓ_X est abélienne (même à quasi-isomorphisme près). Son complexe sous-jacent est $T_X[-1]$, le fibré tangent placé en degré 1. Cependant, le crochet de Lie de ℓ_X définit un morphisme dans $D_{coh}(X)$

$$T_X[-1] \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} T_X[-1] \longrightarrow T_X[-1],$$

ou encore une classe dans $Ext^1(T_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} T_X, T_X)$. On peut montrer que cette classe est la classe d'Atiyah de X (voir [He, §2.4]) et est donc non triviale en général.

Le théorème 3.3 est un premier pas vers une extension de la théorie des problèmes de modules formels sur des bases générales. Un second est obtenu par la construction d'un foncteur canonique (voir [He, §2.3])

$$D_{qcoh}(X) \longrightarrow D(\ell_X - \mathbf{dgmod}),$$

de la catégorie dérivée quasi cohérente de X vers les dg-modules (aussi quasi cohérents) sur ℓ_X. Ce foncteur est une section du foncteur d'oubli $D(\ell_X - \mathbf{dgmod}) \longrightarrow D_{qcoh}(X)$, c'est-à-dire que ℓ_X opère sur tout quasi-cohérent de manière canonique. Si E est un complexe parfait sur X, alors le ℓ_X-dg-module correspondant est donné en particulier par un morphisme dans $D_{\mathrm{qcoh}}(X)$

$$\ell_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} E \longrightarrow E,$$

et donc par une classe dans $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{T}_{X/k} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} E, E)$, que l'on montre encore être la classe d'Atiyah de E.

Lorsque E est un cohérent borné et que X est un schéma dérivé quasi lisse (i.e. $\mathbb{T}_{X/k}$ est d'amplitude $[0,1]$), l'action de ℓ_X sur E peut être utilisée pour définir le support singulier de E au sens de [Ar-Ga1]. Il s'agit d'un analogue cohérent de la notion de support singulier de Kashiwara et Schapira, où le rôle du cotangent est maintenant joué par un certain cotangent décalé $T^*X[1]$. On commence à définir la variété des singularités de X, comme étant le schéma $Z \longrightarrow X_0$ linéaire correspondant au faisceau cohérent $H^1(\mathbb{T}_X)$. Ici $X_0 \subset X$ est le schéma tronqué sous-jacent à X, et $H^1(\mathbb{T}_X)$ est un faisceau cohérent sur X_0. En clair, la fibre de Z en $x \in X_0$ est l'espace affine

$$H^{-1}(\mathbb{L}_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} k(x)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(H^1(\mathbb{T}_X), k(x)).$$

Notons que, lorsque x est lisse dans X, alors la fibre de Z en x est réduite à un unique point car $H^{-1}(\mathbb{L}_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} k(x)) \simeq 0$. Ainsi, la projection $Z \longrightarrow X_0$ est non triviale précisément aux points singuliers de X.

Soit maintenant E un complexe cohérent borné sur X et $x \in X$. On considère $i^!_x(E) := \mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}(k(x), E)$. C'est un complexe de $k(x)$-espace vectoriel muni d'une action de la dg-algèbre de Lie $\ell_{X,x} := \ell_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} k(x)$. Cette dg-algèbre de Lie possède deux groupes de cohomologie non triviaux, T^0_x et T^1_x. Ainsi, $H^*(i^!_x(E))$ est un $H^*(\ell_{X,x})$-module gradué, et donc un $\mathrm{Sym}(T^1_x)$-module gradué, où T^1_x a un poids 2. On peut montrer que ce module gradué est de type fini, et possède donc un support $SS_x(E) \subset (T^1_x)^\vee$ qui est un fermé de Zariski conique. Notons que $(T^1_x)^\vee = Z_x$ la fibre de $Z \longrightarrow X$ en x, et ainsi $SS_x(E)$ est un fermé de Zariksi de Z_x. Par définition le support singulier de E est la réunion

$$SS(E) := \cup_x SS_x(E) \subset Z,$$

que l'on montre être un fermé de Zariski conique.

Le support singulier $SS(E)$ de E mesure, de manière microlocale, le défaut de perfection de E. On montre par exemple que $SS(E)$ est trivial, c'est-à-dire se réduit à la section nulle $X \subset Z$, si et seulement si E est parfait. Cette notion est centrale dans la correspondance de Langlands géométrique de Beilinson-Drinfeld pour laquelle elle permet de donner un sens à la notion de cohérents bornés sur le champ des modules des G-systèmes locaux sur une courbe dont le support singulier est contenu dans le cône nilpotent (voir [Ar-Ga1, §11]). Cela permet par ailleurs de filtrer les catégories dérivées des cohérents bornés par la taille de leurs supports singuliers, et d'obtenir ainsi un nouvel outil de dévissage de telles catégories (voir [Ar-Ga2]).

RÉFÉRENCES

[Ar-Ga1] D. Arinkin, D. Gaitsgory – *Singular support of coherent sheaves and the geometric Langlands conjecture.* Selecta Math. (N.S.) **21** (2015), no. 1, 1–199.

[Ar-Ga2] D. Arinkin, D. Gaitsgory – *The category of singularities as a crystal and global Springer fibers.* Manuscrit accessible à la page du second auteur : http ://www.math.harvard.edu/ gaitsgde/GL/

[Be-Na] D. Ben-Zvi, D. Nadler – *Loop spaces and connections.* J. Topol. **5** (2012), no. 2, 377–430.

[Be] J. Bergner – *Homotopy limits of model categories and more general homotopy theories.* Bull. Lond. Math. Soc. **44** (2012), no. 2, 311–322.

[Bo-Vd] A. Bondal, M. Van den Bergh – *Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry.* Mosc. Math. J. **3** (2003), no. 1, 1-36.

[Br-Bu-Jo] C. Brav, V. Bussi, D. Joyce – *A 'Darboux theorem' for derived schemes with shifted symplectic structure.* Prépublication arXiv :1305.6302.

[Ca-Ca-Tu] D. Calaque, A. Căldăraru, J. Tu, Junwu – *On the Lie algebroid of a derived self-intersection.* Adv. Math. **262** (2014), 751–783.

[Ch-Ei] C. Chevalley, S. Eilenberg – *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. **63**, (1948). 85–124.

[Dr] V. Drinfeld – *A letter from Kharkov to Moscow. Translated from the Russian by Keith Conrad.* EMS Surv. Math. Sci. **1** (2014), no. 2, 241–248.

[Du] D. Dugger – *Universal homotopy theories.* Adv. Math. **164** (2001), no. 1, 144–176.

[Ef-Lu-Or] A. Efimov, V. Lunts, D. Orlov – *Deformation theory of objects in homotopy and derived categories. I.* General theory. Adv. Math. **222** (2009), no. 2, 359–401.

[Fr] J. Francis – *The tangent complex and Hochschild cohomology of En-rings.* Compos. Math. **149** (2013), no. 3, 430–480.

[Fro-Nij] A. Frölicher, A. Nijenhuis – *A theorem on stability of complex structures.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **43** (1957), 239–241.

[Ga] D. Gaitsgory – *Ind-coherent sheaves.* Mosc. Math. J. **13** (2013), no. 3, 399–528.

[Ga-Ro1] D. Gaitsgory, N. Rozenblyum – *DG-Indschemes.* Perspectives in representation theory, 139–251, Contemp. Math., **610**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.

[Ga-Ro2] D. Gaitsgory, N. Rozenblyum – *A study in derived algebraic geometry.* Manuscrit accessible à http ://www.math.harvard.edu/ gaitsgde/GL/

[Go-Mi] W. Goldman, J. Millson – *The deformation theory of representations of fundamental groups of compact Kähler manifolds.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **67** (1988), 43–96.

[Gr] A. Grothendieck – *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. II. Le théorème d'existence en théorie formelle des modules.* Séminaire Bourbaki, Vol. 5, Exp. No. **195**, 369–390, Soc. Math. France, Paris, 1995.

[He] B. Hennion – *Tangent Lie algebra of derived Artin stacks.* À paraître dans J. reine angew. Math. (prépublication arXiv :1312.3167).

[Hi] V. Hinich – *DG coalgebras as formal stacks.* J. Pure Appl. Algebra **162** (2001), no. 2-3, 209–250.

[Ho] M. Hovey – *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs **63**, AMS, 2007.

[Ke] B. Keller – *Hochschild cohomology and derived Picard groups.* J. Pure Appl. Algebra **190** (2004), no. 1-3, 177–196.

[Ke-Lo] B. Keller, W. Lowen – *On Hochschild cohomology and Morita deformations.* Int. Math. Res. Not. IMRN 2009, no. **17**, 3221–3235.

[Ka] M. Kapranov – *Rozansky-Witten invariants via Atiyah classes.* Compositio Math. **115** (1999), no. 1, 71–113.

[Ko-Sp] K. Kodaira, D.C. Spencer – *On deformations of complex analytic structures. I, II.* Ann. of Math. (2) **67** 1958 328–466.

[Ka-Ko-Pa] L. Katzarkov, M. Kontsevich, T. Pantev – *Hodge theoretic aspects of mirror symmetry.* >From Hodge theory to integrability and TQFT tt^*-geometry, 87-174, Proc. Sympos. Pure Math., **78**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[Ko] M. Kontsevich – *Deformation quantization of Poisson manifolds.* Lett. Math. Phys. **66** (2003), no. 3, 157–216.

[Ko-So] M. Kontsevich, Y. Soibelam – *Deformations of algebras over operads and the Deligne conjecture.* Conférence Moshé Flato 1999, Vol. I (Dijon), 255-307, Math. Phys. Stud., 21, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[Lo-Va] J.L. Loday, B. Vallette – *Algebraic operads.* Grundl. Math. Wiss. **346**. Springer, Heidelberg, 2012. xxiv+634 pp.

[Lo-Vb] W. Lowen, M. Van den Bergh – *On compact generation of deformed schemes.* Adv. Math. **244** (2013), 441–464.

[Lu1] J. Lurie – *Formal moduli problems.* Prépublication accessible sur la page de l'auteur : http ://www.math.harvard.edu/~lurie/

[Lu2] J. Lurie – *Higher Topos Theory.* Annals of Mathematics Studies, 170. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009. xviii+925 pp.

[Lu3] J. Lurie – *Higher Algebra.* Prépublication accessible sur la page de l'auteur http ://www.math.harvard.edu/~lurie/

[Man] M. Manetti – *Extended deformation functors.* Int. Math. Res. Not. 2002, no. **14**, 719–756.

[Ma] J.P. May – *The geometry of iterated loop spaces.* Lectures Notes in Mathematics, Vol. 271. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. viii+175 pp.

[Pe] F. Petit – *DG affinity of DQ-modules.* Int. Math. Res. Not. IMRN 2012, no. **6**, 1414–1438.

[Pre] A. Preygel – *Thom-Sebastiani and Duality for Matrix Factorizations, and Results on the Higher Structures of the Hochschild Invariants.* Thesis (Ph.D.) Massachusetts Institute of Technology. 2012. Manuscrit accessible sur la page de l'auteur : http ://www.tolypreygel.com/index-research.html

[Pr1] J. Pridham – *Unifying derived deformation theories.* Adv. Math. **224** (2010), no. 3, 772–826.

[Pr2] J. Pridham – *Derived deformations of Artin stacks.* Comm. Anal. Geom. **23** (2015), no. 3, 419–477.

[Sc] M. Schlessinger – *Functors of Artin rings.* Trans. Amer. Math. Soc. **130**, 1968 208–222.

[Sc-St] M. Schlessinger, J. Stasheff – *The Lie algebra structure of tangent cohomology and deformation theory.* J. Pure Appl. Algebra **38** (1985), no. 2-3, 313–322.

[Se] P. Seidel – *Lagrangian homology spheres in (A_m) Milnor fibres via $\mathbb{C}^*$-equivariant A_∞-modules. Geom. Topol.* **16** (2012), no. 4, 2343–2389.

[Si] C. Simpson – *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. II.* IPubl. Math. I.H.É.S. **80** (1994), 5–79.

[To] B. Toën – *Derived algebraic geometry.* EMS Surv. Math. Sci. **1** (2014), no. 2, 153–240.

[To-Ve] B. Toën, G. Vezzosi – *Homotopical algebraic geometry II : Geometric stacks and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **193** (2008), no. 902, x+224 pp.

[Ya] S. Yalin – *Moduli stacks of algebraic structures and deformation theory.* À paraître dans J. Noncommut. Geom (prépublication arXiv :1411.5177).

Bertrand TOËN

Université de Toulouse
UMR 5219 du CNRS
Institut de Mathématiques de Toulouse
118, route de Narbonne
F–31062 Toulouse Cedex 9
E-mail : `Bertrand.Toen@math.univ-toulouse.fr`