Séminaire BOURBAKI Novembre 2016
69ème année, 2016-2017, n$^{\mathrm{o}}$ 1122

POSITIVITÉ DES IMAGES DIRECTES ET APPLICATIONS [d'après Bo Berndtsson]

par **Mihai PĂUN**

1. INTRODUCTION

Le but de ce texte est de présenter une partie des travaux récents de Bo Berndtsson [Bo09], [Bo11], [Bo15] ainsi que certaines de leurs nombreuses conséquences obtenues en analyse et géométrie complexe. En guise d'introduction, nous allons évoquer un beau résultat de géométrie convexe qui a été une importante source d'inspiration pour l'article [Bo09] et ceux qui ont suivi.

Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un ensemble convexe. On définit ses sections par rapport à la projection sur le 1$^{\text{er}}$ facteur :

$$\mathcal{A}_t := \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in \mathcal{A}\}\,. \tag{1}$$

Une des versions du théorème de Brunn-Minkowski (cf. e.g. [Ga]) s'énonce comme suit

Théorème 1.1. — *La fonction $t \to (\mathrm{Vol}\mathcal{A}_t)^{\frac{1}{n+1}}$ est concave.*

C'est un résultat fondamental en géométrie convexe ; une version « fonctionnelle » a été obtenue par Leindler-Prekopa, cf. e.g. [Pre].

Théorème 1.2 ([Pre]). — *Soit $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On définit la fonction $\widetilde{\varphi}$ par la formule suivante*

$$e^{-\widetilde{\varphi}(t)} := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi(t,x)} d\lambda(x). \tag{2}$$

Alors $\widetilde{\varphi}$ est convexe.

Compte tenu de l'importance de ce type de propriétés en géométrie convexe, il est naturel d'essayer d'en formuler et démontrer une version *complexe*. Cela veut dire qu'on remplace $\mathbb{R}^n$ par $\mathbb{C}^n$ et l'hypothèse φ *convexe* par φ *plurisousharmonique* (qu'on va abréger en *psh* par la suite). Malheureusement, la fonction $\widetilde{\varphi}$ qui en résulte – i.e., définie selon l'égalité (2) – peut ne pas être psh, comme le montre l'exemple suivant dû à C. Kiselman, cf. [Ki78]

Soit $\varphi(w,z) := |z-w|^2 - |z|^2$; c'est une fonction psh dans $\mathbb{C}^2$. Un calcul sans difficulté montre qu'on a $\widetilde{\varphi}(z) = -|z|^2 + c$, où c est une constante dont la valeur est sans importance ; on voit que $\widetilde{\varphi}$ n'est pas psh.

La généralisation naïve du théorème 1.2 n'est donc pas vraie. Afin d'obtenir la version juste, il faut changer un peu de point de vue, comme suit. La fonction $\widetilde{\varphi}$ dans (2) s'écrit

$$\widetilde{\varphi}(t) = \log \frac{1}{\int_{\mathcal{A}_t} e^{-\varphi(t,x)} d\lambda(x)} \tag{3}$$

et pour chaque $t \in \mathbb{R}$ on a

$$e^{\widetilde{\varphi}(t)} = \sup_{f\in\ker(d), \|f\|_t\leq 1} |f(x)|^2 \tag{4}$$

où $\|f\|_t^2 := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 e^{-\varphi(t,x)} d\lambda(x)$. On a noté d l'opérateur de Poincaré. Les égalités (3) et (4) sont equivalentes simplement parce qu'une fonction se trouve dans le noyau de l'opérateur d si et seulement si elle est constante.

L'analogue de l'opérateur d en analyse complexe est l'opérateur $\overline{\partial}$ et son noyau se trouve être l'espace des fonctions holomorphes. Dans (4), on devrait plutôt considerer le sup pour toutes les fonctions holomorphes de norme au plus un. L'exemple suivant [MY04] montre qu'on est sur la bonne voie. Soit ρ une fonction sousharmonique, et soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^2$ le domaine (de Hartogs) correspondant

$$\mathcal{D} := \left\{(t,z) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C} : |z|^2 < e^{-2\rho(t)}\right\}. \tag{5}$$

La tranche $\mathcal{D}_t \subset \mathbb{C}$ est le disque de rayon $e^{-\rho(t)}$, et la fonction analogue de $\widetilde{\varphi}$ s'écrit

$$e^{\widetilde{\varphi}(t,z)} = \sup_{\overline{\partial} f=0, \|f\|_t\leq 1} |f(z)|^2, \tag{6}$$

où la norme est $\|f\|_t^2 := \displaystyle\int_{\mathcal{D}_t} |f(z)|^2 d\lambda$. Autrement dit, $e^{\widetilde{\varphi}(t,z)}$ est le *noyau de Bergman* du domaine $\mathcal{D}_t$ évalué en z. Il se trouve que le disque a suffisamment de symétries pour pouvoir calculer son noyau de Bergman explicitement. On a

$$e^{\widetilde{\varphi}(t,z)} = \frac{1}{\pi\left(1-|z|^2 e^{2\rho(t)}\right)^2} \tag{7}$$

et donc on en déduit que $\widetilde{\varphi}$ est une fonction psh *dans l'ensemble des variables* (bien entendu le fait intéressant, c'est la positivité de la hessienne par rapport à t).

Parmi les premiers résultats qui pointent dans cette direction, on a choisi celui de F. Maitani-H. Yamaguchi ; le contexte est le suivant. Soit $\mathcal{D} \subset B\times\mathbb{C}$ un domaine pseudo-convexe, où B est la boule unité dans $\mathbb{C}$. Pour chaque $t \in B$ on définit le noyau de Bergman de la fibre $p^{-1}(t)$, où $p : \mathcal{D} \to B$ est la projection sur le 1[er] facteur :

$$K(t,\xi) := \sup_{f\in B_t(1)} |f(\xi)|^2 \tag{8}$$

avec

$$B_t(1) := \Big\{f \in \mathcal{O}(\mathcal{D}_t) : \int_{\mathcal{D}_t} |f|^2 d\lambda \leq 1\Big\}, \quad \mathcal{D}_t := p^{-1}(t) \tag{9}$$

Un premier résultat obtenu dans [MY04] est le suivant.

THÉORÈME 1.3 ([MY04]). — *La fonction* $(t, \xi) \to \log K(t, \xi)$ *est psh.*

La démonstration de ce résultat (cf. [MY04]) n'est pas excessivement difficile, mais elle repose sur des outils de la théorie du potentiel spécifiques à la dimension un (i.e., la dimension des fibres de p). En particulier, Maitani-Yamaguchi utilisent de manière essentielle le fait que le noyau de Bergman est la hessienne de la fonction de Robin et la formule de variation de Hadamard. Ces résultats n'ont pas d'analogue en plusieurs variables complexes.

Heureusement, B. Berndtsson a obtenu (cf. [Bo09]) une nouvelle preuve du théorème 1.3, ce qui lui a permis de généraliser ce résultat dans le cadre suivant.

Soit $\mathcal{D} = U \times \Omega \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ un domaine pseudoconvexe, et soit $\varphi \in \mathrm{Psh}(\overline{\mathcal{D}})$ une fonction psh sur $\mathcal{D}$ qu'on suppose dans un premier temps de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $\mathcal{D}$. Dans ce cas, on a $\mathcal{D}_t = \Omega$ et on note

$$A^2_t := \big\{f \in \mathcal{O}(\Omega) : \int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi(t,\cdot)} d\lambda < \infty\big\} \tag{10}$$

le noyau de Bergman pondéré correspondant à $(\Omega, e^{-\varphi(t,\cdot)})$. Soit $\mathcal{E} \to U$ le fibré de rang infini dont la fibre $\mathcal{E}_t$ est l'espace de Bergman A^2_t. On munit $\mathcal{E}_t$ du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_t := \int_\Omega f\overline{g} e^{-\varphi(t,\cdot)} d\lambda \tag{11}$$

et donc $\mathcal{E}$ est un fibré trivial, muni d'une structure métrique qui varie par rapport à t.

Le résultat de Berndtsson dans [Bo09] est le suivant.

THÉORÈME 1.4 ([Bo09]). — *Le fibré hermitien* $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$ *est positif au sens de Nakano.*

On remarque tout de suite que le théorème 1.4 est une généralisation de 1.3 : la positivité au sens de Nakano de $\mathcal{E}$ implique en particulier que la fonction

$$t \to \log \|\psi\|^2_{\star t} \tag{12}$$

est psh, pour toute section holomorphe ψ du fibré dual $\mathcal{E}^\star$ définie localement au voisinage d'un point de U. Dans (12), on note $\|\cdot\|^2_\star$ la norme induite sur $\mathcal{E}^\star$. Soit $t_0 \in B$ un point arbitraire, et soit σ une section de la projection $\mathcal{D} \to B$. On définit la section locale ψ de $\mathcal{E}^\star$ comme suit

$$\langle \psi, f\rangle := f(\sigma_t), \tag{13}$$

i.e. pour tout $f \in \mathcal{E}_t$ c'est l'évaluation au point σ_t. La norme de l'application d'évaluation coï ncide avec le noyau de Bergman, donc la fonction

$$t \to \log K(\sigma_t) \tag{14}$$

est psh, ce qu'il fallait démontrer. Remarquons au passage que la fonction (12) est psh *pour toute fonctionnelle holomorphe* ξ ; cela va jouer un rôle important par la suite.

Remarque 1.5. — Le cas où l'ensemble $\mathcal{D}$ n'est pas nécessairement un produit est une conséquence du théorème 1.4, en utilisant des fonctions poids adéquates, cf. [Bo09], [BP08].

Remarque 1.6. — L'énoncé 1.4 peut être également interprété comme une version complexe du théorème de Leindler-Prékopa mentionné au début de l'introduction. En effet, dans le contexte réel les espaces A^2_t s'identifient à $\mathbb{R}$ et donc la convexité de $\widetilde{\varphi}$ devient la positivité de la courbure au sens de Nakano.

Considérons à présent une application surjective propre $p : X \to Y$ dont la dimension relative est n. Ici X et Y désignent des variétés complexes non singulières. On suppose que X admet une métrique kählérienne, et que p est une submersion. Soit également un fibré en droites $(L, h_L) \to X$ muni d'une métrique h_L non singulière dont la forme de courbure est semi-positive.

On défini le *fibré canonique relatif* associé à p comme suit

$$K_{X/Y} := K_X - p^\star(K_Y); \tag{15}$$

c'est un objet central dans l'étude de la géométrie de p. Soit

$$\mathcal{F} := p_\star(K_{X/Y} + L) \tag{16}$$

l'image directe du fibré canonique relatif tensorisé par L. Alors $\mathcal{F}$ est un fibré vectoriel holomorphe, qu'on peut munir de la métrique suivante

$$\langle u, v\rangle_y := c_n \int_{X_y} u \wedge \overline{v} e^{-\varphi_L} \tag{17}$$

où $u, v \in \mathcal{F}_y = H^0(X_y, K_{X_y} + L)$ sont des $(n, 0)$-formes à valeurs dans $L|_{X_y}$, et où c_n est la constante unimodulaire habituelle.

Dans ce contexte, Berndtsson a établi le résultat suivant.

Théorème 1.7 ([Bo09]). — *Le fibré hermitien image directe* $(\mathcal{F}, \|\cdot\|)$ *est positif au sens de Nakano.*

On voit aisément la parenté entre les énoncés 1.4 et 1.7, respectivement. La condition de pseudoconvexité de $\mathcal{D}$ est remplacée par l'hypothèse « X est kählérienne », et la fonction psh φ devient la métrique h_L. L'espace des fonctions holomorphes A^2_t correspond à l'espace des sections $H^0(X_y, K_{X_y} + L)$. On remarquera que, du coup, on n'a pas besoin de trouver un substitut pour la mesure de Lebesgue utilisée pour définir la norme dans (17).

Le théorème 1.7 a engendré beaucoup de résultats dans des domaines divers de l'analyse et de la géométrie complexe. Nous allons en présenter ici un certain nombre ; *grosso modo*, on peut le classer en trois catégories comme suit.

1.1. Applications en analyse complexe

Il s'agit des articles [BL14], [BoB15]. Parmi les résultats qui se trouvent dans ces ouvrages, nous avons choisi de présenter et commenter dans ce texte les deux théorèmes suivants.

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert contenant l'origine, et soit $\varphi \in \mathrm{Psh}(\Omega)$ une fonction psh. On considère l'ensemble

$$\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{R}_+ : e^{-\lambda\varphi} \in L^1(\Omega, 0)\}; \tag{18}$$

autrement dit, Λ c'est l'ensemble des réels positifs λ tels que la fonction $e^{-\lambda\varphi}$ est localement intégrable au voisinage de l'origine.
Le résultat suivant a été conjecturé par Demailly-Kollár dans [DK01] et demontré par Berndtsson dans [BoB15].

Théorème 1.8 ([BoB15]). — *L'ensemble $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ est ouvert.*

Le cas de la dimension complexe deux de la conjecture de Demailly-Kollár a été établi auparavant par Favre-Jonsson, cf. [FJ1], [FJ2]. Peu après la publication de [Bo15], Guan-Zhou ont obtenu une version beaucoup plus générale du théorème 1.8, cf. [GZ1], [GZ2]. Nous allons présenter l'argument de 1.8 qui a été « extrait » par Berndtsson de la preuve de Guan-Zhou, car c'est plus simple que la preuve originale et il est très élégant.

Un autre résultat – obtenu en collaboration avec L. Lempert – où le théorème 1.7 intervient de manière essentielle est la version « optimale » du célèbre théorème d'extension de Ohsawa-Takegoshi, dont voici le cas particulier qu'on va traiter ici.

Théorème 1.9 ([Bl1], [GZ2], [BL14]). — *Soit $p : X \to \mathbb{D}_r$ une submersion propre, où X est une variété kählérienne et $\mathbb{D}_r \subset \mathbb{C}$ est le disque de rayon r. Soit $L \to X$ un fibré en droites, muni d'une métrique singulière h_L dont le courant de courbure est positif, et dont la restriction à la fibre centrale $X_0 = p^{-1}(0)$ n'est pas identiquement $+\infty$. Soit u une section du fibré $K_{X_0} + L$, telle que $c_n \int_{x_0} u \wedge \overline{u} e^{-\varphi_L} < \infty$. Alors il existe une section U de $K_X + L$, telle que :*

(a) *Sur la fibre centrale on a $U|_{X_0} = u \wedge dp$;*

(b) *On a l'estimée suivante*

$$\frac{1}{\pi r^2} \int_X |U|^2 e^{-\varphi_L} \leq \int_{X_0} |u|^2 e^{-\varphi_L} \tag{19}$$

Bien entendu, la nouveauté dans l'énoncé 1.9 est la constante $\frac{1}{\pi r^2}$ qui mesure la norme de l'extension de u dans (19). Le cas d'une fibration triviale montre que cette constante est optimale. Il est vrai que dans la majorité des applications du théorème de Ohsawa-Takegoshi la valeur de cette constante n'est pas importante, mais nous allons évoquer plus loin quelques cas où cela est crucial.

1.2. Applications en géométrie algébrique

Comme on l'a vu dans l'introduction, la positivité au sens de Nakano du fibré $\mathcal{E}$ implique la variation psh des noyaux de Bergman définis fibre à fibre. Dans le cadre des submersions propres $p : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, les espaces de fonctions holomorphes définies sur les tranches du domaine considéré sont remplacés par des sections du $K_{\mathcal{X}_y} + L|_{\mathcal{X}_y}$, et les noyaux de Bergman se recollent en une métrique sur le fibré $K_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} + L$, qu'on va appeler par la suite *métrique de Bergman.*

Le théorème 1.7 implique la positivité de la courbure de la métrique de Bergman ; dans l'article [BP08], ce résultat est généralisé dans plusieurs directions. Les motivations principales pour obtenir des énoncés plus complets proviennent de la géométrie algébrique. Pour commencer, les applications $p : X \to Y$ qu'on considère ne sont pas des submersions en général. Typiquement, on doit considerer des *espaces fibrés* i.e. des applications surjectives p entre des variétés projectives X et Y non singulières, dont la fibre générique est connexe. Ensuite, le fibré L est remplacé par un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif dont le faisceau multiplicateur est trivial. En somme, cela veut dire qu'on doit étudier plutôt l'image directe

$$\mathcal{F}_m := p_\star(mK_{X/Y} + L),$$

où m est un entier positif et (L, h_L) est un fibré en droites.

Dans ce contexte, le résultat principal dans [BP08] est le suivant.

THÉORÈME 1.10 ([BP08]). — *Soit $p : X \to Y$ un espace algébrique fibré, et soit (L, h_L) un fibré en droites muni d'une métrique h_L dont le courant de courbure est positif. Soit $m \geq 1$ un entier. On suppose qu'il existe un point très générique $y \in Y$ et une section non nulle du fibré $mK_{X_y} + L$ tels que*

$$\int_{X_y} |u|^{2/m} e^{-\frac{1}{m}\varphi_L} < \infty. \tag{20}$$

Alors le fibré $mK_{X/Y} + L$ admet une métrique $h^{(m)}_{X/Y}$ telle que :

(a) *le courant de courbure correspondant a $h^{(m)}_{X/Y}$ est positif ;*

(b) *la métrique $h^{(m)}_{X/Y}$ est définie explicitement sur un ensemble $\mathcal{X} := p^{-1}(\mathcal{Y})$, où $\mathcal{Y} \subset Y$ est tel que $Y \setminus \mathcal{Y}$ est Zariski-dense.*

Si $m = 1$, alors $h^{(1)}_{X/Y}$ coï ncide avec la métrique de Bergman au-dessus de l'ensemble $\mathcal{Y}$. Si $m \geq 2$, alors c'est une version $L^{\frac{2}{m}}$ de cette construction, comme on le verra plus tard. Nous allons expliquer dans ce texte les points clefs de la démonstration de 1.10, ainsi qu'un certain nombre de résultats qui utilisent ce théorème. Pour l'instant, nous allons rappeler une conjecture importante en géométrie algébrique, qui représente une motivation très forte pour l'analyse de ces questions.

Compte tenu des nombreux ouvrages qui lui sont consacrés (cf. [CH01], [F78], [H04], [K82], [K85], [Kol] [PS1], [Ts11], [Vi1], [Vi2]...), le problème suivant (formulé par S. Iitaka) occupe une place centrale en géomérie birationnelle.

CONJECTURE 1.11. — *Soit $p : X \to Y$ un espace fibré ; on a l'inégalité suivante*

$$\kappa(X) \geq \kappa(Y) + \kappa(F), \tag{21}$$

où F est une fibre générique de p.

Dans l'énoncé précédent, on note $\kappa(X)$ la dimension de Kodaira de X. C'est un invariant fondamental associé à X qui mesure l'ordre de croissance asymptotique de la dimension de l'espace de sections de mK_X lorsque $m \to \infty$. Les sections holomorphes du fibré mK_X s'appellent des formes pluricanoniques. La plupart des articles cités ci-dessus reposent sur l'analyse des propriétés de positivité du fibré canonique relatif de p, noté $K_{X/Y}$. Ceci s'explique très facilement : on voudrait construire des sections pluricanoniques sur X via le produit tensoriel des images inverses de formes pluricanoniques sur la base avec les *extensions* des formes qu'on a sur la fibre générique de p. La positivité de $K_{X/Y}$ est nécessaire pour obtenir ces extensions.

Les travaux de P. Griffiths [Griff70], [Griff81] se trouvent à la base des résultats obtenus dans ce domaine. Il montre en particulier dans [Griff70] que l'image directe du fibré canonique relatif correspondant à une submersion est positive (au sens de Griffiths) lorsqu'il est muni de la métrique de Hodge. Pour ceci, il utilise de manière cruciale le fait que $p_\star(K_{X/Y})$ est un sous-fibré holomorphe d'un fibré plat, muni de la connexion de Gauss-Manin.

Remarque 1.12. — Présenté ainsi, cet énoncé de positivité peut paraître suspect – car on apprend aux étudiants que la courbure décroît pour les sous-fibrés, et comme le fibré plat a une courbure nulle... Mais le point important, c'est que la forme hermitienne qui induit la métrique de Hodge *n'est pas définie positive.*

Remarque 1.13. — Dans le cas où L est trivial, $m = 1$ et $\dim Y = 1$, le théorème 1.10 est une conséquence d'un résultat dû à T. Fujita, cf. [F78] (plus exactement, ce sont les arguments présentés dans [F78] qui impliquent 1.10). Dans sa preuve, il utilise le théorème de positivité de Griffiths, combiné à une analyse du comportement de la métrique de Hodge (= métrique de Bergman dans notre terminologie) au voisinage des points singuliers de p (ceci utilise fortement le fait d'avoir une base Y de dimension un). Par contre, si L est arbitraire, alors l'image directe peut très bien ne plus être un sous-fibré d'un fibré plat et c'est le théorème 1.7 qui remplace le résultat de Griffiths.

Parmi les résultats récents qui utilisent 1.10, on peut compter [CP] où on obtient une confirmation de 1.11 dans le cas où Y est une variété abélienne. Il se trouve que ce sont les propriétés métriques des faisceaux $p_\star(mK_{X/Y})$ qui (pour une fois...) font la différence par rapport aux méthodes purement algébriques. Nous allons faire quelques commentaires sur la démonstration de [CP] dans la section 4, en suivant l'approche simplifiée extrêmement élégante de [HPS].

1.3. Unicité des métriques extrémales

Soit (X, ω) une variété kählérienne compacte. Un problème fondamental en géométrie différentielle est de trouver une métrique « canonique » dans la classe de cohomologie de ω, e.g. qui reflète des propriétés des autres invariants (topologiques, analytiques...) de X. À ce jour, le meilleur exemple qu'on peut donner dans ce sens, c'est le théorème d'uniformisation pour les surfaces de Riemann.

La notion de *métrique extrémale* a été introduite par E. Calabi dans les années 1980, dans le but de généraliser ce type de résultats pour les variétés kählériennes en dimension supérieure à un.

Une classe importante de ce type d'objets est constituée par les métriques de Kähler-Einstein. Par définition, une métrique kählérienne g se trouve dans cette classe si on a

$$\mathrm{Ricci}_g = \lambda g, \tag{22}$$

où λ est -1, 0 ou 1, et où Ricci_g désigne la courbure de Ricci de g.

Une métrique kählérienne g est dite extrémale si le gradient $\nabla^{1,0}$ de sa courbure scalaire est un champ de vecteurs homolorphe sur X. Par exemple, une métrique kählérienne dont la courbure scalaire est constante est extrémale. Notons que cette condition s'exprime par une équation (très compliquée) d'ordre quatre sur le potentiel de g. Nous renvoyons a [Sek] pour une excellente présentation des résultats et conjectures autour de ce type de métriques.

Nous allons mentionner maintenant quelques résultats en rapport avec la question de l'unicité de ces métriques, en suivant [Bo15], [BeBe14].

Soit $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ la classe de cohomologie de la métrique de référence ω. On note $\mathcal{P}_\alpha$ l'espace des potentiels de métriques kählériennes dans la classe α, i.e.

$$\mathcal{P}_\alpha := \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(X) : \omega + dd^c\phi > 0\}, \tag{23}$$

où l'opérateur dd^c dans (23) vaut $\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}$. Dans [Mab], T. Mabuchi a introduit une structure riemannienne sur $\mathcal{P}_\alpha$ (qui devient ainsi une variété de dimension infinie), dont voici la version infinitésimale. Un vecteur tangent à $\mathcal{P}_\alpha$ au point ϕ est simplement une fonction $v : X \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa longueur est donnée par la formule

$$\|v\|_\phi^2 := \int_X |v|^2(\omega + dd^c\phi)^n. \tag{24}$$

Les géodésiques pour la métrique de Mabuchi peuvent être décrites de la manière suivante (cf. [Sem92], [DH], [Dar]). Soit $S := \{z = a + ib \in \mathbb{C} : 0 \le b \le 1\}$; un chemin $t \to \phi_t \in \mathcal{P}_\alpha$ paramétré par $t \in [0,1]$ définit une fonction

$$\Phi : S \times X \to \mathbb{R}, \quad \Phi(z,x) := \phi_b(x). \tag{25}$$

Alors (ϕ_t) est une géodésique entre $\omega_0 := \omega + dd^c\phi_0$ et $\omega_1 := \omega + dd^c\phi_1$ si

$$(\pi^\star\omega + dd^c\Phi)^{n+1} = 0 \tag{26}$$

autrement dit, si l'équation de Monge-Ampère homogène (26) est satisfaite, avec ω_0 et ω_1 comme conditions au bord.

Plusieurs exemples ([DL]) montrent qu'en général on ne peut pas construire de géodésiques entre deux métriques kählériennes. Par contre, les travaux fondamentaux de X. Chen et Z. Blocki (cf. [Chen00], [Bl2]) montrent qu'il existe une fonction Φ de classe $\mathcal{C}^{1,1}$ qui vérifie (26) au sens de Bedford-Taylor, et telle que $\Phi(t,\cdot) \in \overline{\mathcal{P}}_\alpha$ (donc $\omega + dd^c\Phi(t,\cdot)$ peut avoir des valeurs propres nulles). Dans les applications qu'on va discuter dans la suite, le manque de régularité n'est pas vraiment un problème ; par contre, ce qui pose de vraies difficultés, c'est le défaut de positivité stricte.

Dans [Bo15], Berndtsson montre l'énoncé suivant.

THÉORÈME 1.14 ([Bo15]). — *Soit X une variété de Fano. La fonctionnelle de Ding est convexe le long de l'unique géodésique entre deux métriques kählériennes dans la classe $\alpha = c_1(X)$.*

Correctement interprété, ce résultat est une conséquence immédiate du théorème 1.7 dans le cas d'une géodésique de classe $\mathcal{C}^\infty$. Le point important dans [Bo15], c'est de montrer que cela reste vrai pour les géodésiques au sens faible dont on dispose.
Comme conséquence de la démonstration du 1.14, Berndtsson obtient également une condition suffisante pour que la fonctionnelle de Ding soit linéaire le long d'une géodésique faible. Ceci est important dans la nouvelle preuve du théorème suivant de Bando-Mabuchi.

THÉORÈME 1.15 ([BM87], [Bo15]). — *Soit X une variété de Fano, et soient $\omega_0, \omega_1 \in c_1(X)$ deux métriques de Kähler-Einstein. Alors il existe un automorphisme $f \in \mathrm{Aut}(X)$ tel que $f^\star\omega_1 = \omega_0$.*

Nous rappelons qu'il est facile d'établir l'unicité des métriques de Kähler-Einstein (22) si $\lambda \in \{-1, 0\}$. Par contre, la preuve originale de Bando-Mabuchi [BM87] dans le cas $\lambda = 1$ ci-dessus est d'une grande complexité. Qui plus est, certaines identités dans [BM87] semblent « miraculeuses » : on arrive à les comprendre techniquement, mais elles n'ont pas encore trouvé une explication intuitive (cf. [Siu87] pour quelques commentaires en ce sens).
Les techniques de [Bo15] ont donné de très belles applications dans [BBGZ13], [BBGZ15].

Les derniers résultats qu'on va mentionner ici sont le fruit de la collaboration de B. Berndtsson avec R. Berman. Le théorème suivant répond affirmativement à une conjecture de X. Chen.

THÉORÈME 1.16 ([BeBe14]). — *La fonctionnelle de Mabuchi est convexe le long des géodésiques faibles entre deux métriques kählériennes.*

En combinant ce théorème avec certains résultats techniques de Calabi et de Bando-Mabuchi, cf. [BM87], le résultat suivant en découle.

THÉORÈME 1.17 ([BeBe14]). — *Soient ω_0, ω_1 deux métriques extrémales dans la classe α. Alors il existe $f \in \mathrm{Aut}(X)$ tel que $f^\star \omega_1 = \omega_0$.*

2. LES RÉSULTATS PRINCIPAUX

Dans cette partie, nous allons présenter les grandes lignes de la preuve des théorèmes 1.4 et 1.7, respectivement. Pour commencer, on rappelle quelques notions de géométrie différentielle, cf. [Kob].

2.1. Courbure des sous-fibrés et positivité

Soit (E, h_E) un fibré hermitien holomorphe de rang r. Si p, q sont deux entiers positifs, on note $\mathcal{C}^\infty_{p,q}(X, E)$ l'espace des formes $\mathcal{C}^\infty$ de type (p, q) à valeurs dans E. Soit $D_E = \overline{\partial} + D'_E$ la connexion de Chern associée à (E, h_E), où $\overline{\partial}$ est la différentielle anti-holomorphe et

$$D'_E : \mathcal{C}^\infty(X, E) \to \mathcal{C}^\infty_{1,0}(X, E) \tag{27}$$

est la partie de type $(1, 0)$ de D_E. On note $i\Theta(E, h_E)$ le tenseur de courbure de Chern, ainsi défini

$$\Theta(E, h_E) = D_E \circ D_E \in \mathcal{C}^\infty_{1,1}\big(X, \mathrm{End(E)}\big). \tag{28}$$

Soient $(t_1, \dots, t_m)$ des coordonnées locales définies sur un ouvert $\Omega \subset X$; le tenseur de courbure s'écrit

$$i\Theta(E, h_E) = i \sum_{1 \le j,k \le n} \Theta^E_{jk} dt_j \wedge d\bar{t}_k \tag{29}$$

où les Θ^E_{jk} désignent des endomorphismes de $E|_\Omega$.

Il se trouve que $i\Theta(E, h_E)$ induit une forme hermitienne θ_E sur $T_X \otimes E$, comme suit. Si $u = \displaystyle\sum_j u_j \frac{\partial}{\partial t_j}$ est une section locale de ce fibré, alors on pose

$$\theta_E(u, u) := \sum_{j,k} \langle \Theta^E_{jk} u_j, u_k \rangle. \tag{30}$$

On rappelle les deux notions suivantes.

Définition 2.1. — *On dit que* (E, h_E) *est positif au sens de Nakano si*

$$\theta_E(u, u) \geq 0$$

pour toute section u *de* $T_X \otimes E$*.*

Définition 2.2. — *On dit que* (E, h_E) *est positif au sens de Griffiths si*

$$\theta_E(v \otimes s, v \otimes s) \geq 0$$

pour toute section v *de* T_X *et pour toute section* s *de* E*.*

La propriété de positivité au sens de Nakano (et sa version stricte) est indispensable afin d'obtenir des théorèmes d'annulation pour certains groupes de cohomologie à valeurs dans des fibrés vectoriels. Par contre, la positivité plus faible au sens de Griffiths se comporte nettement mieux du point de vue fonctoriel, ce qui la rend très utile, e.g. en géométrie algébrique.

Considérons à présent un morphisme injectif $j : S \to E$. Alors h_E induit une métrique notée h_S sur S, et soit $S^\perp \subset E$ l'orthogonal de l'image $j(S) \subset E$ par rapport à la métrique h_E. Soit u une section de S ; en l'identifiant avec son image dans E, on écrit

$$D_E(u) =: D_S(u) + \beta(u), \tag{31}$$

où les deux termes dans le membre de droite de (31) sont les projections sur S et $S^\perp$, respectivement. Des considérations faciles montrent que D_S est la connexion de Chern correspondant à (S, h_S) et que $\beta \in \mathcal{C}^\infty_{1,0}\big(X, \mathrm{Hom}(S, S^\perp)\big)$. On déduit l'égalité suivante pour les formes de courbure (cf. notations précédentes)

$$\langle \Theta^E_{jk} u_j, u_k \rangle = \langle \Theta^S_{jk} u_j, u_k \rangle + \langle \beta u_j, \beta u_k \rangle \tag{32}$$

pour toute paire d'indices (j, k) ; ici $u = \displaystyle\sum_l u_l \frac{\partial}{\partial t_l}$ est une section locale $T_X \otimes S$.

Nous n'allons pas développer ce point de vue dans la suite, mais il se trouve que les considérations précédentes restent valables dans le cas d'un fibré E de rang infini. Dans ce cadre, on suppose que les fibres de E sont localement équivalentes à un produit $\Omega \times H$ où $\Omega \subset X$ est un ensemble ouvert et H est un espace de Hilbert. La connexion de Chern est définie exactement comme dans le cas d'un fibré de rang fini, en imposant la condition de compatibilité avec le produit scalaire. Les coefficients de la forme de courbure Θ^E_{jk} deviennent des opérateurs sur E définis presque partout, cf. [Bo09]. La formule (32) sera la même.

2.2. Preuve du théorème 1.4

Preuve (esquisse) — On suppose que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et strictement psh au voisinage du domaine $U \times \Omega \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$. Soit $E := U \times H$ le fibré trivial dont la fibre est $H := L^2(\Omega)$, l'espace de Hilbert des fonctions L^2 par rapport à la mesure de Lebesgue. On peut munir E d'une métrique h_E

$$\langle f, g\rangle_t := \int_\Omega f\overline{g} e^{-\varphi(t,\cdot)} d\lambda. \tag{33}$$

La connexion de Chern correspondante est

$$D'_E(u) = \sum_j \left(u_{t_j} - \varphi_{t_j} u\right) dt_j \tag{34}$$

où dans (34) on note $u_{t_j} := \dfrac{\partial u}{\partial t_j}$. Donc le tenseur de courbure sera l'opérateur suivant

$$\langle \Theta(E, h_E)u, u\rangle_t = \sum_{j,p} \int_\Omega \varphi_{j\overline{p}} u_j \overline{u}_p e^{-\varphi(t,\cdot)} d\lambda \tag{35}$$

où $\varphi_{j\overline{p}} := \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t_j \partial \overline{t}_p}$. On a une inclusion de fibrés

$$0 \to \mathcal{E} \to E \tag{36}$$

et nous allons utiliser la formule de Griffiths (32) afin de calculer la courbure de $\mathcal{E}$. La quantité qu'on doit évaluer est

$$\int_\Omega \sum_{j,p} \varphi_{j\overline{p}} u_j \overline{u}_p e^{-\varphi(t,\cdot)} d\lambda - \Big\| \sum_s \beta(u_s)\Big\|_t^2. \tag{37}$$

Plus précisément, on doit montrer que (37) est positive si $u = \displaystyle\sum_l u_l \frac{\partial}{\partial t_l}$ est tel que les coefficients u_j sont des fonctions holomorphes. La relation (34), combinée avec la définition de β, implique

$$\sum_s \beta(u_s) = \pi_\perp\Big(\sum_j \varphi_j u_j\Big) := \rho \tag{38}$$

où $\pi_\perp$ est la projection (fibre à fibre) sur l'espace orthogonal à $\mathcal{E}$ dans E par rapport à la métrique L^2.

La remarque importante est que la restriction ρ_t de ρ sur la fibre E_t est la *solution de norme minimale* de l'équation

$$\overline{\partial} \rho_t = \sum_\alpha \Big(\sum_j u_j \varphi_{j\overline{\alpha}}\Big) d\overline{z}_\alpha. \tag{39}$$

Ceci est la conséquence du fait que ρ_t est orthogonale sur l'espace des fonctions holomorphes, cf. (38).

Par ailleurs, le théorème de Hörmander [H65] montre l'existence d'une solution w de (39) telle que

$$\int_\Omega |w|^2 e^{-\varphi(t,\cdot)} d\lambda \leq \int_\Omega \sum_{\alpha,\beta} \varphi^{\alpha\overline{\beta}} \eta_{\overline{\beta}} \overline{\eta}_{\overline{\alpha}} e^{-\varphi(t,\cdot)} d\lambda \tag{40}$$

où $\eta_{\overline{\alpha}} := \sum_j u_j \varphi_{j\overline{\alpha}}$. Comme ρ_t est la solution de norme minimale, on a

$$\|\rho_t\|^2 \leq \int_\Omega \sum_{\alpha,\beta} \varphi^{\alpha\overline{\beta}} \eta_{\overline{\beta}} \overline{\eta}_{\overline{\alpha}} e^{-\varphi(t,\cdot)} d\lambda. \tag{41}$$

La différence (37) est donc minorée par

$$\int_\Omega \big(\varphi_{j\overline{p}} - \varphi^{\alpha\overline{\beta}} \varphi_{j\overline{\beta}} \varphi_{\alpha\overline{p}}\big) u_j \overline{u}_p d\lambda \tag{42}$$

qui est positive, compte tenu du fait que φ est psh. □

Remarque 2.3. — Dans le contexte actuel, c'est l'espace E des fonctions L^2 qui joue le rôle du fibré plat dans la preuve de Griffiths [Griff70]. On peut pousser l'analogie un peu plus loin pour dire que le théorème de Hörmander se substitue ici à la théorie de Hodge.

2.3. Preuve du théorème 1.7

Nous allons discuter ici un cas particulier du théorème 1.7, qui concerne les propriétés de la forme de courbure du fibré $\mathcal{F} := p_\star(K_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} + L)$. On rappelle que $p : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est une submersion propre, et (L, h_L) est un fibré hermitien en droites, tel que $\Theta_{h_L}(L) \geq 0$. Pour commencer, on rappelle brièvement quelques résultats concernant la structure complexe et métrique de $\mathcal{F}$.

2.3.1. *Structure complexe de l'image directe.* — Sous les hypothèses ci-dessus, le faisceau image directe $\mathcal{F}$ est un fibré vectoriel. Ceci est une conséquence d'un énoncé qu'on rappelle maintenant, cf. [OT].

Soit $y \in \mathcal{Y}$ un point arbitraire. On note $\mathcal{X}_y = p^{-1}(y)$ la fibre de p au-dessus de y. Soit $y \in \Omega \subset \mathcal{Y}$ un ouvert de coordonnées, et soit $dt := dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_m$ la forme de degré maximale sur Ω corespondant aux coordonnées $t_1, \ldots, t_m$ définies sur Ω.

Théorème 2.4 ([OT]). — *Soit $p : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ une submersion propre, dont l'espace total $\mathcal{X}$ est une variété kählérienne. Soit $(L, h_L) \to \mathcal{X}$ un fibré hermitien en droites, tel que $\Theta_{h_L}(L) \geq 0$. Considérons une section holomorphe u du fibré $K_{\mathcal{X}_y} + L|_{\mathcal{X}_y}$. Alors il existe une section U du fibré $K_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} + L|_{p^{-1}(\Omega)}$ telle que sur la fibre $\mathcal{X}_y$ on ait*

$$U|_{\mathcal{X}_y} = u \wedge p^\star dt. \tag{43}$$

Ceci montre que $\mathcal{F}$ est un fibré vectoriel. Dans le cas où L est trivial, ce résultat est une conséquence de la théorie de Hodge.

Nous rappelons maintenant la définition de la structure complexe de $\mathcal{F}$. Soit v une section de $\mathcal{F}|_\Omega$, où $\Omega \subset \mathcal{Y}$ est un ouvert de coordonnées. En suivant [MT1], [MT2], on peut interpréter v comme une collection de $(n,0)$ formes holomorphes sur des ouverts de coordonnées de $p^{-1}(\Omega)$ *modulo* les sections locales du fibré $\Lambda^{n-1}T^\star_{\mathcal{X}} \wedge p^\star T^\star_{\mathcal{Y}}$. De façon alternative, on peut représenter v par une $(n,0)$ forme globale sur $p^{-1}(\Omega)$ dont la restriction aux fibres de p est holomorphe – c'est le point de vue préféré dans [Bo09]. Dans la suite, nous allons noter $\mathbf{v}$ un tel représentant de v.

Définition 2.5. — *La section v de $\mathcal{F}|_\Omega$ est holomorphe si $\overline{\partial}(\mathbf{v} \wedge p^\star dt) = 0$.*

La notion qu'on vient d'introduire est manifestement indépendante du représentant choisi. En conclusion, v est holomorphe si la section $v \wedge p^\star dt$ du fibré $K_{\mathcal{X}} + L|_{p^{-1}\Omega}$ est holomorphe au sens habituel. On peut alors écrire

$$\overline{\partial}\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{m} \eta^k \wedge dt_k, \tag{44}$$

où les η^k sont des formes du type $(n-1,1)$ qui dépendent clairement de $\mathbf{v}$, mais par contre leur restriction aux fibres de p dépend seulement de v.

2.3.2. *Connexion de Chern.* — Le fibré holomorphe $\mathcal{F}$ est muni d'une métrique naturelle $h_{\mathcal{F}}$, cf. (17), dont on rappelle ici l'expression. Soient u, v deux sections locales de $\mathcal{F}|_\Omega$. Leur produit scalaire en $y \in \Omega$ est

$$\langle u, v\rangle_y := c_n \int_{\mathcal{X}_y} \mathbf{u} \wedge \overline{\mathbf{v}} e^{-\varphi_L} \tag{45}$$

– avec les conventions et abus de notations habituels.

On s'intéresse par la suite à la connexion de Chern du fibré holomorphe hermitien $\mathcal{F}$. Soit u une section de $\mathcal{F}$, et soit $\mathbf{u}$ un représentant de u. En particulier $\mathbf{u}$ est une $(n,0)$ forme à valeurs dans L. Donc l'expression

$$D'_L(\mathbf{u}) \tag{46}$$

est une $(n+1,0)$–forme à valeurs dans L. On note D'_L la composante $(1,0)$ de la connexion de Chern de (L, h_L). Localement sur $p^{-1}(\Omega)$ on peut donc écrire

$$D'_L(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^{m} \mu^j \wedge dt_j. \tag{47}$$

Pour chaque indice j, les restrictions aux fibres de p $\mu^j|_{\mathcal{X}_y}$ des $(n,0)$-formes à valeur dans L dans (47) sont bien définies, mais elles dépendent du représentant $\mathbf{u}$. De plus, il se peut très bien que ces restrictions ne soient pas holomorphes. Néanmoins, on a l'énoncé suivant.

Lemme 2.6 ([Bo09]). — *La projection orthogonale* $\Pi(\mu^j|_{\mathcal{X}_y})$ *de* $\mu^j|_{\mathcal{X}_y}$ *sur l'espace des sections holomorphes de* $K_{\mathcal{X}_y} + L|_{\mathcal{X}_y}$ *est indépendante du représentant* $\mathbf{u}$*, et on a*

$$D'_{\mathcal{F}}(u)_y = \sum_j \Pi(\mu^j|_{\mathcal{X}_y}) \otimes dt_j. \tag{48}$$

La preuve de ce lemme est facile, et nous n'allons pas détailler l'argument ici. Notons cependant que pour évaluer la quantité – assez incommode –

$$d'\langle u, v\rangle,$$

Berndtsson procède ainsi : soit $\rho = \sum_j \phi_j \widehat{dt_j} \wedge d\bar{t}$ une forme $\mathcal{C}^\infty$ de type $(m-1, m)$ à support compact dans un ouvert Ω de $\mathcal{Y}$. On doit calculer

$$-\int_\Omega \langle u, v\rangle_y d\rho = -c_n \int_{p^{-1}(\Omega)} u \wedge \overline{v} e^{-\varphi_L} \wedge d\rho \tag{49}$$

et le lemme s'ensuit par une simple intégration par parties. Ce principe de calcul – au sens faible – sera également utilisé dans le paragraphe suivant. Il offre une alternative élégante à l'approche qui consiste à fixer une fibre de p et travailler par rapport à des coordonnées données par la famille de structures complexes intégrables induites par p, cf. [Griff70].

2.3.3. *Calcul de la forme de courbure.* — Nous allons indiquer la preuve du théorème seulement dans le cas où la base $\mathcal{Y}$ est de dimension un. Le cas d'une base de dimension arbitraire est un peu plus technique, mais les difficultés principales sont déjà visibles dans la situation que nous allons présenter par la suite.

Soit $\mathbf{u}$ un représentant de la section holomorphe u de $\mathcal{F}$. On peut écrire

$$\overline{\partial}\mathbf{u} = dt \wedge \eta, \quad D'_L\mathbf{u} = dt \wedge \mu \tag{50}$$

où η et μ sont des $(n-1, 1)$ et $(n, 0)$ formes à valeur dans L respectivement. Leur restriction aux fibres de p dépend uniquement de u. La norme

$$\|\mathbf{u}\|^2 = p_\star\big(c_n \mathbf{u} \wedge \overline{\mathbf{u}} e^{-\varphi}\big) \tag{51}$$

est égale à l'image directe de la forme de type (n, n) ci-dessus. Compte tenu de cela, quelques calculs faciles – faits comme dans (49), au sens faible – montrent qu'on a la formule suivante

$$\Delta\|u\|^2 = -c_n \frac{p_\star\big(\Theta_L \wedge \mathbf{u} \wedge \overline{\mathbf{u}} e^{-\varphi}\big)}{idt \wedge d\bar{t}} + c_n \int_{\mathcal{X}_t} \eta \wedge \overline{\eta} e^{-\varphi} + c_n \int_{\mathcal{X}_t} \mu \wedge \overline{\mu} e^{-\varphi}, \tag{52}$$

où Δ est l'opérateur de Laplace dans $\mathbb{C}$.
Par ailleurs, on a

$$\Delta\|u\|^2 idt \wedge d\bar{t} = -\langle\Theta_{h_{\mathcal{F}}}(\mathcal{F})u, u\rangle + \langle D'_{\mathcal{F}}u, D'_{\mathcal{F}}u\rangle. \tag{53}$$

Fixons le point $0 \in \mathcal{Y}$; les formules (52) et (53) donnent dans ce cas

$$\frac{\langle\Theta_{h_{\mathcal{F}}}(\mathcal{F})u, u\rangle}{idt \wedge d\bar{t}} = c_n \frac{p_\star\big(\Theta_L \wedge \mathbf{u} \wedge \overline{\mathbf{u}} e^{-\varphi}\big)}{idt \wedge d\bar{t}} - c_n \int_{\mathcal{X}_t} \eta \wedge \overline{\eta} e^{-\varphi} + \|D'_{\mathcal{F}}u\|^2 - \|\mu\|_0^2. \tag{54}$$

Dans le membre de droite de la formule précédente, il y a quelques termes qu'on doit analyser de plus près, notamment les trois derniers.

(a) On a vu dans le paragraphe précédent que la dérivée de u en $t = 0$, i.e $D'_{\mathcal{F}}u$ coïncide avec la projection orthogonale de μ sur l'espace des sections holomorphes de $K_{\mathcal{X}_0} + L$. Alors la différence

$$\|D'_{\mathcal{F}}u\|_0^2 - \|\mu\|_0^2 \tag{55}$$

sera nulle si on peut choisir le représentant $\mathbf{u}$ tel que μ soit holomorphe.

(b) La forme $\eta|_{\mathcal{X}_0}$ est de type $(n-1, 1)$, donc si η est primitive par rapport à une métrique ω, alors le terme $-c_n \int_{\mathcal{X}_t} \eta \wedge \overline{\eta} e^{-\varphi}$ dans (54) est semi-positif.

Le lemme suivant montre que c'est en effet possible de choisir un représentant $\mathbf{u}$ qui convient.

Lemme 2.7 ([Bo09]). — *Soit ω une métrique kählérienne sur $\mathcal{X}$. On peut choisir un représentant $\mathbf{u}$ de la section u pour lequel les formes η et ν définies par* (50) *ont les propriétés suivantes.*

(i) *La restriction $\eta|_{\mathcal{X}_0}$ est primitive par rapport à ω.*

(ii) *La restriction $\mu|_{\mathcal{X}_0}$ de μ à $\mathcal{X}_0$ est une forme holomorphe.*

Preuve (esquisse) — Soit $\widetilde{\mathbf{u}}$ un représentant arbitraire de u. On voudrait déterminer une forme $\mathbf{v}$ de type $(n-1, 0)$ telle que $\mathbf{u} := \widetilde{\mathbf{u}} + \mathbf{dt} \wedge \mathbf{v}$ satisfait (i) et (ii). Si on note $\widetilde{\eta}$ et $\widetilde{\mu}$ les formes induites par $\widetilde{\mathbf{u}}$ (cf. (50)), alors $\mathbf{v}$ doit satisfaire les équations suivantes

$$\widetilde{\eta} \wedge \omega = \overline{\partial}(\mathbf{v} \wedge \omega), \quad \overline{\partial}\,(\widetilde{\mu} - D'_L\mathbf{v}) = 0 \tag{56}$$

sur la fibre $\mathcal{X}_0$. Comme $D'_L\mathbf{v} = \overline{\partial}^\star(\mathbf{v} \wedge \omega)$, la seconde équation dans (56) est équivalente à la suivante

$$\widetilde{\mu}_\perp = \overline{\partial}^\star(\mathbf{v} \wedge \omega) \tag{57}$$

où $\widetilde{\mu}_\perp$ désigne la projection de $\widetilde{\mu}$ sur l'orthogonal de l'espace des formes holomorphes. Si on note $\alpha := \mathbf{v} \wedge \omega$, alors le système (56) est équivalent à

$$\overline{\partial}\alpha = \widetilde{\eta} \wedge \omega \tag{58}$$

et

$$\overline{\partial}^\star\alpha = \widetilde{\mu}_\perp. \tag{59}$$

L'égalité (50) et la définition de $\widetilde{\mu}_\perp$ montrent qu'on peut résoudre séparément les équations (58) et (59) ci-dessus. Soient α_1 et α_2 les solutions de (58) et (59) respectivement dont la norme est minimale. On voit aisément – grâce a la minimalité de la norme – que la somme $\alpha := \alpha_1 + \alpha_2$ satisfait simultanément ces équations ; on renvoie à [Bo09] pour plus de détails. □

En choisissant le représentant $\mathbf{u}$ comme dans le lemme 2.7, on obtient l'expression suivante pour la courbure de l'image directe

$$\frac{\langle \Theta_{h_{\mathcal{F}}}(\mathcal{F})u, u\rangle}{idt \wedge d\bar{t}} = c_n \frac{p_\star\big(\Theta_L \wedge \mathbf{u} \wedge \overline{\mathbf{u}} e^{-\varphi}\big)}{idt \wedge d\bar{t}} + \int_{\mathcal{X}_t} |\overline{\partial} v|^2 e^{-\varphi}. \tag{60}$$

2.3.4. *Le cas où L est ample.* — Dans le cas où la courbure $\Theta_{h_L}(L)$ de L est définie positive sur les fibres de p, on peut raffiner un peu plus la formule (54). Nous allons présenter ici brièvement le résultat principal obtenu dans [Bo11].

Si L est positif, on peut prendre

$$\omega := \Theta_{h_L}(L).$$

Soit $\mathcal{V}$ *le relèvement canonique de* $\dfrac{\partial}{\partial t}$ par rapport à la métrique ω. C'est le champ de vecteurs de type $(1,0)$ sur $\mathcal{X}$ qui s'écrit localement

$$\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{\gamma,\delta} \omega^{\gamma\bar{\delta}} \omega_{t\bar{\delta}} \frac{\partial}{\partial z_\gamma}; \tag{61}$$

il est caractérisé par le fait que $dp(\mathcal{V}) = \dfrac{\partial}{\partial t}$, ainsi que $\omega(\mathcal{V}, \xi) = 0$ pour tout vecteur ξ tangent aux fibres de p.

Soit u une section holomorphe de $\mathcal{F}$, telle que $D'_{\mathcal{F}}u = 0$ en $t = 0$. En utilisant le champ de vecteurs $\mathcal{V}$, on peut construire un représentant $\mathbf{u}$ de u dont les propriétés sont absolument remarquables. On pose

$$\mathbf{u} := i_{\mathcal{V}} \cdot (dt \wedge \widetilde{\mathbf{u}}), \tag{62}$$

où $i_{\mathcal{V}}$ désigne l'opération de contraction avec le vecteur $\mathcal{V}$, et $\widetilde{\mathbf{u}}$ est un représentant arbitraire de la section u. On définit comme dans (54) les formes η et ν.

Nous n'allons pas détailler la preuve des affirmations suivantes, car il s'agit de calculs qui ne présentent pas de difficultés particulières.

(a) La restriction de η à la fibre $\mathcal{X}_0$ est primitive par rapport à ω. En particulier, on a $\star\eta = -\eta$, où $\star$ est l'opérateur de Hodge sur $\mathcal{X}_0$ et donc

$$D'^{\star}_L \eta = -\star \overline{\partial} \star \eta = 0$$

sur $\mathcal{X}_0$.

(b) Si on écrit $\omega \wedge \mathbf{u} = dt \wedge \psi$, alors $\psi|_{\mathcal{X}_0} = 0$.

(c) L'égalité $\overline{\partial}\mu = D'_L \eta$ est satisfaite sur $\mathcal{X}_0$.

(d) On a

$$c_n \frac{p_\star\big(\Theta_L \wedge \mathbf{u} \wedge \overline{\mathbf{u}} e^{-\varphi}\big)}{idt \wedge d\bar{t}}\Big|_{t=0} = \int_{\mathcal{X}_0} c(\omega)|u|^2 e^{-\varphi},$$

où la fonction $c(\omega)$ dans la formule précédente est définie comme suit

$$c(\omega) := \frac{\omega^{n+1}}{\omega^n \wedge idt \wedge d\bar{t}}.$$

En conclusion, la formule de courbure (54) devient

$$\frac{\langle \Theta_{h_\mathcal{F}}(\mathcal{F})u, u\rangle}{idt \wedge d\bar{t}} = \int_{\mathcal{X}_0} c(\omega)|u|^2 e^{-\varphi} + |\eta|_0^2 - |\mu|_0^2. \tag{63}$$

On va montrer maintenant que $|\eta|_0^2 - |\mu|_0^2 \geq 0$. L'argument est assez similaire à celui employé dans le cas des domaines dans $\mathbb{C}^n$, dans le sens qu'on utilise l'équation verifiée par μ afin de mesurer sa norme. Toutefois, la technique utilisée est assez différente.

Par le choix de u, i.e. $D'_\mathcal{F} u = 0$ en $t = 0$, on déduit que μ est la solution de norme minimale de l'équation dans (c). Le théorème de Hörmander [H65] montre qu'on a

$$|\mu|_0^2 \leq \int_{\mathcal{X}_0} |D'_L \eta|_\omega^2 e^{-\varphi}, \tag{64}$$

mais malheureusement, cette inégalité ne semble pas suffisamment fine pour conclure. Par contre, on a une formule exacte pour μ comme suit

$$\mu = -\overline{\partial}^\star (\Box'')^{-1} D'_L \eta \tag{65}$$

et la formule de Bochner-Kodaira-Nakano (cf. [Bo11] pour les calculs intermédiaires) montre qu'on a

$$|\eta|_0^2 - |\mu|_0^2 = \langle (\mathrm{Id} + \Box')^{-1}\eta, \eta\rangle_0 \geq 0. \tag{66}$$

En conclusion, dans le cas où $\omega = \Theta_{h_L}(L)$ est définie positive, on a l'égalité suivante

$$\frac{\langle \Theta_{h_\mathcal{F}}(\mathcal{F})u, u\rangle}{idt \wedge d\bar{t}}\Big|_{t=0} = \int_{\mathcal{X}_0} c(\omega)|u|^2 e^{-\varphi} + \langle (\mathrm{Id} + \Box')^{-1}\eta, \eta\rangle_0. \tag{67}$$

On renvoie à [Wa1], [Wa2] pour des résultats récents très intéressants dans le même cercle d'idées.

3. CONJECTURE DE L'OUVERTURE ET EXTENSION DES FONCTIONS HOLOMORPHES

3.1. Idéaux multiplicateurs

Nous allons esquisser ici la preuve du théorème 1.8, en suivant [Bl2].

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ensemble ouvert, et soit $\varphi \in \mathrm{Psh}(\Omega)$ une fonction psh définie sur Ω. On suppose dans ce paragraphe que φ est négative. L'idéal multiplicateur de φ est défini comme suit

$$\mathcal{I}(\varphi)_x := \{f \in \mathcal{O}_x(\Omega) : |f|^2 e^{-\varphi} \in L^1(\Omega, x)\}. \tag{68}$$

Motivés en partie par des questions techniques, J.-P. Demailly et Th. Peternell ont introduit la version « régularisée » suivante de l'idéal multiplicateur $\mathcal{I}(\varphi)$: on pose

$$\mathcal{I}_+(\varphi) := \lim_{\varepsilon\to 0_+} \mathcal{I}\big((1+\varepsilon)\varphi\big). \tag{69}$$

La famille d'idéaux $\mathcal{I}\big((1+\varepsilon)\varphi\big)$ est décroissante par rapport à ε, donc stationnaire pour $0<\varepsilon\ll 1$ et alors la limite (69) est bien définie.

La conjecture dite « d'ouverture » de Demailly-Kollár (= théorème 1.8) s'énonce comme suit : *soit* $\varphi\in \mathrm{Psh}(\Omega)$ *une fonction psh, telle que* $\mathcal{I}(\varphi)_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$. *Alors on a* $\mathcal{I}_+(\varphi)_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$.

Le cas où $n=1$ de cette conjecture est une conséquence des propriétés élémentaires des fonctions sousharmoniques. Par contre, la preuve obtenue par Favre-Jonsson [FJ1], [FJ2] dans le cas $n=2$ est radicalement plus compliquée techniquement.

Cette conjecture a été résolue par Bo Berndtsson dans [BoB15]. Le théorème 1.4 joue un rôle important dans sa démonstration. Cependant, très peu de temps après la parution de son article sur la Toile, Guan-Zhou ont obtenu dans [GZ1], [GZ2] la confirmation d'une version beaucoup plus générale de cette conjecture, qu'on énoncera un peu plus loin. La preuve de Guan-Zhou a été la source d'inspiration pour l'argument suivant (dû à Berndtsson), qui montre la version initiale de *openness conjecture*. Compte tenu de l'élégance de cette preuve, on ne résiste pas à la tentation de la reproduire dans la suite.

Démonstration du théorème 1.8 — Le point principal de la preuve est l'affirmation suivante.

Lemme 3.1 ([Bl2]). — *Soit ψ une fonction négative et psh, définie dans la boule unité de $\mathbb{C}^n$. On suppose que $e^{-\psi}$ n'est pas intégrable par rapport à la mesure de Lebesque au voisinage de l'origine. Alors on a*

$$\int_{(z_n=a)} e^{-\psi} d\lambda \geq \frac{C_n}{|a|^2} \tag{70}$$

où C_n est une constante numérique.

Pour montrer ce lemme, on raisonne de la manière suivante. Pour chaque valeur $a\in\mathbb{C}$ telle que $|a|<1/2$, le théorème d'Ohsawa-Takegoshi [OT] montre l'existence d'une fonction $f_a\in\mathcal{O}(\Delta)$ holomorphe sur la boule unité $\Delta\subset\mathbb{C}^n$, telle que $f_a(z',a)=1$ pour tout $z'\in\mathbb{C}^{n-1}$ tel que $(z',a)\in\Delta$. De plus, la norme L^2 de f_a vérifie l'inégalité

$$\int_\Delta |f_a|^2 e^{-\psi} d\lambda_n \leq c_n \int_{z_n=a} e^{-\psi(z',a)} d\lambda_{n-1}, \tag{71}$$

où $d\lambda_n$ est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{C}^n$. Dans (71), la constante c_n est *purement numérique.*

On utilise l'hypothèse concernant la non-intégrabilité de $e^{-\varphi}$ en zero : ceci implique $f_a(0) = 0$. Le lemme de Schwarz – combiné avec l'inégalité de la moyenne – montre qu'on a

$$|f_a(0, z_n)|^2 \leq C_1 |z_n|^2 \int_{z_n = a} e^{-\psi(z', a)} d\lambda_{n-1} \tag{72}$$

pour tout z_n, en particulier le choix $z_n = a$ démontre (70).
Soit φ une fonction psh négative dans la boule unité, telle que

$$\int_\Delta e^{-\varphi} d\lambda_n < \infty, \tag{73}$$

et telle que

$$\int_\Delta e^{-p\varphi} d\lambda_n = \infty, \tag{74}$$

pour chaque $p > 1$.

Le lemme 3.1 montre que

$$\int_{z_n = a} e^{-p\varphi} d\lambda_{n-1} \geq \frac{c_n}{|a|^2}, \tag{75}$$

pour chaque $p > 1$. Par récurrence, on peut supposer que $e^{-p\varphi(\cdot, a)}$ est intégrable près de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$, et le théorème de convergence dominée montre que (75) reste valable pour $p = 1$. On obtient une contradiction en intégrant par rapport à a.

La version « forte » obtenue par Guan-Zhou est la suivante.

Théorème 3.2 ([GZ1]). — *L'idéal régularisé $\mathcal{I}_+(\varphi)$ coïncide avec $\mathcal{I}(\varphi)$.*

La preuve présentée dans [GZ1] est remarquablement simple, mais nous n'allons pas la reproduire ici ; le lecteur intéressé peut consulter [GZ1]. Cette version forte de la conjecture d'ouverture a eu des applications importantes, notamment dans le travail de J.-P. Demailly [Dem15].

3.2. Une version optimale du théorème d'extension d'Ohsawa-Takegoshi

Dans cette section, nous allons indiquer très brièvement les parties importantes de la preuve du théorème 1.9, énoncé dans l'introduction.

Soit $p : X \to \mathbb{D}_r$ une famille kählérienne au-dessus du disque $\mathbb{D}_r$ de rayon r dans $\mathbb{C}$. On suppose que $X_0 = p^{-1}(0)$ est non singulière. Soit $L \to X$ un fibré en droites, muni d'une métrique h_L éventuellement singulière telle que $\Theta_{h_L}(L) \geq 0$ et dont la restriction $h_L|_{X_0}$ est bien définie (i.e. n'est pas identiquement $+\infty$).

Considérons une section holomorphe u du fibré $K_{X_0} + L$, dont la norme L^2 $\displaystyle\int_{X_0} |u|^2 e^{-\varphi_L} < \infty$ est finie. D'après [OT], il existe une section U de $K_X + L$ telle que $U|_{X_0} = u \wedge dp$ et telle que

$$\int_X |U|^2 e^{-\varphi_L} \leq C(r) \int_{X_0} |u|^2 e^{-\varphi_L}, \tag{76}$$

où $C(r)$ est une constante qui dépend du rayon r de la base de la famille p seulement. La question est de déterminer la valeur optimale de $C(r)$. Ce problème a été résolu très récemment par Z. Błocki, cf. [Bl1], et Guan-Zhou, cf. [GZ2] qui obtiennent la constante $C(r) = \pi r^2$. L'exemple d'une famille produit $X = \mathbb{D}_r \times X_0$ montre que cette valeur est optimale.

Les arguments dans [Bl1] et [GZ2] représentent une amélioration technique impressionnante de la preuve d'Ohsawa-Takegoshi dans [OT]. Dans l'esquisse de preuve ci-dessous, nous allons suivre l'approche de Berndtsson-Lempert, cf. [BL14], qui est basée sur le théorème 1.7. Ils démontrent le théorème 1.9 dans le cas particulier d'une métrique h_L non singulière. Ceci implique l'énoncé général *si X est une famille projective*. Par contre, si X est une variété kählérienne et h_L est singulière, les arguments de 1.9 ne sont pas applicables – au moins, on ne voit pas comment les utiliser.

Preuve (esquisse) — Sauf mention explicite du contraire, on suppose dans la suite que la métrique h_L est non singulière. Pour alléger les notations, on suppose aussi que $r = 1$.

On considère l'espace des formes canoniques L^2 sur X à valeur dans L

$$A^2(X) := \left\{ U \in H^0(X, K_X + L) : \|U\|^2 = \int_X |U|^2 e^{-\varphi_L} < \infty \right\} \tag{77}$$

et soit $A^2_0(X)$ le sous-espace vectoriel $U \in A^2(X)$ tel que $U|_{X_0} = 0$. Nous devons évaluer la norme de l'extension « optimale » $U_{\min}$ de u, i.e. la quantité

$$\|U_{\min}\|^2 := \inf \left\{ \|V\|^2 : V \in A^2(X), V|_{X_0} = u \wedge dp \right\}. \tag{78}$$

Pour ceci, Berndtsson et Lempert procèdent par dualité : on a

$$\|U_{\min}\|^2 = \sup_{\xi} \frac{|\langle \xi, U_{\min} \rangle|^2}{\|\xi\|^2_\star}, \tag{79}$$

où $\xi \in A^2(X)^\star$ est une fonctionnelle linéaire (continue) sur $A^2(X)$ telle que $\xi|_{A^2_0(X)} = 0$. La notation $\|\cdot\|_\star$ dans (79) désigne la norme duale sur l'espace $A^2(X)^\star$.

Soit σ une section $\mathcal{C}^\infty$ de $K_X + L$. On peut lui associer une application linéaire ξ_σ comme suit

$$\langle \xi_\sigma, V \rangle := \int_{X_0} V \wedge \overline{\sigma} e^{-\varphi_L} \tag{80}$$

et il se trouve que l'espace vectoriel de ces fonctionnelles est dense dans le dual du quotient $A^2(X)/A^2_0(X)$. En particulier, on a l'égalité suivante

$$\|U_{\min}\|^2 = \sup_{\sigma} \frac{|\langle \xi_\sigma, U_{\min} \rangle|^2}{\|\xi_\sigma\|^2_\star}. \tag{81}$$

On voit que $\langle \xi_\sigma, U_{\min} \rangle = \int_{X_0} u \wedge \overline{\sigma} e^{-\varphi_L}$. Par Cauchy-Schwarz combiné avec (79), on déduit l'inegalité

$$\|U_{\min}\|^2 / \|u\|^2_0 \leq \sup_{\sigma} \frac{\|\widetilde{\sigma}\|^2_0}{\|\xi_\sigma\|^2_\star}, \tag{82}$$

où $\widetilde{\sigma}$ est la projection orthogonale de σ sur l'espace des sections holomorphes de $K_{X_0}+L$. C'est dans le but de trouver un majorant de $\sup_{\sigma} \frac{\|\widetilde{\sigma}\|_0^2}{\|\xi_\sigma\|^2}$ dans (82) qu'on aura besoin du théorème 1.7.

Soit $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ le demi-plan de Poincaré ($\mathrm{Re}\, t < 0$), et soit

$$\pi : \mathbb{H} \times X \to \mathbb{H} \tag{83}$$

la projection sur le premier facteur. Soit $\pi_2 : \mathbb{H} \times X \to X$ la projection sur X. On définit la fonction

$$\psi : \mathbb{H} \times X \to \mathbb{R}, \quad \psi(t, z) := \max\big(\log |p(z)|^2 - \mathrm{Re}(t), 0\big). \tag{84}$$

C'est une fonction psh, et on l'utilise afin de modifier la métrique initiale de $\pi_2^\star L$, comme suit. Soit $m \geq 1$ un entier positif ; on définit la métrique

$$h_m := e^{-m\psi} h_{\pi_2^\star L} \tag{85}$$

sur le fibré $\pi_2^\star L$, où $h_{\pi_2^\star L}$ est l'image inverse de la métrique h_L.

D'après le théorème 1.7, le fibré $\mathcal{E} := \pi_\star(K_{\mathbb{H}\times X/\mathbb{H}} + \pi_X^\star L)$ est positif au sens de Griffiths lorsqu'il est muni de la métrique L^2 notée $\| \cdot \|^{(m)}$ induite par h_m. Donc la fonction $t \to \log \|\xi\|_{\star t}^{(m)}$ est sousharmonique sur l'ouvert de $\mathbb{H}$ sur lequel la section holomorphe ξ du dual de $\mathcal{E}$ est définie. En particulier, ceci est vrai pour les fonctionnelles ξ_σ considérées auparavant. On en déduit que la fonction

$$t \to \log \|\xi_\sigma\|_{\star t}^{(m)} \tag{86}$$

est sousharmonique sur $\mathbb{H}$, pour tout m. La propriété de sousharmonicité est préservée par passage à la limite $m \to \infty$. Par ailleurs, lorsque $m \to \infty$ la norme $\| \cdot \|^{(m)}$ devient

$$\langle U, V\rangle_t := c_{n+1} \int_{\mathcal{X}_t} U \wedge \overline{V} e^{-\varphi_L}, \tag{87}$$

où $\mathcal{X}_t := p^{-1}(\mathbb{D}_{e^{\mathrm{Re}\, t}})$; on note $\| \cdot \|_\star^{(\infty)}$ la norme duale.
En conclusion, la fonction $t \to \log \|\xi_\sigma\|_{\star t}^{(\infty)}$ est sousharmonique, et elle dépend de la partie réelle de t seulement. C'est donc une fonction *convexe* en $\mathrm{Re}(t)$. Par ailleurs, on vérifie sans beaucoup de peine (cf. [BL14]) que la fonction

$$t \to \frac{1}{2}\mathrm{Re}(nt) + \log \|\xi_\sigma\|_{\star t}^{(\infty)} \tag{88}$$

est *bornée* lorsque $\tau := \mathrm{Re}(t) \to -\infty$. Ces considérations montrent que (88) est *croissante* par rapport à τ, et en particulier, on a

$$\|\xi_\sigma\|_{\star 0}^{(\infty)} \geq \lim_{\tau \to -\infty} \|\xi_\sigma\|_{\star \tau}^{(\infty)}. \tag{89}$$

D'après la formule (77), on déduit que $\|\xi_\sigma\|_{\star 0}^{(\infty)} = \|\xi_\sigma\|_\star$. On renvoie à [BL14] pour la démonstration du lemme suivant.

Lemme 3.3 ([BL14]). — *On a* $\lim_{\tau\to-\infty} \|\xi_\sigma\|_{\star\tau}^{(\infty)} e^{n\tau} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \|\widetilde{\sigma}\|_0$

En conjonction avec (82), ce lemme finit la preuve du 1.9. □

Remarque 3.4. — On peut traiter de manière analogue le cas où h_L est *singulière* pourvu que $p : X \to \mathbb{D}_r$ soit une famille projective (dans le sens qu'il existe un plongement $i : X \to \mathbb{D}_r \times \mathbb{P}^N$ au-dessus de $\mathbb{D}_r$). L'argument est standard : dans ce cas, X est réunion croissante de domaines de Stein, et sur chaque tel domaine on peut régulariser la métrique h_L sans perte de positivité, i.e. en conservant l'hypothèse de courbure semi-positive de L. Ensuite on utilise la version « locale » du théorème 1.9 sous l'hypothèse h_L non singulière et un procédé de passage à la limite (dans un ordre précis pour les divers paramètres impliqués) finit la preuve. On ne peut malheureusement pas raisonner ainsi dans le cas d'une famille kählérienne, et cela crée des complications redoutables, cf. [Cao],[Dem15]

Remarque 3.5. — Soit $\Delta \subset \mathbb{C}$ le disque unité, et soit $\phi \in \mathrm{Psh}(\Omega)$ une fonction sousharmonique. On note $k(\cdot) := K_\phi(\cdot, \cdot)$ la restriction du noyau de Bergman de l'espace des fonctions $L^2_\phi(\Delta)$ à la diagonale.

La méthode de démonstration de 1.9 peut être utilisée pour montrer l'énoncé suivant concernant l'extension des fonctions définies sur le schéma donné par (z^2). Soient a_0 et a_1 deux nombres complexes. Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ telle que

(i) On a $f(0) = a_0$ et $f'(0) = a_1$.

(ii) La norme L^2 de f vérifie la relation suivante

$$\int_\Delta |f|^2 e^{-\phi} \leq C\Big(|a_0|^2 + \Big|a_1 - \frac{k'(0)}{k(0)}a_0\Big|^2\Big)e^{-\phi(0)}, \tag{90}$$

où C est une constante numérique.

L'apparition de la dérivée logarithmique du noyau de Bergman dans (90) marque une différence importante par rapport au cas « classique », dans lequel on prolonge des fonctions définies sur des ensembles non singuliers et réduits. Il serait vivement souhaitable d'obtenir des énoncés analogues en dimension arbitraire. On se réfère à l'article [Dem15] pour des résultats dans cette direction.

4. VERSION QUANTITATIVE DE QUELQUES RÉSULTATS EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE COMPLEXE

Dans cette section, nous allons présenter quelques résultats des articles [BP08] et [BP12]. Il s'agit d'abord d'établir une version du théorème 1.7 pour des applications p qui ne sont pas nécessairement des submersions. Ensuite, on voudrait discuter des résultats analogues pour les images directes $p_\star\big(mK_{X/Y} + L\big)\big)$ où L est un fibré en droites. Finalement, nous allons discuter quelques applications de ces résultats.

4.1. Positivité du fibré canonique relatif

Soit $p : X \to Y$ un *espace algébrique fibré*, i.e une application surjective entre deux variétés projectives non singulières X et Y. On va également supposer que la fibre générique de p est connexe. Soit $L \to X$ un fibré en droites muni d'une métrique h_L qui peut être singulière, dont le courant de courbure est positif.

Si Y est de dimension zéro, alors l'image directe $p_\star\big((K_{X/Y}+L)\otimes\mathcal{I}(e^{-\varphi_L}\big)$ s'identifie à l'espace vectoriel des sections holomorphes $E \subset H^0(X, K_X+L)$ qui sont L^2 par rapport à h_L. Cet espace est muni naturellement d'une métrique hermitienne (45). Le produit scalaire des sections u et v est donné par

$$\langle u, v\rangle = c_n \int_X u \wedge \overline{v} e^{-\varphi_L}. \tag{91}$$

Soit (σ_j) une base orthonormée de E. Cela induit une métrique sur le dual du fibré adjoint noté $-(K_X + L)$ dont l'expression est

$$|\xi|_x^2 := \sum_j |\langle \xi, \sigma_j\rangle|^2 \tag{92}$$

(cf. [Dem95]) où $\xi \in -(K_X+L)_x$ est un vecteur dans le dual de la fibre en x de K_X+L. La base orthonormée (σ_j) n'est pas unique, mais la métrique induite (92) l'est. Comme dans le cas des domaines dans $\mathbb{C}^n$, on a

$$|\xi|_x^2 = \sup_{u\in E, \|u\|^2\leq 1} |\langle \xi, u\rangle|^2. \tag{93}$$

En conclusion, le noyau de Bergman induit une métrique – singulière en général – sur le fibré $K_X + L$. Par construction, le courant de courbure associé est *positif.*

4.1.1. *Version relative.* — Dans le cas où la base Y de p est de dimension $m \geq 1$, on voudrait employer la version « fibre à fibre » de cette construction afin d'obtenir une métrique sur $K_{X/Y} + L$. On note comme d'habitude $\mathcal{F} := p_\star(K_{X/Y} + L)$, mais la différence importante par rapport à la discussion précédente est qu'en général $\mathcal{F}$ n'est pas un fibré vectoriel – c'est toutefois un faisceau cohérent sans torsion.

Ceci est effectivement possible quitte à se restreindre dans un premier temps à l'ouvert de Zariski $\mathcal{Y} \subset Y$ des valeurs regulières de p telles que

$$h^0(X_y, K_{X_y} + L) = \mathrm{rk}(\mathcal{F}) \tag{94}$$

pour tout $y \in \mathcal{Y}$. Autrement dit, $\mathcal{Y}$ est l'ouvert de Zariski des valeurs régulières y de p telles que toute section de $K_{X_y} + L$ se prolonge au voisinage de l'image inverse d'un ouvert contenant y. On définit $\mathcal{X} := p^{-1}(\mathcal{Y})$ et alors la restriction $p : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est une submersion propre.

Soit $x \in \mathcal{X}$ et soit $\xi \in -(K_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} + L)_x$ un vecteur ; on pose

$$|\xi|_x^2 := \sup_{u\in B_y(1)} |\langle \xi, u\rangle|^2 \tag{95}$$

où $y = p(x)$. On note $B_y(1)$ l'ensemble suivant

$$B_y(1) := \big\{u \in H^0(X_y, K_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} + L|_{X_y}) : \|u\|_y \le 1\big\}. \tag{96}$$

La norme qui apparaît dans l'expression (96) ci-dessus coïncide avec (45), modulo l'identification $K_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}|_{X_y} = K_{X_y}$.

On a l'énoncé suivant, qui représente le cas $m = 1$ du théorème 1.10 dans l'introduction.

Théorème 4.1 ([BP08]). — *On a les affirmations suivantes.*

(i) *Les poids locaux de la métrique $h_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$ sont des fonctions psh.*

(ii) *Il existe une métrique $h_{X/Y}$ sur $K_{X/Y} + L$ dont le courant de courbure est positif, et qui coïncide avec $h_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$ par restriction à l'ouvert $\mathcal{X}$.*

Nous n'allons pas esquisser la preuve du premier point (i) ici. Voici néanmoins quelques commentaires sur la démonstration dans [BP08]. Pour une approche alternative, on se réfère à [GZ2] où le point (i) est obtenu comme conséquence de la version optimale du théorème d'Ohsawa-Takegoshi. Le fait que les fonctions poids de $h_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$ soient semi-continues supérieurement est une conséquence des propriétés de l'ensemble $\mathcal{Y}$. Pour montrer l'inégalité de la moyenne, dans l'article [BP08] on procède par approximation, comme suit. La variété projective X est la réunion croissante de domaines de Stein, disons $(\Omega_\nu)_{\nu \ge 0}$. On peut choisir ces domaines tels que les fibrés $K_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$ et L soient triviaux par restriction à chaque Ω_ν. Soit p_ν la restriction de p à Ω_ν. Dans ce contexte, la métrique de L s'identifie à une fonction psh, et la question (i) revient à dire que les noyaux de Bergman correspondant aux fibres de p_ν sont log–psh. Ceci est fait en deux étapes : d'abord on régularise le poids de la métrique de L et on utilise le théorème 1.4 afin de montrer la version du (i) où X est remplacée par une variété de Stein. La deuxième étape, c'est le passage à la limite $\nu \to \infty$; cela utilise beaucoup de propriétés des noyaux de Bergman.

Preuve du (ii) (esquisse) — Nous allons d'abord évaluer les poids de $h_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$ par rapport à une trivialisation de $K_{X/Y} + L$. Soit $(z_1, \dots z_{n+m})$ un système de coordonnées définies dans la boule $\Omega \subset X$ et centrées en un point x_0 de $X \setminus \mathcal{X}$. Soit $(t_1, \cdots, t_m)$ un système de coordonnées dans Y, définies sur un ouvert contenant l'image $p(x_0)$. Ces coordonnées induisent une trivialisation de $K_{X/Y}$ près de x_0. Par rapport au repère associé, le poids $\varphi_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$ de $h_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$ évalué au point $x \in \Omega \cap \mathcal{X}$ s'écrit

$$e^{\varphi_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}(x)} = \sup_{u \in B_y(1)} |\widetilde{u}(x)|^2 \tag{97}$$

où la fonction holomorphe locale $\widetilde{u}$ est donnée par la relation $u \wedge dt =: \widetilde{u} dz$.

Soit $z_0 \in \mathcal{X} \cap \Omega$ un point arbitraire, et considérons la section $u \in B_{y_0}(1)$ telle que $\varphi_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}(z_0) = \log |\widetilde{u}(z_0)|^2$, où $y_0 = p(z_0)$. La condition $u \in B_{y_0}(1)$ implique en particulier que

$$\int_{\mathcal{X}_{y_0} \cap \Omega} |\widetilde{u}|^2 e^{-\varphi_L} \left|\frac{dz}{dt}\right|^2 \le 1 \tag{98}$$

car la quantité $\widetilde{u}\dfrac{dz}{dt}$ est la restriction de $u|_{\mathcal{X}_{y_0}}$ a $\mathcal{X}_{y_0}\cap\Omega$. Le théorème d'Ohsawa-Takegoshi montre l'existence d'une forme $\widetilde{U}dz$ de degré maximal sur Ω telle que

$$\int_\Omega |\widetilde{U}|^2 e^{-\varphi_L} d\lambda \leq C \int_{\mathcal{X}_{y_0}\cap\Omega} |\widetilde{u}|^2 e^{-\varphi_L} \left|\frac{dz}{dt}\right|^2 \tag{99}$$

et telle que $\widetilde{U}|_{\mathcal{X}_{y_0}\cap\Omega} = \widetilde{u}$. Les inégalités (98) et (99) montrent que la fonction $\widetilde{U}$ est bornée sur tout compact de Ω par une constante numérique. Donc on a montré que

$$\sup_{\Omega\cap\mathcal{X}} \varphi_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} \leq C \tag{100}$$

et ainsi (ii) est démontré.

4.1.2. *Version pluricanonique – le théorème 1.10.* — Comme on a vu dans la section précédente, la positivité du fibré $K_{X/Y} + L$ est une conséquence de l'existence des sections holomorphes de $K_{X_y} + L|_{\mathcal{X}_y}$ (intégrables par rapport à la métrique de L dans le cas singulier). Mais dans « la pratique », il est beaucoup plus courant d'avoir des sections holomorphes des multiples $mK_{X_y} + L|_{\mathcal{X}_y}$ pour $m \gg 0$. Dans cette partie, nous allons voir qu'il est possible d'utiliser ces sections afin de construire une métrique sur $mK_{X/Y} + L$ telle que le courant de courbure associé soit positif – c'est le contenu du théorème (1.10).

On note $\mathcal{F}_m := p_\star(mK_{X/Y} + L)$, et soit $\mathcal{Y} \subset Y$ l'ouvert de Zariski des valeurs régulières y de p telles que toute section du fibré $mK_{X_y} + L|_{\mathcal{X}_y}$ se prolonge dans l'image inverse d'un voisinage de y. Alors la restriction $\mathcal{F}_m|_{\mathcal{Y}}$ est un fibré vectoriel. Soit u une section de ce fibré, définie sur un ouvert de $\mathcal{Y}$. La pseudo-norme $L^{2/m}$ de u en y est donnée par l'expression suivante

$$\|u\|_{m,y} := \Big(\int_{X_y} |u|^{2/m} e^{-\frac{1}{m}\varphi_L}\Big)^{\frac{m}{2}}. \tag{101}$$

Dans la suite, on désigne par $B_{m,y}(1)$ l'ensemble suivant

$$B_{m,y}(1) := \big\{u \in H^0(X_y, mK_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} + L|_{X_y}) : \|u\|_{m,y} \leq 1\big\}. \tag{102}$$

Soit $\xi \in -(mK_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} + L)_x$ un vecteur de la fibre du dual de $mK_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} + L$ en $x \in \mathcal{X}$. On définit sa norme

$$|\xi|^2 := \sup_{u\in B_{m,y}(1)} |\langle \xi, u\rangle|^2 \tag{103}$$

où $y := p(x)$, et on note $h^{(m)}_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$ la métrique induite sur $mK_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} + L$.

Nous allons indiquer maintenant quelques idées de la preuve du théorème 1.10, en suivant [BP08]. La partie délicate de la preuve consiste à montrer que les poids de $h^{(m)}_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}$ sont des fonctions psh. Ensuite, l'argument utilisé pour montrer la propriété d'extension de la métrique est similaire à celui que nous avons déjà discuté pour la preuve du point (ii) du théorème 4.1 précédent – quitte à remplacer le théorème d'Ohsawa-Takegoshi par sa version $L^{2/m}$, cf. [PT].

On rappelle la construction suivante, qui sera très utile dans la preuve. Soit $F \to M$ un fibré en droites au-dessus d'une variété complexe, et considérons $V \subset H^0(M, kF)$ un sous-espace vectoriel de dimension positive, ou $k \geq 1$ est un entier positif. On note $\pi : M \times V \to M$ la projection sur le 1er facteur. Alors on peut construire sur l'image inverse $\widetilde{F} := \pi^\star F$ une métrique h_V ainsi induite par V

$$|\rho|^2_{h_V,(x,u)} := \frac{|\rho|^2}{|u|_x^{2/k}}, \tag{104}$$

où le quotient dans la formule (104) est interprété comme un nombre complexe. Le courant de courbure de h_V est positif.

Soit $\Omega \subset \mathcal{Y}$ un ouvert tel que la restriction $\mathcal{F}_m|_\Omega$ est triviale. Il suffit de montrer la positivité du courant de courbure associé à $h^{(m)}_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}|_{p^{-1}(\Omega)}$ pour chaque Ω. On peut donc supposer par la suite que $\Omega = \mathcal{Y}$. Considérons l'espace des sections holomorphes E de $\mathcal{F}_m$, et soient $\widetilde{\mathcal{X}} := \mathcal{X} \times E$ et $\widetilde{\mathcal{Y}} := \mathcal{Y} \times E$ avec les projections sur le 1er facteur $\pi_{\mathcal{X}} : \widetilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ et $\pi_{\mathcal{Y}} : \widetilde{\mathcal{Y}} \to \mathcal{Y}$ respectivement. On note $\widetilde{p} : \widetilde{\mathcal{X}} \to \widetilde{\mathcal{Y}}$ l'application induite par p, et on a

$$mK_{\widetilde{\mathcal{X}}/\widetilde{\mathcal{Y}}} + \pi^\star_{\mathcal{X}} L = K_{\widetilde{\mathcal{X}}/\widetilde{\mathcal{Y}}} + \frac{1}{m}\pi^\star_{\mathcal{X}} L + \frac{m-1}{m}\pi^\star_{\mathcal{X}}(mK_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} + L). \tag{105}$$

Le fibré $\widetilde{L} := \dfrac{1}{m}\pi^\star_{\mathcal{X}} L + \dfrac{m-1}{m}\pi^\star_{\mathcal{X}}(mK_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} + L)$ est muni de la métrique déduite de h_L et h_E, cf. (104). Son courant de courbure est positif.

Soit ξ une section locale du fibré dual de $\widetilde{p}_\star(K_{\widetilde{\mathcal{X}}/\widetilde{\mathcal{Y}}} + \widetilde{L}) = \pi^\star_{\mathcal{Y}}(\mathcal{F}_m)$. Le fait important est que *la fonction* $\log \|\xi\|^2$ *est psh*, où

$$\|\xi\|^2_{(y,v)} = \sup_{u \in B_{(y,v)}(1)} |\langle \xi, u\rangle|^2. \tag{106}$$

Notons que ceci serait une conséquence directe du théorème 1.7 si la métrique de $\widetilde{L}$ était non singulière ; la version générale est établie dans [BP08].

Dans l'expression (106), u et v sont des sections du fibré $mK_{X_y} + L$ et on voit que $u \in B_{(y,v)}(1)$ si et seulement si

$$\int_{X_y} \frac{|u|^2}{|v|^{2\frac{m-1}{m}}} e^{-\frac{1}{m}\varphi_L} \leq 1. \tag{107}$$

Pour finir, on montre que la fonction suivante

$$y \to \sup_{u \in B_{(y,u)}(1)} |\langle \xi, u\rangle|^2 \tag{108}$$

est également log-psh, pour toute section locale ξ. Mais la condition $u \in B_{(y,u)}(1)$ est équivalente à $\|u\|_{m,y} \leq 1$. Le point (a) du théorème 1.14 découle de (108), en prenant pour ξ la fonctionnelle d'évaluation.

Remarque 4.2. — La preuve que nous venons d'esquisser montre que travailler en contexte singulier est vraiment important : la métrique de $\widetilde{L}$ utilisée n'est jamais de classe $\mathcal{C}^\infty$.

4.2. Métriques singulières sur les fibrés vectoriels et applications

Soit $p : X \to Y$ un espace algébrique fibré, et soit $(L, h_L) \to X$ un fibré en droites muni d'une métrique h_L dont le courant de courbure est positif. Dans certains articles récents [Ra15], [PT], [HPS], on a poursuivi l'analyse des propriétés de positivité des images directes $\mathcal{F}_m := p_\star(mK_{X/Y} + L)$; nous allons mentionner ici quelque résultats obtenus.

Pour commencer, nous observons qu'on peut réduire l'étude de $\mathcal{F}_m$ au cas $m = 1$ quitte à changer le fibré L, cf. l'identité déjà utilisée dans (105)

$$mK_{X/Y} + L = K_{X/Y} + \frac{1}{m}L + \frac{m-1}{m}(mK_{X/Y} + L). \tag{109}$$

On a donc l'égalité $mK_{X/Y} + L = K_{X/Y} + \widetilde{L}$, et le courant de courbure de la métrique $h_{\widetilde{L}} := h_L^{\frac{1}{m}} \otimes \left(h_{X/Y}^{(m)}\right)^{\frac{m-1}{m}}$ est toujours positif.

Une notion importante qui s'est dégagée de la preuve du théorème 1.10 (cf. [BP08]) est la suivante.

Définition 4.3. — *Soit $E \to X$ un fibré vectoriel. Une métrique hermitienne singulière h sur E est la donnée d'une forme quadratique $|\cdot|^2_{h,x} : E_x \to [0, \infty]$ telle que :*

(1) *Il existe un ensemble $\Lambda \subset X$ de mesure de Lebesgue nulle tel que $|\cdot|^2_{h,x}$ est une forme quadratique définie positive sur E_x si $x \in X \setminus \Lambda$.*

(2) *Pour toute section locale s de E, la fonction $x \to |s(x)|_h$ est mesurable.*

Si $\mathcal{E}$ est un faisceau cohérent sans torsion, on définit une métrique singulière sur $\mathcal{E}$ via la restriction $E := \mathcal{E}|_{X\setminus\Lambda}$ où $\Lambda \subset X$ est un sous-ensemble de codimension au moins deux, tel que E soit un fibré vectoriel.

Si (E, h) est un fibré vectoriel muni d'une métrique singulière, alors la métrique duale $h^\star$ induite sur $E^\star$ par h vérifie les propriétés (1) et (2) de 4.3. On dit que (E, h) est semi-positif au sens de Griffiths si la fonction $x \to \log|\xi(x)|_{h^\star}$ est psh, pour toute section holomorphe locale ξ du fibré $E^\star$.

Par exemple, supposons que l'inclusion $p_\star\big((K_{X/Y} + L) \otimes \mathcal{I}(h_L)\big) \to p_\star(K_{X/Y} + L)$ soit génériquement un isomorphisme. Alors $p_\star(K_{X/Y} + L)|_{Y\setminus\Sigma}$ muni de la métrique L^2 est un fibré hermitien singulier au sens de la définition 4.3. Ici $\Sigma \subset Y$ est un ensemble de codimension au moins deux tel que $p_\star(K_{X/Y} + L)|_{Y\setminus\Sigma}$ est un fibré vectoriel.

Remarque 4.4. — Dans le cas d'une submersion $p : X \to Y$, on montre dans [BP08] que $p_\star(K_{X/Y} + L)$ est semi-positif au sens de Griffiths. La notion de « métrique singulière » introduite dans cet article n'incorpore pas la demande (1) de la définition 4.3. Ceci est parfaitement cohérent avec ce qu'on veut démontrer dans [BP08] mais il est clair que pour une étude systématique de cette notion, la condition (1) est indispensable. On se réfère à [Ra15], [PT] pour plusieurs résultats et exemples dans ce sens.

Dans ce cercle d'idées, le résultat le plus général à ce jour a été obtenu par C. Hacon, M. Popa et C. Schnell, [HPS].

THÉORÈME 4.5 ([HPS]). — *Soit $p : X \to Y$ un espace algébrique fibré, et soit $(L, h_L) \to X$ un fibré en droites muni d'une métrique dont le courant de courbure est positif. Alors il existe un sous-ensemble $\Sigma \subset Y$ de codimension ≥ 2 tel que le faisceau image directe $p_\star\big((K_{X/Y} + L) \otimes \mathcal{I}(h_L)\big)|_{Y \setminus \Sigma}$ est un fibré vectoriel muni de la métrique canonique singulière et positif au sens de Griffiths.*

Si le morphisme $p_\star\big((K_{X/Y} + L) \otimes \mathcal{I}(h_L)\big) \to p_\star(K_{X/Y} + L)$ est génériquement isomorphisme, le théorème 4.5 a été démontré dans [PT].

Remarque 4.6. — Dans l'article [PT] on montre qu'un faisceau $\mathcal{E}$ qui admet une métrique singulière positive au sens de Griffiths est *faiblement semi-positif* au sens de Viehweg. Donc le théorème 4.5 peut être vu comme une version quantitative des résultats de Viehweg dans [Vi2].

Pour finir, voici une application de ces techniques, obtenue dans [CP].

THÉORÈME 4.7 ([CP]). — *Soit $p : X \to A$ un espace algébrique fibré, où A est une variété abélienne. Alors on a*

$$\kappa(X) \geq \kappa(F) \tag{110}$$

où F est la fibre générique de p.

C'est une confirmation de la conjecture de Iitaka mentionnée dans l'introduction dans le cas où la base est une variété abélienne. La preuve originale dans [CP] a été simplifiée très récemment par [HPS] en combinant des méthodes algébriques et analytiques. Les techniques de géométrie algébrique montrent qu'on peut se réduire au cas où le faisceau $\mathcal{F}_m := p_\star(mK_{X/A})$ est *unipotent*, i.e. succession d'extensions de fibrés triviaux. Dans ce cas $\det \mathcal{F}_m$ est trivial, et alors on peut utiliser un résultat de H. Raufi, cf. [Ra15], pour déduire l'existence du tenseur de courbure (associé à la métrique L^2) en tant que courant de type (1,1) à coefficients distributions et valeurs dans $\mathrm{End}(\mathcal{F}_\mathrm{m})$. Ce courant est positif, et sa trace vaut zéro. En conclusion, il est identiquement nul. Un argument de régularité montre que dans ce cas, la métrique de $\mathcal{F}_m$ est non singulière, et la forme de courbure correspondante est nulle : c'est donc un fibré plat. Par ailleurs la structure des fibrés plats sur les variétés abéliennes est bien connue, ce qui permet de conclure.

5. GÉODÉSIQUES FAIBLES ET THÉORÈMES D'UNICITÉ POUR LES MÉTRIQUES EXTRÉMALES

Dans cette partie, nous allons discuter les résultats de [BeBe14] et [Bo15]. Ces thèmes ont été abordés très récemment dans le séminaire Bourbaki [Dem16].

5.1. Convexité le long des géodésiques

Nous allons discuter dans la suite les points principaux des théorèmes 1.14 et 1.16, concernant la convexité des fonctionnelles de Ding et Mabuchi respectivement le long des géodésiques faibles.

5.1.1. *Fonctionnelle de Ding.* — Soit (X, ω_0) une variété kählérienne compacte telle que $\displaystyle\int_X \omega_0^n = 1$. On note $\mathcal{P}_\alpha$ l'espace des potentiels de métriques kählériennes dans la classe $\alpha \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ qui contient ω_0.
On définit la fonctionnelle de Monge-Ampère $E : \mathcal{P}_\alpha \to \mathbb{R}$ comme suit

$$E(\phi) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \int_X \phi \omega_\phi^k \wedge \omega_0^{n-k} \tag{111}$$

où on note $\omega_\phi := \omega_0 + dd^c\phi$. Si $(\phi_t)_{t\in[0,1]}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{P}_\alpha$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à t, alors on a

$$\frac{d}{dt} E(\varphi_t) = \int_X \dot{\phi}_t \omega_{\phi_t}^n. \tag{112}$$

et donc E est une primitive de l'opérateur de Monge-Ampère $MA(\phi) = \omega_\phi^n$.

En dérivant encore une fois par rapport à t, on obtient la formule

$$\frac{d^2}{dt^2} E(\varphi_t) = \frac{1}{n} \int_X (\ddot{\phi}_t - |\nabla \dot{\phi}_t|^2_{\omega_{\phi_t}}) \omega_{\phi_t}^n. \tag{113}$$

Supposons que le fibré anticanonique $-K_X$ de X soit ample – auquel cas X est une variété de Fano (par définition). Alors $\alpha := c_1(X)$ est une classe de Kähler, et on suppose que la métrique de référence est $\omega_0 \in c_1(X)$. Il existe donc une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty(X)$ telle que ω_0 est la courbure de Ricci de ω_f, i.e.

$$\omega_0 = \mathrm{Ricci}_{\omega_f}, \tag{114}$$

cf. Yau. Donc chaque forme $\omega_\phi = \omega_0 + dd^c\varphi$ définit naturellement un élément de volume sur X, notamment $e^{-\varphi}\omega_f^n$.
La fonctionnelle de Ding, cf. [Ding88], [DT92], est définie par la formule suivante

$$D(\phi) = L(\phi) - E(\varphi) - L(0), \quad L(\phi) := -\log \int_X e^{-\varphi} \omega_f^n. \tag{115}$$

Soit Φ une géodésique dans $\overline{\mathcal{P}}_{c_1(X)}$ telle que $\Phi(j, \cdot) = \omega_{\phi_j}$ pour $j = 0, 1$. Dans [Bo15], Berndtsson obtient les résultats suivants

Théorème 5.1 ([Bo15]). — *La fonction $z \to D\big(\Phi(z, \cdot)\big)$ est sousharmonique, et donc convexe par rapport à $Im(z)$.*

Notons que modulo des questions de régularité, cet énoncé est une conséquence directe du théorème 1.7 pour l'application de projection $p : S \times X \to S$ et le fibré $L := -K_X$; ceci établit la sousharmonicité de $z \to L\big(\Phi(z, \cdot)\big)$. Ensuite, on voit dans l'expression (113) que la dérivée seconde de E le long d'une géodésique *de classe* $\mathcal{C}^\infty(X)$ vaut zéro.

Berndtsson montre que ce fait reste valable pour les géodésiques au sens faible – et même lorsque le potentiel Φ est seulement supposé borné – cf. [Bo15] pour les détails. C'est le point crucial de l'article. Cette technique a été reprise dans beaucoup d'autres contextes, e.g. pour montrer une version de 5.1 pour les variétés log-Fano (cf. [Bo15]), ainsi que dans [BBGZ15].

5.1.2. *Fonctionnelle de Mabuchi.* — Nous n'allons pas rappeler la définition de la fonctionnelle de Mabuchi $\mathcal{M} : \mathcal{P}_\alpha \to \mathbb{R}$ ici. On se réfère à [Mab], [Dem16]. Notre point de départ sera l'identité

$$dd^c\mathcal{M}\big(\Phi(z,\cdot)\big) = \int_X \Theta_\Phi(K_{S\times X/S}) \wedge (\pi^\star\omega_0 + dd^c\Phi)^n, \tag{116}$$

cf. e.g. [BeBe14] où les notations sont les suivantes. L'opérateur dd^c dans le membre de gauche agit sur la fonction $z \to \mathcal{M}\big(\Phi(z,\cdot)\big)$, et il en résulte une forme de type (1,1) sur S. La fonction $\Phi(\cdot,\cdot)$ est une géodésique faible ; notons en passant que les propriétés de régularité de Φ établies dans [Chen00]) suffisent pour donner un sens à l'expression $\mathcal{M}\big(\Phi(z,\cdot)\big)$. On note $\Theta_\Phi(K_{S\times X/S})$ la courbure du fibré canonique relatif de la projection $S\times X \to X$ muni de la métrique induite par Φ.

Dans [BeBe14], Berman et Berndtsson confirment une conjecture importante de X. Chen en montrant le résultat suivant.

Théorème 5.2 ([BeBe14]). — *La fonction $z \to \mathcal{M}\big(\Phi(z,\cdot)\big)$ est sousharmonique, et donc convexe par rapport à $Im(z)$.*

Si Φ était une géodésique de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathcal{P}_\alpha$, alors la positivité de (116) est une conséquence de la théorie des feuilletages de Monge-Ampère, cf. [B]. En effet, on montre dans [B] que le fibré canonique relatif est semi-positif par restriction au noyau de $\pi^\star\omega + dd^c\Phi$. Donc dans le contexte actuel, c'est une fois de plus le défaut de positivité de Φ qui nous pose problème. L'exemple construit par Ross-Witt Nyström cf. [RWN] montre que cela peut effectivement se produire.

En gros, l'argument dans [BeBe14] est le suivant. Soit $\Omega \subset X$ un ouvert de coordonnées biholomorphe à une boule dans $\mathbb{C}^n$, dans lequel le potentiel de ω_0 est φ_0. La fonction $\Phi_0 := \varphi_0 \circ \pi_X + \Phi$ est psh sur $S\times\Omega$. Par le théorème 1.7, pour chaque $m \geq 1$ le noyau de Bergman « fibre à fibre » $K_{m\Phi_0}$ est log-psh sur $S\times\Omega$. Par ailleurs, par les travaux de T. Bouche [Bou90], on a la relation

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^{2n}} K_{m\Phi_0}(z,\cdot)e^{-m\Phi_0(z,\cdot)} = \frac{\big(dd^c\Phi_0(z,\cdot)\big)^n}{\big(dd^c\phi_0\big)^n}. \tag{117}$$

Localement, la forme de courbure $\Theta_\Phi(K_{S\times X/S})$ est simplement

$$dd^c \log \frac{\big(dd^c\Phi_0(z,\cdot)\big)^n}{\big(dd^c\phi_0\big)^n} \tag{118}$$

qui est donc la limite du $dd^c \log K_{m\Phi_0} - mdd^c\Phi_0$. La quantité qu'on doit évaluer est la limite, lorsque $m \to \infty$, de

$$(119) \qquad \big(dd^c \log K_{m\Phi_0} - mdd^c\Phi_0\big) \wedge \big(dd^c\Phi_0\big)^n.$$

Le premier terme de cette expression est positif par le théorème 1.4. L'équation de la géodésique est $\big(dd^c\Phi_0\big)^{n+1} = 0$, ce qui fait que le deuxième terme – a priori, très négatif – disparaît. On renvoie à [BeBe14] pour les détails, ainsi qu'à [CLP14] pour une approche plus globale de 5.2.

5.2. Théorème de Bando-Mabuchi et unicité des métriques extrémales

Comme application des résultats de convexité dans la section précédente, Berndtsson obtient dans [Bo15] une nouvelle preuve du théorème d'unicité de Bando-Mabuchi, cf. [BM87]. En gros, l'argument est le suivant.

Soient ω_0 et ω_1 deux métriques de Kähler-Einstein dans $c_1(X)$. Il existe une unique géodésique faible $\Phi \in \mathcal{P}_{c_1(X)}$ le reliant. D'après 5.1, la fonctionnelle de Ding est convexe le long de Φ, et admet deux points critiques notamment 0 et 1 (correspondant aux deux métriques ω_j, où $j = 0, 1$). C'est donc une fonction *linéaire* par rapport à la partie imaginaire de z (et bien sûr, indépendante de la partie réelle de z).

Si Φ est une géodésique de classe $\mathcal{C}^\infty$, il est facile de conclure comme suit. La dérivée seconde de la fonctionnelle de Ding coïncide avec la forme de courbure de l'image directe de $K_{S\times X/S} + L$, ou $L = -K_X$. Berndtsson obtient l'automorphisme f de X tel que $f^\star\omega_1 = \omega_0$ en exploitant la formule (60) : quitte à bien choisir le représentant de u, cf. lemme (2.7), le membre de droite de cette formule est la somme de deux termes positifs. D'après la discussion précédente, le membre de gauche est identiquement nul en tout point de S. Donc v, la $(n-1,0)$–forme à valeurs dans $-K_X$ est holomorphe. Le champ de vecteurs obtenu en contractant la section constante de $K_{S\times X/S} + L$ avec v sera holomorphe et la conclusion s'ensuit.

A priori, la fonction Φ est seulement de classe $\mathcal{C}^{1,1}$. Dans ce cas, l'argument de [Bo15] est un peu plus compliqué, mais somme toute assez standard. On utilise une régularisation $\Phi_k \to \Phi$ qui converge vers Φ, telle que $dd^c\Phi_k$ admet un minorant uniforme par rapport à k. Il se peut que la courbure de l'image directe correspondant à la métrique induite par Φ_k ne soit pas zéro, mais sa limite faible lorsque $k \to \infty$ l'est. Le point important est d'obtenir des estimées uniformes pour les formes v_k. Pour finir la démonstration, on montre que la limite v de la suite (v_k) est holomorphe.

Enfin, voici quelques commentaires au sujet de la preuve du théorème d'unicité pour les métriques extrémales obtenues dans [BeBe14]. Considérons le cas des métriques à courbure scalaire constante ω_0 et ω_1 ; ces métriques sont les points critiques de la fonctionnelle de Mabuchi $\mathcal{M}$. Donc la fonction $z \to \mathcal{M}\big(\Phi(z,\cdot)\big)$ est linéaire d'après le théorème 5.2, où Φ est la géodésique reliant les métriques ω_j. Dans le contexte actuel, cette information est beaucoup plus difficile à exploiter, compte tenu de l'expression (116) où le terme $\Theta_\Phi(K_{S\times X/S})$ n'est pas nécessairement positif. On renvoie le lecteur à l'article original [BeBe14], dont l'argument évoque la *méthode de bifurcation* de Bando-Mabuchi. Pour une présentation très complète de cette méthode, on recommande l'excellent livre [Siu87].

RÉFÉRENCES

[Aub78] T. Aubin – *Équations de type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes*, Bull. Sci. Math. **102** no 1 (1978).

[BM87] S. Bando, T. Mabuchi – *Uniqueness of Einstein-Kähler metrics modulo connected group actions*, Adv. Stud. Pure. Math. Tokyo (1987)

[BT76] E. Bedford, B.A. Taylor – *The Dirichlet problem for complex Monge-Ampère equation*, Invent. Math. **37** (1976).

[BBGZ13] R. Berman, S. Boucksom, V. Guedj, A. Zeriahi – *A variational approach to complex Monge-Ampère equations*, Publ. Math. IHÉS **117** (2013).

[BBGZ15] R. Berman, S. Boucksom, V. Guedj, A. Zeriahi – *Käher–Einstein metrics and the Kähler-Ricci flow on log-Fano varieties*, arXiv 1111.7158.

[BeBe14] R. Berman, B. Berndtsson – *Convexity of the K-energy on the space of Kähler metrics and uniqueness of extremal metrics*, arXiv :1405.0401, (2014).

[BP08] B. Berndtsson, M. Păun – *Bergman kernels and the pseudo-effectivity of relative canonical bundles*, Duke Math. J. **145** (2008), no. 2.

[Bo09] B. Berndtsson – *Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 2, 531–560.

[Bo11] B. Berndtsson – *Strict and nonstrict positivity of direct image bundles*, Math. Z. **269** (2011), no. 3-4, 1201–1218.

[BP12] B. Berndtsson, M. Păun – *Quantitative extensions of pluricanonical forms and closed positive currents*, Nagoya Math. J. **205** (2012), 25–65.

[BL14] B. Berndtsson, L. Lempert – *A proof of the Ohsawa-Takegoshi theorem with sharp estimates*, arXiv :1407.4946 (2014).

[Bo15] B. Berndtsson – *A Brunn-Minkowski type inequality for Fano manifolds and some uniqueness theorems in Kähler geometry*, Invent. Math. **200** (2015), no. 1, 149–200.

[BoB15] B. Berndtsson – *The openness conjecture and complex Brunn-Minkowski inequalities*, arXiv :1405.0989, Vol 10, Abel Symposia (2015).

[Bl1] Z. Błocki – *Suita conjecture and the Ohsawa-Takegoshi extension theorem*, Inv. Math.**193** (2013), 149–158.

[Bl2] Z. Błocki – *Cauchy-Riemann meet Monge-Ampère*, Bulletin of Mathematical Sciences **4** (2014), 433–480.

[Bl3] Z. Błocki – *Suita Conjecture from the one-dimensional viewpoint, in Analysis meets geometry.* In memory of Mikael Passare, eds. M. Andersson, J. Boman, C. Kiselman, P. Kurasov, R. Sigurdsson (eds.), Springer (à paraître).

[Bou90] T. Bouche – *Convergence de la métrique de Fubini-Study d'un fibré linéaire positif. (French) [Convergence of the Fubini-Study metric of a positive linear bundle]*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **40** (1990), no. 1, 117–130.

[B] D. Burns – *Curvatures of Monge-Ampère foliations and parabolic manifolds*, Ann. of Math. (2) **115** (1982), no. 2, 349–373.

[Ca54] E. Calabi – *The space of Kähler Metrics* Proc. ICM, Amsterdam, II (1954).,

[Cao] J. Cao – *Ohsawa-Takegoshi extension theorem for compact Kähler manifolds and applications*, arXiv :1404.6937.

[CP] J. Cao, M. Păun – *Kodaira dimension of algebraic fiber spaces over abelian varieties*, arXiv :1504.01095, à paraître dans Inv. Math.

[Chen00] X.X. Chen – *The space of Kähler Metrics*, J. Diff. Geom. **56** (2000).

[Chen01] X.X. Chen – *On the lower bound of the Mabuchi energy and its application*, Internat. Math. Res. Notices 2000, no. 12, 607–623.

[CLP14] X.X. Chen, L. Li, M. Păun – *Approximation of weak geodesics and subharmonicity of Mabuchi energy*, arXiv :1409.7896, à paraître aux Ann. Fac. Sci. Toulouse.

[CH01] J. A. Chen, C. D. Hacon – *Characterization of abelian varieties*, Invent. Math. **143** (2001), no. 2, 435–447.

[DL] T. Darvas, L Lempert – *Weak geodesics in the space of Kähler metrics*, arXiv :1205.0840, Math. Res. Lett. **19** (2012), no. 5, 1127–1135.

[DR1] T. Darvas, Y. Rubinstein – *A minimum principle for Lagrangian graphs*, arXiv :1606.08818.

[DR2] T. Darvas, Y. Rubinstein – *Tian's properness conjectures and Finsler geometry of the space of Kähler metrics*, arXiv :1506.07129.

[DH] T. Darvas, W. He – *Geodesic Rays and Kähler-Ricci Trajectories on Fano Manifolds*, arXiv :1411.0774.

[Dar] T. Darvas – *The Mabuchi Completion of the Space of Kähler Potentials*, arXiv :1401.7318.

[Dem95] J.-P. Demailly – *Pseudoconvex-concave duality and regularization of currents.* Several complex variables (Berkeley, CA, 1995–1996), 233–271, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 37, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[DK01] J.-P. Demailly, J. Kollár – *Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler-Einstein metrics on Fano orbifolds*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 34 (2001), no. 4, 525–556.

[Dem15] J.-P. Demailly – *Extension of holomorphic functions defined on non reduced analytic subvarieties*, manuscrit Institut Fourier, 18 octobre 2015, arXiv : 1510.05230.

[Dem16] J.-P. Demailly – *Variational approach for complex Monge-Ampère equations and geometric applications (after Berman, Berndtsson, Boucksom, Eyssidieux, Guedj, Jonsson, Zeriahi, ...)*, Séminaire Bourbaki (2015/16), mars 2016, exposé no. 1112.

[Ding88] W.-Y. Ding – *Remarks on the existence problem of positive Kähler-Einstein metrics*, Math. Ann. 282 (1988), 463–471.

[DT92] W.-Y. Ding, G. Tian. – *Kähler-Einstein metrics and the generalized Futaki invariant*, Invent. Math. **110** (1992), no. 2, 315–335.

[F78] T. Fujita – *On Kähler fiber spaces over curves*, J. Math. Soc. Japan 30 (1978), no. 4, 779–794.

[FJ1] C. Favre, M. Jonsson – *Valuative analysis of planar plurisubharmonic functions*, Invent. Math. **162** (2005), no. 2, 271–311.

[FJ2] C. Favre, M. Jonsson – *Valuations and multiplier ideals*, J. Amer. Math. Soc. **18** (2005), no. 3, 655–684.

[Ga] R. J. Gardner – *The Brunn-Minkowski inequality*, BAMS **39** (2002).

[Griff81] P. Griffiths – *Curvature properties of the Hodge bundles*, Topics in transcendental algebraic geometry (Princeton, N.J., 1981/1982), 29–49, Ann. of Math. Stud. 106, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1984.

[Griff70] P. Griffiths – *Periods of integrals on algebraic manifolds. III. Some global differential-geometric properties of the period mapping*, Publ. Math. IHÉS 38, 1970.

[GZ2] Q. Guan, X. Zhou – *A proof of Demailly's strong openness conjecture*, Ann. of Math. (2) 182 (2015), no. 2, 605–616.

[GZ1] Q. Guan, X. Zhou – *A solution of an L^2 extension problem with an optimal estimate and applications*, Ann. of Math. (2) 181 (2015), no. 3, 1139–1208.

[H04] C.D. Hacon – *A derived category approach to generic vanishing*, J. reine angew. Math. **575** (2004), 173–187.

[HPS] C.D. Hacon, M. Popa, C. Schnell – *Kodaira dimension of algebraic fiber spaces over abelian varieties*, preprint 2016.

[Hor] A. Höring – *Positivity of direct image sheaves - a geometric point of view*, Enseign. Math. (2) **56** (2010), no. 1-2, 87–142.

[H65] L. Hörmander – *L^2 estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$ operator*, Acta Math. **113** (1965), 89–152.

[JM12] M. Jonsson and M. Mustaţă – *Valuations and asymptotic invariants for sequences of ideals.* Ann. Inst. Fourier **62** (2012), no. 6, 2145–2209.

[K85] Y. Kawamata – *Minimal models and the Kodaira dimension of algebraic fiber spaces*, J. reine angew. Math. **363** (1985), 1–46.

[K82] Y. Kawamata – *Kodaira dimension of algebraic fiber spaces over curves*, Invent. Math. **66** (1982), no. 1, 57–71.

[Ki78] C. O. Kiselman – *The partial Legendre transformation for plurisubharmonic functions*, Invent. Math. **49** (1978), no. 2, 137–148.

[Kob] S. Kobayashi – *Differential geometry of complex vector bundles*, Princeton University Press, 1987.

[Kol] J. Kollár – *Subadditivity of Kodaira dimension : fibers of general type*, Advanced Studies in Pure Math. **10** (1987), Algebraic Geometry, Sendai, pp. 361–398.

[Mab] T. Mabuchi – *A functional integrating Futaki's invariant*, Proc. of the Japan Academy **61** (1985).

[MY04] F.Maitani, H. Yamaguchi – *Variation of Bergman metrics on Riemann surfaces*, Math. Ann. **330** (2004), no. 3, 477–489.

[MT1] C. Mourougane, S. Takayama – *Extension of twisted Hodge metrics for Kähler morphisms*, J. Differential Geom. 83 (2009), no. 1, 131–161.

[MT2] C. Mourougane, S. Takayama – *Hodge metrics and the curvature of higher direct images*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 41 (2008), no. 6, 905–924.

[MT3] C. Mourougane, S. Takayama – *Hodge metrics and positivity of direct images*, J. reine angew. Math. 606 (2007), 167–178.

[OT] T. Ohsawa, K. Takegoshi – *On the extension of L2 holomorphic functions*, Math. Z. **195** (1987), no. 2, 197–204.

[PT] M. Păun, S. Takayama – *Positivity of twisted relative pluricanonical bundles and their direct images*, arXiv :1409.5504.

[PS1] M. Popa, C. Schnell – *On direct images of pluricanonical bundle*, Algebra Number Theory, **8** (2014).

[PS2] M. Popa, C. Schnell – *Kodaira dimension and zeros of holomorphic one-forms*, Ann. of Math. (2) **179** (2014), no. 3, 1109–1120.

[Pre] A. Prékopa – *On logarithmic concave measures and functions* Acad. Sci. Math. (Szeged) **34**,1973.

[Ra15] H. Raufi – *Singular hermitian metrics on holomorphic vector bundles* , Ark. Mat. **53** (2015), no. 2, 359–382.

[RWN] J. Ross, D. Witt Nyström – *On the Maximal Rank Problem for the Complex Homogeneous Monge-Ampère Equation*, arXiv :1610.02280.

[Ts11] H. Tsuji – *Canonical singular Hermitian metrics on relative canonical bundles*, Amer. J. Math. **133** (2011), no. 6, 1469–1501.

[Sek] G. Székelyhidi – *An Introduction to Extremal Kähler Metrics,* Graduate Studies in Mathematics, AMS.

[Sem92] S. Semmes – *Complex Monge-Ampère and symplectic manifolds*, Amer. J. Math. **114** (1992), no. 3, 495–550.

[Siu87] Yum-Tong Siu – *Lectures on Hermitian-Einstein metrics for stable bundles and Kähler-Einstein metrics*, DMV Seminar, Birkhäuser-Verlag, Basel,1987.

[Vi1] E. Viehweg – *Weak positivity and the additivity of the Kodaira dimension. II. The local Torelli map.* Classification of algebraic and analytic manifolds (Katata, 1982), 567—589, Progr. Math. **39**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[Vi2] E. Viehweg – *Weak positivity and the additivity of the Kodaira dimension for certain fibre spaces*, Algebraic varieties and analytic varieties (Tokyo, 1981), 329–353, Adv. Stud. Pure Math. 1, North-Holland, Amsterdam, 1983.

[Wa2] X. Wang – *Curvature of higher direct image sheaves and its application on negative-curvature criterion for the Weil-Petersson metric*, arXiv :1607.03265.

[Wa1] X. Wang – *A curvature formula associated to a family of pseudoconvex domains*, arXiv :1508.00242, à paraître aux Annales de l'Institut Fourier.

[Yau78] S.-T. Yau – *On the Ricci curvature of a compact manifold and the complex Monge-Ampère equation*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 339–441.

Mihai PĂUN

Department of Mathematics
College of Liberal Arts and Sciences
University of Illinois at Chicago
851 S. Morgan Street
Chicago IL 60607-7045, USA
E-mail : mpaun@uic.edu