

PROGRÈS EN IRRATIONALITÉ

[d'après C. Voisin, J.-L. Colliot-Thélène, B. Hassett, A. Kresch,
A. Pirutka, B. Totaro, Y. Tschinkel et al.]

par Emmanuel Peyre

1. RATIONALITÉ ET IRRATIONALITÉ

1.1. Notions de rationalité

À la base, les questions de rationalité concernent la possibilité de paramétrer les solutions d'équations polynomiales en plusieurs variables à l'aide de fonctions rationnelles. Considérons par exemple la lemniscate de Bernoulli d'équation

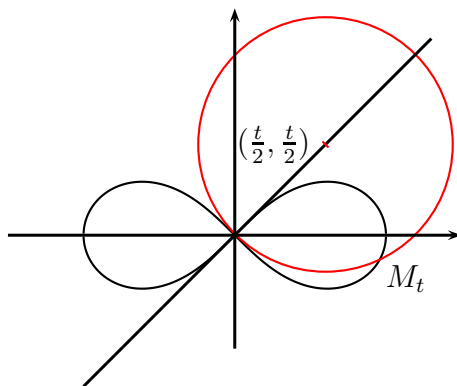
$$(1) \quad (X^2 + Y^2)^2 - X^2 + Y^2 = 0.$$

Pour tout nombre réel t , le cercle de centre $(t/2, t/2)$ et passant par $(0, 0)$ rencontre la courbe en le point de coordonnées $(0, 0)$ et le point

$$M_t = \left(\frac{t(1+t^2)}{1+t^4}, \frac{t(1-t^2)}{1+t^4} \right)$$

et l'application φ donnée par $t \mapsto M_t$ définit une bijection de \mathbf{R} sur les points de

FIGURE 1. Lemniscate de Bernoulli



la courbe d'équation (1). Ce paramétrage permet en particulier de décrire explicitement l'ensemble des solutions à coordonnées rationnelles de l'équation (1). En effet, l'application réciproque de φ est donnée par

$$\varphi^{-1}(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

pour tout point (x, y) de la lemniscate distinct de l'origine et $\varphi^{-1}(0, 0) = 0$, si bien que l'image par φ d'un nombre réel t a des coordonnées rationnelles si et seulement si t est lui-même un nombre rationnel.

En dimension supérieure, il convient de préciser le type de paramétrage recherché. Considérons l'exemple suivant, dû à M. Ojanguren. On considère la surface de Châtelet S d'équation

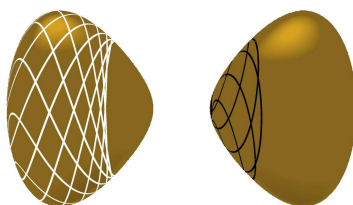
$$(2) \quad Y^2 + Z^2 = 2X(X^2 - 3).$$

Le plan H d'équation $Z = 2$ est tangent à la surface en le point $P_0 = (-1, 0, 2)$. Les droites de H d'équation $Y = s(X + 1)$ rencontrent la surface S en P_0 et en le point $M_s = \frac{1}{2}(s^2 + 4, s^3 + 6s)$. Comme la surface est une surface de révolution autour de l'axe des X , il suffit de choisir un paramétrage du cercle unité tel que $t \mapsto \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ pour obtenir une application φ

$$(s, t) \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2t}{1+t^2} & \frac{-1+t^2}{1+t^2} \\ 0 & \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^2 + 4 \\ s^3 + 6s \\ 4 \end{pmatrix}$$

qui envoie les points de \mathbf{R}^2 dans les points réels de S . Cela permet par exemple de trouver certaines des solutions rationnelles de l'équation ou d'exhiber des courbes paramétrées par des fonctions rationnelles contenues dans la surface (figure 2). Cette application

FIGURE 2. Surface de Châtelet



n'est cependant ni injective ni surjective. En effet, soit $P = (x, y, z)$ une solution de l'équation (2). Si $x > 2$, le point P a deux antécédents par φ , il en a un si $x = 2$ et aucun si $x < 2$. En fait, il n'est pas possible de trouver des applications rationnelles induisant une bijection ψ d'un ouvert dense U de \mathbf{R}^2 sur un ouvert dense de la surface. En effet, notons \tilde{S} une compactification projective et lisse de S . Étant donné deux points distincts P et Q de U la restriction de ψ à l'intersection $U \cap (PQ)$ s'étend en

un morphisme de la droite projective sur \mathbf{R} dans \tilde{S} . Il en résulte que l'image de ψ est contenue dans une des deux composantes connexes de \tilde{S} .

D'un point de vue plus algébrique, l'application φ induit un morphisme du corps $\mathbf{K} = \mathbf{R}(X, Y)[Z]/(Y^2 + Z^2 - 2X(X^2 - 3))$ dans le corps $\mathbf{R}(s, t)$, définissant ainsi une extension de corps de degré 2, mais la \mathbf{R} -algèbre \mathbf{K} n'est pas isomorphe à $\mathbf{R}(s, t)$.

Dans la suite de cet exposé, une variété est supposée irréductible et une *belle* variété sur un corps \mathbf{K} est une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur \mathbf{K} .

DÉFINITIONS 1.1. — *Soit V une belle variété sur un corps \mathbf{K} . Soit $\mathbf{K}(V)$ le corps des fonctions de V . La variété V est dite*

- a) \mathbf{K} -rationnelle *s'il existe un entier n et un isomorphisme de \mathbf{K} -algèbres du corps $\mathbf{K}(V)$ sur le corps $\mathbf{K}(T_1, \dots, T_n)$;*
- b) \mathbf{K} -stablement rationnelle *s'il existe des entiers m et n et un isomorphisme de \mathbf{K} -algèbres du corps $\mathbf{K}(V)(X_1, \dots, X_m)$ sur le corps $\mathbf{K}(T_1, \dots, T_n)$;*
- c) \mathbf{K} -rétractilement rationnelle *s'il existe un ouvert dense U de V , un ouvert W d'un espace projectif $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}^n$ et des morphismes de variétés $f : U \rightarrow W$ et $g : W \rightarrow U$ de sorte que la composée $g \circ f$ soit l'application identité de U .*
- d) \mathbf{K} -unirationnelle *s'il existe un entier n et un morphisme de \mathbf{K} -algèbres du corps $\mathbf{K}(V)$ dans $\mathbf{K}(T_1, \dots, T_n)$;*
- e) rationnellement connexe par chaînes *si pour toute extension \mathbf{L} de \mathbf{K} qui est algébriquement close, deux points de $V(\mathbf{L})$ peuvent être reliés par une chaîne de courbes rationnelles.*

On peut démontrer les implications suivantes :

$$a) \implies b) \implies c) \implies d) \implies e).$$

Si V est de dimension 1 et possède un point rationnel, le théorème de Lüroth [Lü] implique l'équivalence entre ces cinq conditions. Sur le corps des nombres complexes \mathbf{C} , il résulte du théorème de G. Castelnuovo [Ca] que toutes ces implications sont des équivalences lorsque la variété V est de dimension 2 (*cf.* [Ha, §1.4]). Par exemple, la surface de Châtelet ci-dessus devient rationnelle lorsqu'on étend les scalaires à \mathbf{C} .

En dimension supérieure, des contre-exemples sont connus pour la réciproque de chacune des implications a) \implies b) et c) \implies d), y compris sur le corps des nombres complexes. Ainsi M. Artin et D. Mumford donnent dans [AM] un exemple de variété unirationnelle V sur \mathbf{C} qui n'est pas rationnelle en utilisant comme invariant le sous-groupe de torsion du groupe de cohomologie singulière $H^3(V(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$, résultat qui fit l'objet d'un exposé dans ce séminaire par P. Deligne [De]. Comme la non-trivialité de ce sous-groupe de torsion est en fait une obstruction à la rationalité rétractile, la variété qu'ils considèrent n'est pas rétractilement rationnelle. À la même époque, Yu. Manin et V. A. Iskovskikh donnaient dans [IM] une famille d'exemples de variétés unirationnelles non rationnelles reposant sur le groupe des automorphismes birationnels et C. H. Clemens et F. A. Griffiths dans [CG] donnaient un autre exemple d'une telle variété mais

en utilisant la jacobienne intermédiaire. Pour la réciproque de l'implication a) \Rightarrow b), le premier contre-exemple est dû à A. Beauville, J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et P. Swinnerton-Dyer [BCTSSD] et repose également sur le calcul de la jacobienne intermédiaire. Il fut présenté dans ce séminaire par L. Moret-Bailly [MB].

L'orateur ne connaît pas à l'heure actuelle de contre-exemples à la réciproque des implications b) \Rightarrow c) ou d) \Rightarrow e) sur le corps des nombres complexes. Sur un corps qui n'est pas algébriquement clos, les tores algébriques fournissent des exemples de variétés rétractilement rationnelles qui ne sont pas stablement rationnelles : [CTS] et [HY].

Toutes les obstructions à la rationalité stable utilisées dans la suite de cet exposé sont en fait des obstructions à la rationalité rétractile. Le terme stable peut donc être remplacé par rétractile à chacune de ses occurrences.

L'objectif de cet exposé est de présenter une technique récente introduite dans l'article [Vo2] de C. Voisin ainsi que des variantes de cette technique qui permettent de démontrer que « la plupart » des membres de diverses familles classiques de variétés ne sont pas stablement rationnels.

D'autre part, il est naturel de s'interroger sur le lien entre déformation des variétés et rationalité. L'exposé de J.-P. Serre de février 1957 [Se] reprend l'interprétation de K. Kodaira du critère de rationalité de Castelnuovo pour les surfaces algébriques complexes. Il en résulte que la rationalité est préservée dans les familles lisses en dimension ≤ 2 . Les techniques présentées ici permettent en particulier de construire des familles de variétés projectives et lisses de dimension ≥ 4 telles que le lieu des fibres rationnelles ne soit ni ouvert ni fermé.

À tous les collègues, en particulier A. Chambert-Loir, J.-L. Colliot-Thélène, S. Druel, A. Pirutka et Y. Tschinkel, qui ont relu ce texte dans un délai extrêmement court, je présente à la fois mes remerciements les plus vifs pour les suggestions qu'ils m'ont faites et mes regrets de n'avoir pas été capable de corriger l'ensemble des défauts qu'ils m'ont signalés. Je remercie également les participants au groupe de travail sur la décomposition de la diagonale qui eut lieu à l'université de Pékin en juillet 2016 pour leurs présentations qui m'ont aidé pour la préparation de cet exposé.

1.2. Invariants cohomologiques

Avant d'entrer dans le vif du sujet, faisons une digression sur une classe d'invariants qui généralise l'invariant utilisé par Artin et Mumford, à savoir le sous-groupe de torsion de $H^3(V(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$. En un sens, l'obstruction à la stable rationalité considérée par la suite, à savoir la décomposition de Chow de la diagonale, peut être vue comme un avatar universel de ces invariants.

Dans [CTO], J.-L. Colliot-Thélène et M. Ojanguren ont introduit une famille d'invariants birationnels, les groupes de cohomologie non ramifiée. Pour comprendre la construction de ces groupes, on peut penser à la description des fonctions inversibles sur une variété comme l'ensemble des éléments du corps des fonctions qui n'ont ni pôles ni zéros : de façon imagée, une classe de cohomologie non ramifiée est une classe dans

le groupe de cohomologie galoisienne du corps de fonctions de la variété qui « n'a ni pôles ni zéros ».

Un cadre général pour les invariants non ramifiés est décrit par J.-L. Colliot-Thélène dans [CT], nous nous placerons ici dans le cadre des modules de cycles définis par M. Rost dans [Ro]. Rappelons que pour tout corps \mathbf{L} , l'anneau de K -théorie de Milnor est l'anneau gradué $K_M^*(\mathbf{L})$ quotient de la \mathbf{Z} -algèbre tensorielle $T_{\mathbf{Z}}(\mathbf{L}^*)$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme $x \otimes (1 - x)$ pour $x \in \mathbf{L} - \{0, 1\}$. Étant donné un schéma S sur un corps \mathbf{K} , on peut considérer la catégorie $\mathcal{F}(S)$ des corps \mathbf{L} munis d'un morphisme $\text{Spec}(\mathbf{L}) \rightarrow S$. Une valuation v au-dessus de S est un morphisme de \mathbf{K} -schémas $\text{Spec}(\mathcal{O}_v) \rightarrow S$ où \mathcal{O}_v est un anneau local de type géométrique sur \mathbf{K} , c'est-à-dire obtenu en localisant une algèbre intègre de type fini sur \mathbf{K} en un point régulier de codimension 1. Une théorie de modules de cycles sur S est alors un foncteur covariant M^* de la catégorie $\mathcal{F}(S)$ dans la catégorie des \mathbf{Z} -modules gradués, muni des structures suivantes :

(i) À tout morphisme $\varphi : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}'$ de $\mathcal{F}(S)$ correspondant à une extension finie de corps est associé un morphisme de corestriction $M^*(\mathbf{L}') \rightarrow M^*(\mathbf{L})$;

(ii) Pour tout objet \mathbf{L} de $\mathcal{F}(S)$, le groupe gradué $M^*(\mathbf{L})$ est muni d'une structure de $K_M^*(\mathbf{L})$ -module gradué ;

(iii) Pour toute valuation v au-dessus de S , on dispose de morphismes de résidu de degré -1 :

$$M^i(\text{Fr}(\mathcal{O}_v)) \xrightarrow{\partial_v} M^{i-1}(\kappa_v),$$

où $\text{Fr}(\mathcal{O}_v)$ désigne le corps des fractions de l'anneau local \mathcal{O}_v et κ_v son corps résiduel.

Ces différentes structures doivent satisfaire en outre diverses conditions, notamment de compatibilité, que nous ne détaillerons point ici [Ro, pp. 329 et 337]. Soit \mathbf{K} un corps. Étant donné une théorie de modules de cycles M^* sur \mathbf{K} , le groupe non ramifié de degré i associé à une belle variété V est donné par

$$M_{\text{nr}}^i(V) = \bigcap_v \ker(\partial_v : M^i(\mathbf{K}(V)) \longrightarrow M^{i-1}(\kappa_v))$$

où v décrit l'ensemble des valuations correspondant aux points de codimension 1 de V . On peut démontrer que ce groupe est un invariant pour la rationalité stable de V [Ro, proposition 2.2 et corollaire 12.10]. On retrouve, comme cas particulier en degré 2 le groupe de Brauer non ramifié de V , noté $\text{Br}_{\text{nr}}(V)$, et en degré supérieur ses généralisations $H_{\text{nr}}^i(\mathbf{K}(V), \mu_n^{\otimes j})$, où μ_n désigne le faisceau des racines n -èmes de l'unité. Pour une variété complexe rationnellement connexe par chaînes V , le groupe de Brauer $\text{Br}_{\text{nr}}(V)$ est isomorphe à la partie de torsion de $H^3(V(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ utilisée par M. Artin et D. Mumford dans [AM].

L'avantage de cette description est que les morphismes de résidus peuvent être calculés de façon relativement explicite, ce qui permet de construire des classes dans la cohomologie non ramifiée, voire même de donner des méthodes de calcul de ces invariants non ramifiés. Dans cette direction, on peut mentionner les travaux de F. A.

Bogomolov [Bo], qui donnent une description complète du groupe de Brauer non ramifié pour le corps des fonctions rationnelles invariantes $\mathbf{C}(V)^G$ pour une représentation linéaire V d'un groupe G .

Détaillons une méthode pour obtenir explicitement des éléments non nuls dans le groupe de Brauer non ramifié. Les éléments du groupe de Brauer d'un corps \mathbf{K} peuvent être décrits comme les classes d'isomorphisme des algèbres de dimension finie sur \mathbf{K} qui sont des corps de centre \mathbf{K} [Bou, p. 276, prop. 4]. Si la caractéristique du corps est différente de deux, l'algèbre de quaternions associée à un couple (a, b) d'éléments de \mathbf{K}^* est définie comme l'algèbre associative et unifère engendrée par deux éléments I et J vérifiant les relations

$$I^2 = a, \quad J^2 = b \quad JI = -IJ;$$

elle fournit un élément $(a, b)_2$ de $\text{Br}(\mathbf{K})$ qui appartient au groupe de 2-torsion et est non nul si et seulement si l'algèbre de quaternions est un corps.

Décrivons maintenant le morphisme de résidu. Soit P un point de codimension 1 dans une belle variété V sur \mathbf{K} ; notons v la valuation correspondante. Sur la partie de 2-torsion, l'application résidu en P est un morphisme de groupes

$$\text{Br}(\mathbf{K}(V))[2] \xrightarrow{\partial_v} \kappa_v^*/(\kappa_v^*)^2.$$

Pour des éléments a, b de $\mathbf{K}(V)^*$, le quotient $b^{v(a)}/a^{v(b)}$ est un élément inversible de \mathcal{O}_v dont on peut considérer l'image $\overline{b^{v(a)}/a^{v(b)}}$ dans κ_v^* . Le résidu $\partial_v((a, b)_2)$ est alors donné par la classe de $(-1)^{v(a)v(b)}\overline{b^{v(a)}/a^{v(b)}}$ dans le groupe $\kappa_v^*/(\kappa_v^*)^2$.

À titre d'exemple, pour la surface de Châtelet présentée précédemment, l'élément $(X, -1)_2$ définit une classe non nulle de $\text{Br}(\mathbf{R}(\tilde{S}))$ qui ne provient pas de $\text{Br}(\mathbf{R}) = \{0, (-1, -1)_2\}$ et qui est non ramifiée. En effet, le résidu en le point de codimension 1 de \tilde{S} pour lequel $v(X) = 1$ (resp. $v(1/X) = 1$) est la classe de -1 dans $\kappa_v^*/(\kappa_v^*)^2$; comme le corps κ_v est isomorphe à $\mathbf{R}(Y)[Z]/(Y^2 + Z^2)$, cette classe est triviale. Le fait que le morphisme $\text{Br}(\mathbf{R}) \rightarrow \text{Br}_{\text{nr}}(\tilde{S})$ ne soit pas surjectif fournit une nouvelle obstruction à la rationalité stable de cette surface. Notons que l'image de cette classe dans $\text{Br}(\mathbf{C}(\tilde{S}))$ est, quant à elle, nulle.

En utilisant les groupes de cohomologie non ramifiée de degré supérieur, J.-L. Colliot-Thélène et M. Ojanguren produisent dans [CTO] des exemples de variétés unirationnelles non stablement rationnelles V sur \mathbf{C} dont le sous-groupe de torsion de $H^3(V(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ est trivial.

La question de déterminer si, pour une classe de variétés donnée, *tous* les invariants non ramifiés sont triviaux est une des motivations qui a conduit, dans [ACTP], à une approche qu'on pourrait qualifier de motivique et à la décomposition de la diagonale.

2. DÉCOMPOSITION DE LA DIAGONALE

Au sens des correspondances motiviques, la rationalité rétractile d'une variété permet d'écrire l'identité comme une somme de deux projecteurs particuliers. Nous allons maintenant décrire plus précisément cette décomposition.

2.1. La catégorie des correspondances

Soit V un schéma de type fini sur un corps \mathbf{K} . Soit $p \in \mathbf{N}$. On note $V_{(p)}$ (resp. $V^{(p)}$) l'ensemble des points de V dont l'adhérence est de dimension (resp. codimension) p dans V . Pour tout point P de V , on note $\kappa(P)$ le corps résiduel, qui est le corps des fonctions de l'adhérence de P dans V . Pour tout point $P \in V_{(p)}$ contenu dans l'adhérence Y d'un point $Q \in V_{(p+1)}$, l'anneau local $\mathcal{O}_{Y,P}$ définit un morphisme de groupes de $\kappa(Q)^*$ dans \mathbf{Z} , qui correspond à l'ordre d'annulation en P . On obtient ainsi une application diviseur

$$\text{div} : \bigoplus_{Q \in V_{(p+1)}} \kappa(Q)^* \longrightarrow \bigoplus_{P \in V_{(p)}} \mathbf{Z}$$

et le groupe de Chow en dimension p , noté $\text{CH}_p(V)$, est défini comme le conoyau de l'application diviseur. Cela définit un foncteur CH_p qui est covariant pour les morphismes propres.

Pour une variété non singulière V de dimension n sur un corps \mathbf{K} , on définit le groupe de Chow en codimension p , par $\text{CH}^p(V) = \text{CH}_{n-p}(V)$. En codimension un, on retrouve ainsi le groupe de Picard $\text{Pic}(V)$. Le produit d'intersection munit le groupe $\bigoplus_{i=0}^n \text{CH}^i(V)$ d'une structure d'anneau (*cf.* [Fu2, §8.3]).

Ce produit permet de définir la catégorie des correspondances, première étape vers une catégorie des motifs géométriques. Les objets de cette catégorie sont les belles variétés sur \mathbf{K} , les morphismes d'une variété X de dimension m vers une variété Y de dimension n , appelés correspondances de X vers Y , forment le groupe

$$\text{Corr}(X, Y) = \text{CH}^m(X \times Y).$$

Soient X, Y et Z des belles variétés sur \mathbf{K} . Notons $p_{X,Y}$ (resp. $p_{Y,Z}, p_{X,Z}$) la projection de $X \times Y \times Z$ sur $X \times Y$ (resp. $Y \times Z, X \times Z$). Rappelons que le graphe de la composée d'applications $f : X \rightarrow Y$ de graphe Γ_f et $g : Y \rightarrow Z$ de graphe Γ_g est donné par

$$(3) \quad \Gamma_{g \circ f} = p_{X,Z}((X \times \Gamma_g) \cap (\Gamma_f \times Z)).$$

La composée d'une correspondance α de $\text{Corr}(X, Y)$ avec une correspondance β de $\text{Corr}(Y, Z)$ est donnée par

$$\beta \circ \alpha = p_{X,Z*}(p_{X,Y}^*(\alpha) \cdot p_{Y,Z}^*(\beta)).$$

La formule (3) entraîne que l'application qui envoie un morphisme de variétés de Y vers X sur la classe de la réciproque de son graphe, c'est-à-dire le graphe obtenu par échange des deux composantes, définit un foncteur contravariant de la sous-catégorie pleine des belles variétés sur le corps \mathbf{K} dans la catégorie des correspondances. Ce

foncteur envoie le morphisme identité sur la classe de la diagonale. Les foncteurs de cohomologie usuels qui sont des foncteurs contravariants de la catégorie des belles variétés dans la catégorie des groupes abéliens se factorisent au travers de la catégorie des correspondances si bien que les correspondances induisent des morphismes entre groupes de cohomologie.

2.2. Trivialité universelle

Soit A un anneau commutatif. Pour tout schéma \mathcal{X} sur A et toute A -algèbre commutative B , on note \mathcal{X}_B le B -schéma déduit de \mathcal{X} par extension des scalaires de A à B , c'est-à-dire le produit $\mathrm{Spec}(B) \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathcal{X}$.

Une remarque élémentaire mais cruciale pour cet exposé est qu'une variété \mathbf{K} -rationnelle (resp. \mathbf{K} -stablement rationnelle) est \mathbf{L} -rationnelle (resp. \mathbf{L} -stablement rationnelle) sur toute extension de corps \mathbf{L} de \mathbf{K} . Supposons maintenant qu'on dispose d'un invariant F , contravariant ou encore covariant pour les morphismes propres, sur les belles variétés à valeurs dans les groupes abéliens qui est un invariant birationnel et tel que $F(V)$ soit isomorphe à $F(V \times \mathbf{P}_{\mathbf{K}}^1)$ pour toute belle variété V . En particulier l'invariant F est un invariant pour la rationalité stable. Alors l'invariant F est *universellement trivial* pour les variétés \mathbf{K} -stablement rationnelles au sens suivant : étant donnée une belle variété V sur le corps \mathbf{K} on dit que F est *universellement trivial pour V* si et seulement si le morphisme structural de $V_{\mathbf{L}}$ induit un isomorphisme entre $F(V_{\mathbf{L}})$ et $F(\mathbf{L}) = F(\mathrm{Spec}(\mathbf{L}))$ pour toute extension \mathbf{L} de \mathbf{K} .

Mais reprenons l'argument utilisé pour l'exemple de la surface de Châtelet : sur un corps algébriquement clos \mathbf{K} , si une belle variété V est rationnellement connexe par chaînes sur \mathbf{K} , deux points P et Q sur V peuvent être joints par une chaîne de courbes rationnelles. Or pour un point P sur une courbe rationnelle et tout point P_0 de cette courbe, on peut trouver une fonction rationnelle sur la courbe dont le diviseur est $[P] - [P_0]$. Il en résulte que le degré définit un isomorphisme du groupe de Chow $\mathrm{CH}_0(V)$ sur $\mathrm{CH}_0(\mathbf{K}) = \mathbf{Z}$. Le groupe $\mathrm{CH}_0(V)$ d'une variété rationnellement connexe par chaînes est donc trivial, c'est-à-dire que le degré est un isomorphisme, sur toute extension algébriquement close du corps de base. Nous allons maintenant démontrer que, pour une variété stablement ou rétractilement rationnelle, ce groupe est en fait universellement trivial au sens précédent. Les exemples fournis par M. Artin et D. Mumford montrent que le groupe CH_0 peut être trivial sur toute extension algébriquement close sans être universellement trivial.

La trivialité universelle du groupe des 0-cycles peut s'exprimer en termes de correspondances [Me], [ACTP] :

DÉFINITION 2.1. — *Une décomposition de Chow de la diagonale pour une variété propre et intègre V de dimension n sur un corps \mathbf{K} est la donnée d'un fermé strict Z de V , de la classe α d'un 0-cycle de degré 1 supporté par le lieu lisse de V et d'un cycle D de dimension n sur $Z \times V$ de sorte que la classe de la diagonale Δ_V s'écrive*

$$(4) \quad [\Delta_V] = \mathrm{pr}_2^*(\alpha) + [D]$$

dans le groupe $\mathrm{CH}_n(V \times V)$.

PROPOSITION 2.2 (A. Auel, J.-L. Colliot-Thélène et R. Parimala)

Soit V une belle variété de dimension n sur un corps \mathbf{K} . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) *Le groupe CH_0 des 0-cycles est universellement trivial pour V ;*
- (ii) *La variété V possède un 0-cycle de degré 1 et le degré est injectif sur le groupe $\mathrm{CH}_0(V_{\mathbf{K}(V)})$;*
- (iii) *La variété V possède un 0-cycle de degré 1 et pour tout 0-cycle α de degré 1 sur V , la différence $\mathrm{Id}_V - \mathrm{pr}_2^*(\alpha)$ dans le groupe de correspondances $\mathrm{Corr}(X, X)$ est équivalente à la classe d'un cycle supporté par $Z \times V$ où Z est un fermé strict de V ;*
- (iv) *La variété V admet une décomposition de Chow de la diagonale.*

Remarque 2.3. — Lorsqu'on considère une décomposition analogue dans les groupes de Chow à coefficients rationnels, les différentes conséquences de ce type de décomposition ont été étudiées par de nombreux auteurs depuis l'article de S. Bloch et V. Srinivas [BS] (cf. également [Vo1]).

Démonstration. — Les implications (i) \Rightarrow (ii) et (iii) \Rightarrow (iv) résultent des définitions.

Supposons la condition (ii) vérifiée. On écrit l'extension des scalaires $V_{\mathbf{K}(V)}$ comme le produit $\mathrm{Spec}(\mathbf{K}(V)) \times V$. Soit α un 0-cycle de degré 1 sur V . Par hypothèse, l'image de α dans $\mathrm{CH}^n(V_{\mathbf{K}(V)})$ et la classe du point générique η sont égales. Or la classe du point générique est l'image de la classe de la diagonale Δ_V par le morphisme

$$(\eta \times \mathrm{Id})^* : \mathrm{CH}^n(V \times V) \longrightarrow \mathrm{CH}^n(V_{\mathbf{K}(V)}).$$

Par conséquent la différence $\beta = [\Delta_V] - \mathrm{pr}_2^*(\alpha)$ appartient au noyau de ce morphisme. Mais le groupe de Chow $\mathrm{CH}^n(V_{\mathbf{K}(V)})$ est isomorphe à la limite inductive des groupes $\mathrm{CH}^n(U \times V)$ où U décrit les ouverts de Zariski non vides de V . Il existe donc un tel ouvert U de sorte que l'image de β dans $\mathrm{CH}^n(U \times V)$ soit nulle. Notons Z le complémentaire de U dans V . La suite exacte [Fu2, proposition 1.8]

$$\mathrm{CH}_n(Z \times V) \longrightarrow \mathrm{CH}_n(V \times V) \longrightarrow \mathrm{CH}_n(U \times V) \longrightarrow 0$$

montre alors que β est supporté par $Z \times V$. L'assertion (iii) est donc vérifiée.

Démontrons maintenant l'implication (iv) \Rightarrow (i). Soit \mathbf{L} une extension de \mathbf{K} . On fixe une décomposition de Chow de la diagonale de V , donnée par la formule (4). Or une correspondance $\beta \in \mathrm{Corr}(V, V)$ induit un endomorphisme β_* du groupe $\mathrm{CH}_0(V_{\mathbf{L}})$ donné par la formule

$$\beta_*(\gamma) = (\mathrm{pr}_2)_*(\beta_{\mathbf{L}} \cdot \mathrm{pr}_1^*(\gamma)),$$

pour tout 0-cycle γ . Mais par un lemme de déplacement [GLL, cor. 6.7], comme V est lisse, pour tout ouvert de Zariski U non vide de V un 0-cycle de V est équivalent à un 0-cycle dont le support est contenu dans U . Il en résulte que l'application induite par la correspondance $\mathrm{Id} - \mathrm{pr}_2^*(\alpha)$ sur $\mathrm{CH}_0(V_{\mathbf{L}})$ est nulle. Or $\mathrm{pr}_2^*(\alpha)$ induit l'application

donnée par $\gamma \mapsto \deg(\gamma)\alpha$. On obtient $\gamma = \deg(\gamma)\alpha$ pour tout 0-cycle γ de $V_{\mathbf{L}}$. Le degré est donc un isomorphisme du groupe $\mathrm{CH}_0(V_{\mathbf{L}})$ sur \mathbf{Z} . \square

Remarque 2.4. — Si une belle variété V admet un point rationnel P , alors une décomposition de Chow de la diagonale, lorsqu'il en existe, peut être choisie de la forme

$$[\Delta_V] = [V \times \{P\}] + [D]$$

où D est supporté par $Z \times V$ pour un fermé strict Z de V .

PROPOSITION 2.5. — *Soit V une belle variété sur un corps \mathbf{K} . Si la variété V est \mathbf{K} -rétractilement rationnelle, alors elle admet une décomposition de Chow de la diagonale.*

Nous reprenons la preuve de J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka [CTP1].

Démonstration. — Il suffit de démontrer que le degré définit un isomorphisme de $\mathrm{CH}_0(V)$ sur \mathbf{Z} . On reprend les notations de la définition de \mathbf{K} -rétractilement rationnelle.

Supposons d'abord le corps \mathbf{K} infini. L'ouvert W de $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}^n$ contient alors un point rationnel M . Soit P un point fermé de l'ouvert U de V . Comme la composée $g \circ f$ est l'identité, les corps résiduels $\mathbf{L} = \mathbf{K}(P)$ et $\mathbf{K}(f(P))$ sont isomorphes. La multiplication fournit un morphisme de \mathbf{K} -algèbres surjectif $\mathbf{L} \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$ ce qui donne un \mathbf{L} -point R de $V_{\mathbf{L}}$ au-dessus de P . Soit D une droite projective de $\mathbf{P}_{\mathbf{L}}^n$ passant par les points $M_{\mathbf{L}}$ et $f(R)$. L'application g induit un unique morphisme de D vers la variété propre $V_{\mathbf{L}}$ qu'on peut composer avec la projection vers la variété V . Le 0-cycle $f(R) - M_{\mathbf{L}}$ est rationnellement équivalent à 0. Il en est de même de son image dans V , qui est $P - [\mathbf{L} : \mathbf{K}]g(M)$.

Le lemme de déplacement déjà mentionné assure qu'un 0-cycle α de V est équivalent à un cycle supporté par U , l'argument précédent démontre donc que α est rationnellement équivalent à $\deg(\alpha)g(M)$ et le degré est un isomorphisme de $\mathrm{CH}_0(V)$ sur \mathbf{Z} .

Dans le cas d'un corps fini, on considère des extensions de degrés premiers entre eux sur lesquelles l'ouvert W possède un point rationnel. Comme la composée de la coresstriction et de la restriction coïncide avec la multiplication par le degré de l'extension, cela démontre que le noyau et le conoyau du morphisme de degré $\deg : \mathrm{CH}_0(V) \rightarrow \mathbf{Z}$ sont annihilés par des nombres premiers entre eux, ils sont donc réduits à 0. \square

L'énoncé suivant signifie essentiellement que l'absence de décomposition de la diagonale est un invariant plus fin que les invariants introduits au §1.2.

PROPOSITION 2.6 (A. Auel, J.-L. Colliot-Thélène et R. Parimala)

Soit V une belle variété qui admet une décomposition de Chow de la diagonale. Alors, pour toute théorie de modules de cycle à la Rost M^ , les groupes non ramifiés associés M_{nr}^* sont universellement triviaux.*

Outils de la preuve. — L’argument principal est un résultat de N. A. Karpenko et A. S. Merkurjev qui assure que les correspondances qui sont la classe d’un cycle de support contenu dans $Z \times X$ pour un fermé strict Z de X agissent trivialement sur les groupes non ramifiés associés aux modules de cycles [KM, RC8]. Dans une décomposition de Chow de la diagonale (4), écrivons le 0-cycle α sous la forme $\alpha = \sum_{i \in I} m_i P_i$. Alors, pour tout $i \in I$, la correspondance $\text{pr}_2^*([P_i])$ induit sur le groupe non ramifié du module de cycle la composée des applications

$$M_{\text{nr}}^i(V) \xrightarrow{\text{év}} M^i(\kappa(P_i)) \xrightarrow{\text{Cores}} M^i(\mathbf{K}) \longrightarrow M_{\text{nr}}^i(V)$$

où év désigne l’application d’évaluation [Ro, p. 339, (E)] et Cores l’application de co-restriction. Il en résulte que le morphisme induit par $\text{Id}_V = \text{pr}_2^*(\alpha)$ s’écrit $\iota \circ s$ où ι désigne l’application $M^i(\mathbf{K}) \rightarrow M_{\text{nr}}^i(V)$ et, comme α est de degré 1, la composée $s \circ \iota$ est l’identité de $M^i(\mathbf{K})$. Les applications s et ι sont donc réciproques l’une de l’autre ce qui démontre que ι est un isomorphisme. Comme une décomposition de Chow de la diagonale est compatible avec l’extension des scalaires, il en résulte que les groupes non ramifiés associés aux modules de cycles sont universellement triviaux. \square

Remarque 2.7. — Une réciproque de ce résultat est donnée dans [Me].

3. DÉCOMPOSITION EN FAMILLE

Une des raisons de considérer le groupe de Chow comme invariant birationnel est le fait que le groupe de Chow se comporte bien par spécialisation. C. Voisin donna une première formulation pour la spécialisation de la décomposition de la diagonale dans [Vo2, theorem 2.1 (i)], sa preuve permet d’obtenir l’énoncé suivant dont la formulation est issue de [CTP1] :

THÉORÈME 3.1. — *Soit B un schéma intègre de type fini sur un corps algébriquement clos \mathbf{K} de caractéristique 0, soit $\pi : V \rightarrow B$ un morphisme projectif à fibres intègres admettant une section. Il existe une famille au plus dénombrable $(B_i)_{i \in I}$ de sous-schémas fermés de B telle que l’ensemble des points b de $B(\mathbf{K})$ pour lesquels V_b admet une décomposition de Chow de la diagonale est $\bigcup_{i \in I} B_i(\mathbf{K})$.*

COROLLAIRE 3.2. — *Soit B un schéma lisse de type fini sur un corps algébriquement clos \mathbf{K} de caractéristique 0, soit $\pi : V \rightarrow B$ un morphisme projectif à fibres intègres admettant une section et soit 0 un élément de $B(\mathbf{K})$. Si la fibre V_0 n’admet pas de décomposition de la diagonale, il en est de même de la fibre V_b en tout point b très général de B .*

Rappelons que le terme *très général* signifie « appartenant au complémentaire d’une réunion dénombrable de fermés stricts de la variété ».

Nous esquissons ici la preuve du théorème telle qu'elle est détaillée en appendice dans l'article [CTP1] de J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka. Elle repose sur l'existence des schémas de Chow.

Dans ce paragraphe, la lettre \mathbf{K} désigne un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Soient V et B des schémas au-dessus d'un schéma S sur \mathbf{K} . On suppose que V est projectif sur S et que B est réduit et normal. Une *famille bien définie de cycles de V sur B* est la donnée d'un cycle $C = \sum_{i \in I} m_i [C_i]$ de $V \times_S B$ de sorte que

- (i) Chaque C_i est un sous-schéma intègre de $V \times_S B$;
- (ii) Les applications $g_i : C_i \rightarrow B$ obtenues par restriction de la seconde projection sont propres, d'image une composante irréductible de B ;
- (iii) Les composantes irréductibles des fibres des applications g_i sont de dimension d .

Pour un schéma projectif X/S , le foncteur qui à un S -schéma semi-normal Z associe l'ensemble des familles bien définies de cycles effectifs de dimension d et de degré d' de X sur Z est représenté par un S -schéma projectif et semi-normal $\mathcal{C}^{\text{how}}_{X/S}^{d,d'}$ [Ko, Th. I.3.21, p. 52]. On omettra par la suite les exposants d et d' pour alléger les notations. Ces schémas sont équipés d'une famille universelle

$$\mathcal{U}_{\text{niv}}_{X/S} \longrightarrow \mathcal{C}^{\text{how}}_{X/S}.$$

Un point crucial de la preuve du théorème 3.1 consiste à contrôler le lieu d'équivalence rationnelle entre deux familles de cycles.

PROPOSITION 3.3. — *Soit B un schéma intègre et normal sur un corps \mathbf{K} , soit $V \rightarrow B$ un morphisme projectif et soit (Z_1, Z_2) un couple de familles bien définies de cycles effectifs de dimension m . Alors*

$$\{ b \in B(\mathbf{K}) \mid [Z_{1,b}] = [Z_{2,b}] \text{ dans } \text{CH}_m(Y_b) \}$$

est une réunion dénombrable de sous-schémas fermés.

En reprenant la définition des groupes de Chow et en se ramenant au besoin à une base lisse par désingularisation ou altération, cet énoncé se déduit du lemme suivant :

LEMME 3.4. — *Soient B un \mathbf{K} -schéma lisse et $V \rightarrow B$ un morphisme projectif. Il existe une famille dénombrable de schémas normaux $(T_i)_{i \in I}$ au-dessus de B munis chacun d'un couple de familles de cycles (C'_i, C''_i) paramétrés par T_i de sorte que pour tout $b \in B(\mathbf{K})$ et toute sous-variété W de dimension $d + 1$ dans V_b il existe une désingularisation \tilde{W} de W telle que pour tout diviseur de fonctions $D = D_1 - D_2$ sur \tilde{W} , avec D_1 et D_2 effectifs, il existe $i \in I$ et $t \in T_i(\mathbf{K})$ au-dessus de b de sorte que $(D_1, D_2) = ((C'_i)_t, (C''_i)_t)$.*

Esquisse de la preuve. — Tout d'abord, on utilise une famille universelle $F \rightarrow H$ pour les sous-variétés intègres de V qui sont plates sur B et de dimension relative $d + 1$; on décompose alors $H = H_1 \cup \dots \cup H_n$ en une réunion de schémas localement fermés de H , de façon à obtenir une désingularisation $\tilde{F}_k \rightarrow F_k$ dont les fibres au-dessus de

H_k sont lisses. Le lemme résulte alors de l'existence du schéma de Picard : considérons l'application induite par le morphisme qui à un diviseur associe sa classe dans le groupe de Picard

$$\left(\mathrm{Div}_{\tilde{F}_k/H_k}\right)^2 \longrightarrow \left(\mathrm{Pic}_{\tilde{F}_k/H_k}\right)^2.$$

Soit T la normalisation d'une composante de l'image inverse de la diagonale. Les familles universelles au-dessus de chacun des termes du produit définissent un couple de familles de cycles paramétrés par T . On obtient ainsi les schémas et cycles demandés. \square

Pour déduire le théorème de la proposition, on utilise le lemme suivant :

LEMME 3.5. — *Soient B un \mathbf{K} -schéma lisse et $V \rightarrow B$ un morphisme projectif. Il existe une famille dénombrable $(F_i)_{i \in I}$ de B -schémas lisses équipés chacun d'une famille C_i de cycles de $V \times_B V$ au-dessus de F_i , de sorte que pour tout $b \in B(\mathbf{K})$ et tout cycle effectif Z de $V_b \times_{\mathbf{K}} V_b$ dont l'image par la première projection est incluse dans un diviseur de V_b , il existe $i \in I$ et $x \in F_i(\mathbf{K})$ au-dessus de b tel que Z s'identifie à $(C_i)_x$.*

Esquisse de la preuve. — On considère ici la famille universelle $W \rightarrow H$ où H est une composante du schéma de Hilbert qui paramètre les diviseurs effectifs de V au-dessus de B . La famille $D = W \times_B X \rightarrow H$ est projective et on peut en considérer les schémas de Chow. Soit F une composante de $\mathcal{C}\mathrm{h}\mathrm{o}\mathrm{w}_{D/H}$ et C la famille universelle au-dessus de F . Considérons la famille C comme une famille de cycles de $V \times_B V$ paramétrée par F . Quitte à désingulariser F , on peut le supposer lisse. L'ensemble des familles ainsi obtenues, qui est dénombrable, satisfait les conditions du lemme. \square

Preuve du théorème 3.1. — Soit $\alpha \in \mathrm{CH}_0(V)$ un élément de degré 1. Écrivons $\mathrm{pr}_1^*(\alpha) = [T_1] - [T_2]$, pour des cycles effectifs T_1 et T_2 de $V \times_B V$. En utilisant le lemme 3.5, on se ramène à l'étude de l'égalité

$$[(\Delta_V)_{(b,b')}] + [C_b] + [(T_2)_{(b,b')}] = [C_{b'}] + [(T_1)_{(b,b')}]$$

où le couple (b, b') décrit chacun des produits $F_i \times_B F_j(\mathbf{K})$ pour $(i, j) \in I^2$. On applique alors la proposition 3.3. \square

4. RELÈVEMENT

La situation dans laquelle on veut appliquer la méthode de déformation du paragraphe précédent est la suivante : on considère une famille de variétés génériquement lisses, mais possédant une fibre singulière Y dont la désingularisation \tilde{Y} est d'une autre nature. On souhaite alors démontrer que l'existence d'une décomposition de Chow de la diagonale sur une fibre très générale implique l'existence d'une telle décomposition sur la variété \tilde{Y} . Par contraposée, s'il existe une obstruction à l'existence d'une telle décomposition sur \tilde{Y} , on aura une obstruction à la rationalité stable d'une fibre très générale. Mais, à cette fin, il faut pouvoir relever une décomposition de Chow de la diagonale sur la désingularisation de la fibre singulière.

Toutefois cela n'est pas toujours possible. L'exemple le plus simple est celui des surfaces cubiques lisses sur \mathbf{C} qui sont rationnelles et possèdent donc une décomposition de Chow de la diagonale. Mais au sein de la famille des hypersurfaces de degré 3 dans l'espace projectif de dimension 3, certaines surfaces cubiques singulières S sont des cônes au-dessus d'une courbe elliptique. Une désingularisation \tilde{S} de S est birationnellement isomorphe au produit $E \times \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ et par conséquent le groupe $A_0(\tilde{S})$ des classes de 0-cycles de degré 0 est isomorphe au groupe $E(\mathbf{C})$ et la désingularisation n'admet pas de décomposition de la diagonale. On peut noter que, dans ce cas particulier, la fibre de la désingularisation au-dessus du point singulier est isomorphe à E et ne possède pas non plus de décomposition de Chow de la diagonale.

Une première version du relèvement se trouve dans l'article de C. Voisin et s'applique dans le cas où les singularités de la fibre spéciale sont au pire des singularités quadratiques ordinaires [Vo2, theorem 2.1 (i)]. Nous décrivons ici la méthode développée dans l'article de J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka. Cette méthode utilise la notion suivante qui est une version relative de la notion de trivialité déjà utilisée sur un corps :

DÉFINITION 4.1. — *Un morphisme propre $f : X \rightarrow Y$ de variétés sur le corps \mathbf{K} est dit universellement CH_0 -trivial, si, pour toute extension \mathbf{L} de \mathbf{K} , le morphisme induit $\mathrm{CH}_0(X_{\mathbf{L}}) \rightarrow \mathrm{CH}_0(Y_{\mathbf{L}})$ est un isomorphisme.*

Le relèvement à une désingularisation repose alors sur la proposition suivante :

PROPOSITION 4.2. — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme birationnel propre de variétés sur le corps \mathbf{K} . On fait les hypothèses suivantes :*

- (i) *Le morphisme f est universellement CH_0 -trivial ;*
- (ii) *La variété X est lisse et possède un 0-cycle de degré 1 ;*
- (iii) *Il existe un ouvert non vide U de Y au-dessus duquel la restriction de f est un isomorphisme et tel que, pour toute extension \mathbf{L} de \mathbf{K} , tout 0-cycle de degré 0 de $Y_{\mathbf{L}}$ dont le support est contenu dans $U_{\mathbf{L}}$ a une image nulle dans $\mathrm{CH}_0(Y_{\mathbf{L}})$.*

alors X admet une décomposition de Chow de la diagonale.

Un critère pour vérifier l'assertion (i) est donné par la proposition suivante :

PROPOSITION 4.3. — *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre entre variétés sur \mathbf{K} . On fait l'hypothèse suivante :*

- (*) *Pour tout point y du schéma Y , la fibre X_y est universellement CH_0 -triviale au-dessus du corps résiduel $\kappa(y)$.*

Alors l'application f est universellement CH_0 -triviale.

Remarque 4.4. — On prendra garde, dans cet énoncé, au fait qu'il ne suffit pas de considérer les points fermés de Y .

Preuve de la proposition 4.2. — Les hypothèses étant stables par extensions de corps, il suffit de démontrer que le degré est un isomorphisme de $\mathrm{CH}_0(X)$ sur \mathbf{Z} . Par la condition (ii), le degré est surjectif. Par le lemme de déplacement déjà mentionné, comme X est lisse, tout 0-cycle est équivalent à un 0-cycle de support contenu dans $f^{-1}(U)$, où U est un ouvert de Y vérifiant la condition (iii). Soit α un 0-cycle de degré 0 de X dont le support est contenu dans $f^{-1}(U)$. Par la condition (iii), son image dans $\mathrm{CH}_0(Y)$ est triviale. Mais par (i), le morphisme f induit un isomorphisme de $\mathrm{CH}_0(X)$ dans $\mathrm{CH}_0(Y)$, ce qui implique que la classe de α est nulle. \square

Preuve de la proposition 4.3. — L'hypothèse (*) étant stable par extension de corps, il suffit de vérifier que l'application $f_* : \mathrm{CH}_0(X) \rightarrow \mathrm{CH}_0(Y)$ est un isomorphisme. En appliquant (*) aux points fermés, le morphisme f_* est surjectif. Soit α un 0-cycle de X qui appartient au noyau de f_* . Il existe donc une famille finie $(C_i)_{i \in I}$ de courbes irréductibles de Y et des fonctions $g_i \in \mathbf{K}(C_i)^*$ telles que

$$f_*(\alpha) = \sum_{i \in I} \mathrm{div}(g_i).$$

Appliquons (*) aux points génériques de chacune de ces courbes. Soit $i \in I$. Il existe donc un 0-cycle de degré 1 dans la fibre $X_{\mathbf{K}(C_i)}$. En prenant l'adhérence des points de ce cycle, on obtient une famille d'entiers relatifs $(n_{i,j})_{j \in J_i}$ et une famille de courbes $(\tilde{C}_{i,j})_{j \in J_i}$ de X , de sorte que

$$\sum_{j \in J_i} n_{i,j} [\mathbf{K}(\tilde{C}_{i,j}) : \mathbf{K}(C_i)] = 1.$$

Notons $g_{i,j}$ l'image de g_i dans $\mathbf{K}(\tilde{C}_{i,j})^*$. On pose

$$\alpha' = \alpha - \sum_{(i,j)} \mathrm{div}(g_{i,j}).$$

on a alors l'égalité

$$f_*(\alpha') = f_*(\alpha) - \sum_i \mathrm{div} \left(\prod_j N_{\mathbf{K}(\tilde{C}_{i,j})/\mathbf{K}(C_i)}(g_{i,j}) \right) = 0$$

en tant que 0-cycle de Y . Soit S l'image par l'application f du support de α' . On peut écrire $\alpha' = \sum_{Q \in S} \alpha'_Q$ où α'_Q est un 0-cycle supporté par la fibre X_Q . Comme $f_*(\alpha') = 0$, les 0-cycles α'_Q sont de degré 0. Par l'hypothèse (*), ils sont rationnellement équivalents à 0. Il en est donc de même de α' et donc de α . \square

5. SPÉCIALISATION SUR UN TRAIT

J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka présentent dans [CTP1] un énoncé de spécialisation sur un trait qui peut même être utilisé en inégale caractéristique :

THÉORÈME 5.1 (J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka). — *Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions \mathbf{K} et de corps résiduel k algébriquement clos. Notons $\overline{\mathbf{K}}$ une clôture algébrique de \mathbf{K} . Soit \mathcal{X} un schéma fidèlement plat et propre sur $\mathrm{Spec}(A)$ dont les fibres sont géométriquement intègres. Soient X la fibre générique $\mathcal{X}_{\mathbf{K}}$ et Y la fibre spéciale \mathcal{X}_k . On fait les hypothèses suivantes :*

(i) *Il existe une désingularisation $f : \tilde{Y} \rightarrow Y$ de Y de sorte que f soit universellement CH_0 -triviale ;*

(ii) *La fibre générique géométrique $\overline{X} = X_{\overline{\mathbf{K}}}$ admet une désingularisation $\tilde{X} \rightarrow \overline{X}$.*

Si la $\overline{\mathbf{K}}$ -variété \tilde{X} est universellement CH_0 -triviale, alors il en est de même de la k -variété \tilde{Y} .

Remarque 5.2. — Pour faire le lien avec le théorème 3.1, il convient de remarquer que sur les complexes, les groupes de Chow d’une fibre lisse très générale sont isomorphes aux groupes de Chow de la fibre générique géométrique (cf. [Vi, lemma 2.1]).

Esquisse de la preuve. — Tout d’abord en considérant une extension finie adéquate de \mathbf{K} , on se ramène au cas où la désingularisation \tilde{X} est définie sur \mathbf{K} et universellement CH_0 -triviale. Soit alors η le point générique de Y . L’anneau local $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\eta}$ est un anneau de valuation discrète de corps des fractions $\mathbf{K}(X)$ et de corps résiduel $k(Y) = k(\tilde{Y})$. Soit B son complété, le corps résiduel de B est encore $k(Y)$. Soit F le corps des fractions de B . Le B -schéma \mathcal{X}_B a pour fibre générique X_F qui admet \tilde{X}_F comme désingularisation et comme fibre spéciale $Y' = Y_{k(Y)}$ qui admet $\tilde{Y}' = \tilde{Y}_{k(\tilde{Y})}$ comme désingularisation, avec un morphisme de désingularisation qui est universellement CH_0 -trivial. D’après la proposition 2.2, il suffit de démontrer que le degré est un isomorphisme de $\mathrm{CH}_0(\tilde{Y}')$ sur \mathbf{Z} . Par hypothèse, le degré est un isomorphisme de $\mathrm{CH}_0(\tilde{X}_F)$ sur \mathbf{Z} . Démontrons que tout zéro-cycle de degré 0 de Y' à support dans le lieu lisse a une classe nulle dans $\mathrm{CH}_0(Y')$. Soit U un ouvert dense du lieu lisse de X_F au-dessus duquel la désingularisation est un isomorphisme. Tout d’abord il existe un morphisme de spécialisation

$$\mathrm{CH}_0(X_F) \rightarrow \mathrm{CH}_0(Y')$$

(cf. [Fu1, §4.4] et [Fu2, proposition 2.6]). Notons z un 0-cycle de degré 0 supporté par le lieu lisse de Y' . Comme B est complet, par le lemme de Hensel, il se relève en un 0-cycle z_1 supporté par le lieu lisse de X . Le lemme de déplacement déjà mentionné assure que le 0-cycle z_1 est équivalent à un 0-cycle de U qui se relève donc en un 0-cycle z_3 de la désingularisation. Par hypothèse, la classe α du 0-cycle z_3 est triviale et il en est donc de même de la classe de z dans $\mathrm{CH}_0(Y')$ qui est l’image de α par l’application composée

$$\mathrm{CH}_0(\tilde{X}_F) \longrightarrow \mathrm{CH}_0(X_F) \longrightarrow \mathrm{CH}_0(Y').$$

Ce fait nous met en mesure d’appliquer la proposition 4.2. □

6. EXEMPLES

La stratégie proposée par C. Voisin dans [Vo2] ou [Vo3] pour obtenir de nouveaux exemples de variétés qui ne sont pas stablement rationnelles est de construire des familles de variétés dont la fibre générique est lisse et auxquelles on peut appliquer le corollaire 3.2, avec une fibre V_0 possédant une désingularisation $\tilde{V}_0 \rightarrow V_0$ à laquelle la décomposition de la diagonale se relève. Si on peut démontrer qu'un groupe de cohomologie non ramifiée de \tilde{V}_0 est non nul, il en résulte que la variété \tilde{V}_0 n'admet pas de décomposition de Chow de la diagonale. Il en est alors de même d'une fibre très générale V_b et ces fibres ne sont pas stablement rationnelles.

Il convient de noter que, décrite ainsi, cette méthode ne permet pas de dire qu'une variété donnée par des équations explicites n'est pas rationnelle. Elle permet seulement de dire que dans une famille donnée sur le corps des complexes « la plupart » des fibres ne sont pas rationnelles.

La version développée par J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka et présentée succinctement ici permet d'appliquer la méthode sur $\overline{\mathbf{Q}}$ et peut être itérée.

Nous allons maintenant donner quelques cas où ces méthodes ont été utilisées avec succès. La méthode inventée par C. Voisin et ses variantes ont inspiré de nombreux auteurs et les exemples qui suivent ne représentent qu'une sélection arbitraire de l'orateur parmi les résultats obtenus au moment de l'exposé. L'auditeur intéressé pourra également lire la synthèse faite par A. Pirutka [Pi]. Chaque résultat nécessite tout d'abord d'exhiber une famille à laquelle la méthode s'applique. En particulier, il faut pouvoir contrôler la résolution des singularités de la fibre spéciale, ce qui peut représenter une vraie prouesse technique.

6.1. Revêtements doubles

Cette classe d'exemples est déjà celle considérée dans l'article d'Artin et Mumford [AM]. L'exemple initial de C. Voisin donné dans [Vo2] correspond au cas des revêtements doubles de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^3$ ramifiés le long d'une surface quartique très générale ayant au plus 7 point nodaux.

Reprenons tout d'abord la construction d'Artin et Mumford. On se donne une conique lisse de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^2$ définie par un polynôme α homogène de degré 2 ainsi que deux cubiques lisses définies par des équations homogènes δ_1 et δ_2 , de sorte que chacune des cubiques rencontre tangentiellement la conique en trois points distincts et l'intersection des deux cubiques est de cardinal 9. Alors on peut démontrer qu'il existe un polynôme homogène γ de degré 4 et un polynôme homogène β de degré 3 tels que $\delta_1\delta_2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$. La surface quartique d'équation homogène

$$\alpha(X_0, X_1, X_2)X_3^2 + \beta(X_0, X_1, X_2)X_3 + \gamma(X_0, X_1, X_2) = 0$$

est le revêtement double de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^2$ ramifié le long de la courbe d'équation $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, c'est-à-dire $\delta_1\delta_2 = 0$. Autrement dit, le lieu de ramification est la réunion des deux cubiques choisies. La surface quartique possède dix points nodaux, à savoir les images

inverses des 9 intersections entre les deux cubiques et le point $(0:0:0:1)$. Le revêtement correspondant a également dix points nodaux qui sont les images inverses de ces dix points de la surface quartique.

Mais d'une part les déformations des surfaces quartiques induisent des déformations des revêtements associés, d'autre part les surfaces quartiques lisses sont des surfaces $K3$ dont la classification est connue [K3]. Cela permet donc d'appliquer la machinerie présentée dans cet exposé. Mais par le résultat d'Artin et Mumford, une désingularisation V du revêtement double dans leur cas possède des éléments de torsion non nuls dans le groupe de cohomologie $H^3(V(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$, il en est de même pour le groupe de Brauer non ramifié. Par la proposition 2.6, le solide correspondant ne possède pas de décomposition de Chow de la diagonale et il en est de même des revêtements très généraux obtenus par déformations.

En utilisant également la décomposition de Chow de la diagonale, A. Beauville démontre dans [Be] qu'un revêtement double de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^3$ ramifié le long d'une surface sextique très générale n'est pas stablement rationnel.

En dimension supérieure, B. Hassett, A. Pirutka et Y. Tschinkel dans [HPT1] obtiennent de même qu'un revêtement double de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^4$ ramifié en un volume quartique très général n'est pas stablement rationnel. La difficulté pour appliquer la machinerie est de trouver un exemple explicite d'un tel revêtement dont la désingularisation satisfait les conditions de la proposition 4.2 et possède un groupe de cohomologie non ramifiée non nul. L'exemple utilisé ici est la variété correspondant au volume quartique

$$xyt^2 + xzu^2 + yz(x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz)) = 0.$$

La variété correspondante est birationnelle à l'hypersurface de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^2 \times \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^3$ d'équation

$$yzt^2 + xzt_1^2 + xyu_1^2 + (x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz))v_1^2 = 0$$

qui est une variété fibrée en quadriques sur $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^2$ dont le groupe de Brauer non ramifié est non trivial.

Dans cette direction, en suivant la méthode de J. Kollár et B. Totaro décrite ci-dessous, J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka dans [CTP2] démontrent que les revêtements cycliques de degré p de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n$ ramifiés le long d'une hypersurface de degré d très générale ne sont pas stablement rationnels lorsque p est un nombre premier, $n \geq 3$ et d est un multiple de p supérieur ou égal à $n+1$. Par la suite, T. Okada [Oka1] a généralisé ce résultat à tous les revêtements cycliques de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^n$ ramifiés le long d'hypersurfaces très générales de degré d lorsque $d \geq n+1$.

6.2. Solides quartiques

Dans [IM], V. A. Iskovskikh et Y. I. Manin démontrent que les automorphismes birationnels d'une hypersurface quartique de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^4$ sont des automorphismes, ce qui prouve que le groupe de ces automorphismes birationnels est fini et que ces variétés ne sont pas rationnelles. Toutefois, cela ne répond pas à la question de la rationalité stable de ces variétés. La variante de la méthode de C. Voisin présentée par J.-L. Colliot-Thélène

et A. Pirutka dans [CTP1] permet de démontrer que ces volumes très généraux ne sont pas stablement rationnels. Là encore un point-clef pour utiliser cette méthode est la construction d'un volume quartique dont la résolution est birationnelle à un solide d'Artin et Mumford, avec un morphisme qui est CH_0 -universellement trivial.

6.3. Fibrés en coniques

Dans [HKT], B. Hassett, A. Kresch et Y. Tschinkel considèrent le cas des fibrés en coniques au-dessus d'une surface rationnelle. Soit \mathbf{K} un corps algébriquement clos de caractéristique différente de deux. Soit S une belle surface rationnelle. Une fibration en coniques au-dessus de S est un morphisme de belles variétés propre et plat $\pi : V \rightarrow S$ dont la fibre générique est une conique non singulière. Le lieu des points de S en lesquels la fibre est singulière définit une courbe C de S . En ces points, la fibre est formée de droites éventuellement confondues ; on obtient ainsi un revêtement de degré deux de la courbe C . On peut démontrer que ce revêtement caractérise la fibration, à équivalence birationnelle près. On peut donc obtenir des familles de fibrés en coniques en considérant des espaces de revêtements de courbes contenues dans S . Plus précisément, soit L un fibré en droites sur S défini par une courbe irréductible lisse de S . Soit F une composante irréductible dans l'espace des revêtements étales de degré 2 des courbes nodales contenues dans le système linéaire défini par L . Tout point de F correspond à une fibration en coniques au-dessus de S . On suppose que F admet un point correspondant à un revêtement au-dessus d'une courbe réductible dont les composantes irréductibles sont lisses, tel que le revêtement déduit par restriction au-dessus de chacune des composantes de cette courbe soit non trivial. Alors B. Hassett, A. Kresch et Y. Tschinkel démontrent que la fibration en conique correspondant à un point très général de F n'est pas stablement rationnelle. Cette question est reprise par C. Böhning et H.-C. Graf von Bothmer dans [BGvB], avec une méthode qui n'utilise pas les champs et les gerbes.

6.4. Hypersurfaces de grand degré

Dans [Ko, theorem 5.14], J. Kollár prouve que, sur \mathbf{C} , les hypersurfaces très générales de degré $d \geq 2 \left\lceil \frac{n+3}{3} \right\rceil$ dans $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^{n+1}$ avec $n \geq 3$ ne sont pas rationnelles. Dans [To1], B. Totaro démontre, en utilisant la méthode de J. Kollár et le théorème 5.1, que des hypersurfaces très générales de degré $d \geq 2 \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$ ne sont pas stablement rationnelles. Lorsque le degré est pair, le résultat vaut même pour des hypersurfaces lisses sur $\overline{\mathbf{Q}}$.

Lorsque le degré est pair, la preuve repose sur l'utilisation du théorème 5.1 et une réduction en caractéristique 2. Plus précisément la fibre spéciale considérée est un revêtement double inséparable. Cela donne une résolution des singularités explicite dont les diviseurs exceptionnels sont des quadriques, ce qui permet de vérifier les hypothèses de la proposition 4.3 ; l'invariant stablement rationnel utilisé est le groupe des sections du faisceau Ω^{n-1} . En effet, B. Totaro démontre que, pour une belle variété V sur un corps \mathbf{K} , si V admet une décomposition de Chow de la diagonale, les groupes $H^0(V, \Omega^i)$ sont nuls pour $i > 0$.

Pour traiter le cas du degré impair, B. Totaro utilise une déformation qui fait dégénérer une hypersurface de degré $2a + 1$ en la réunion d’une hypersurface de degré $2a$ et d’un hyperplan.

6.5. Variétés de Fano de dimension 3

De nombreux travaux sont dédiés à la rationalité des volumes de Fano.

Ainsi, dans le cas où l’indice vaut 1, la non-rationalité des volumes de Fano obtenus comme hypersurfaces dans un espace projectif pondéré résulte des travaux de V. A. Iskovskikh et Y. Manin [IM], de A. Corti, A. V. Puklikov et M. Reid [CPR] et de I. Cheltsov et J. Park [CP] qui prouvent que les volumes considérés sont birationnellement rigides et donc non rationnels.

Dans le cas lisse, B. Hassett et Y. Tschinkel démontrent dans [HT], à l’aide des méthodes de décomposition de la diagonale, qu’un volume de Fano lisse qui n’est pas rationnel et n’est pas birationnellement isomorphe à un volume cubique n’est pas stablement birationnel.

Reprenant la méthode d’inégale caractéristique de B. Totaro, T. Okada étudie dans [Oka2] la rationalité des « orbivariétés » de Fano de dimension 3 obtenues comme hypersurfaces dans des espaces projectifs pondérés. Soient a_0, \dots, a_n des entiers strictement positifs. Rappelons qu’on définit l’espace projectif pondéré $\mathbf{P}(a_0, \dots, a_n)$ comme le schéma projectif associé à l’anneau gradué $\mathbf{C}[X_0, \dots, X_n]$, où la variable X_i a pour degré a_i pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

La question de la stable rationalité restait en partie ouverte. T. Okada combine les différents résultats obtenus dans le théorème suivant :

THÉORÈME 6.1. — *Soit V une hypersurface très générale de degré d dans l’espace projectif pondéré $\mathbf{P}(a_0, \dots, a_4)$ avec $1 \leq a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$. On suppose que V est une orbivariété de Fano, c’est-à-dire que le faisceau canonique est ample. Alors les assertions suivantes sont équivalentes ;*

- (i) *L’inégalité $d < 2a_4$ est vérifiée ou $d = 2a_4 = 2a_3$;*
- (ii) *L’hypersurface V est rationnelle.*

Si, en outre, V n’est pas un solide cubique, ces conditions sont équivalentes à l’assertion

- (iii) *L’hypersurface V est stablement rationnelle.*

Il résulte en particulier du théorème 6.1 que, parmi les vingt-sept familles d’hypersurfaces dans l’espace projectif pondéré de dimension 4 qui sont de Fano et d’indice ≥ 3 , vingt familles correspondent à des variétés rationnelles et un membre très général des sept autres n’est pas stablement rationnel.

7. RATIONALITÉ ET DÉFORMATION

La question de la stabilité par déformation de la rationalité pour les variétés lisses sur \mathbf{C} est très naturelle, et les experts étaient convaincus depuis longtemps qu'il devait exister des contre-exemples à cette stabilité.

Pour une famille de variété $Y \rightarrow B$ sur un corps algébriquement clos, le lieu des points b de B en lesquels la fibre est rationnelle est connu pour être une réunion dénombrable de parties localement fermées de B (*cf.* [FF]).

L'exemple des surfaces cubiques déjà mentionné montre que la rationalité n'est pas stable par spécialisation lorsqu'on admet des singularités. En dimension 3, il découle des travaux de T. de Fernex et T. Fusi [FF] et de C. Hacon et J. McKernan [HM] que la rationalité est stable par spécialisation pour les variétés klt. En dimension supérieure, B. Totaro donne dans [To2], des contre-exemples avec des singularités terminales en dimension ≥ 5 et des singularités canoniques en dimension 4.

Dans [HPT2], B. Hassett, A. Pirutka et Y. Tschinkel considèrent des fibrés en quadriques au-dessus du plan projectif. Ils obtiennent des familles de telles variétés lisses de dimension 4 au-dessus d'une base connexe sur \mathbf{C} dont les fibres très générales ne sont pas stablement rationnelles mais dont les fibres rationnelles sont denses pour la topologie complexe. Le lieu des fibres rationnelles pour cet exemple est donc en particulier ni ouvert ni fermé.

Concrètement l'exemple est obtenu en considérant des hypersurfaces lisses V de $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^2 \times \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^3$ données par une équation bihomogène de degré $(2, 2)$. Cela fournit via la première projection une variété fibrée en quadriques de dimension 2 au-dessus du plan projectif. Le lieu de dégénérescence de cette fibration π correspond au lieu en lequel la forme quadratique considérée est dégénérée.

La fibre générique Q est une quadrique au-dessus de $\mathbf{K} = \mathbf{C}(X, Y)$ qui est rationnelle sur ce corps si et seulement si Q admet un point défini sur \mathbf{K} , ce qui correspond à une section rationnelle de la fibration. Par un théorème de T. A. Springer, cela est équivalent à l'existence d'un point rationnel sur une extension \mathbf{L} de \mathbf{K} de degré impair. En considérant la variété des droites contenues dans les fibres de π , B. Hassett, A. Pirutka et Y. Tschinkel démontrent que cela est vérifié si V admet une classe de cohomologie entière dans $H^{2,2}(V, \mathbf{C})$ dont le degré d'intersection avec les fibres est impair. Ils démontrent alors que si B désigne l'espace de modules des hypersurfaces de $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^3$ de bidegré $(2, 2)$ alors le lieu des b pour lesquels l'hypersurface correspondante admet une classe de cohomologie convenable est dense pour la topologie réelle. Cet argument utilisant la théorie de Hodge est dû à C. Voisin.

Pour obtenir que la fibre très générale n'est pas rétractilement rationnelle, il faut également disposer d'une fibre qui admet une désingularisation dont on sait qu'elle n'admet pas de décomposition de Chow de la diagonale. On considère pour cela le cas particulier déjà mentionné de l'équation

$$yzt^2 + xzt^2 + xyu^2 + F(x, y, z)v^2 = 0,$$

où

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz).$$

La démonstration passe par un calcul explicite de la désingularisation ce qui fournit une preuve du fait que le morphisme de désingularisation est universellement CH_0 -trivial au sens de la définition 4.1. Par contre, la variété obtenue par désingularisation admet un groupe de cohomologie non ramifiée de degré 2 qui est non trivial, résultat donné dans [Pi], ce qui permet d’appliquer la machinerie décrite auparavant, et une fibre très générale de la fibration n’est pas rétractilement rationnelle.

RÉFÉRENCES

- [AM] M. Artin et D. Mumford, *Some elementary examples of unirational varieties which are not rational*, Proc. Lond. Math. Soc. **25** (1972), 75–95.
- [ACTP] A. Auel, J.-L. Colliot-Thélène et R. Parimala, *Universal unramified cohomology of cubic fourfolds containing a plane*, Brauer groups and obstruction problems : moduli spaces and arithmetic (Palo Alto, 2013) (A. Auel, B. Hassett, T. Várilly-Alvarado et B. Viray, eds.), Progress in Math., Birkhäuser, 2016, à paraître.
- [Be] A. Beauville, *A very general sextic double solid is not stably rational*, Bull. Lond. Math. Soc. **48** (2016), n° 2, 321–324.
- [BCTSSD] A. Beauville, J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et P. Swinnerton-Dyer, *Variétés stablement rationnelles non rationnelles*, Ann. of Math. (2) **121** (1985), 283–318.
- [BS] S. Bloch et V. Srinivas, *Remarks on correspondences and algebraic cycles*, Am. J. Math. **105** (1983), n° 5, 1235–1253.
- [Bo] F. A. Bogomolov, *The Brauer group of quotient spaces by linear group actions*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **51** (1987), n° 3, 485–516 ; English transl. in Math. USSR Izv. **30** (1988), 455–485.
- [BGvB] C Böhning et H.-C. Graf von Bothmer, *On stable rationality of some conic bundles and moduli spaces of Prym curves*, <http://arxiv.org/abs/1605.03029>, à paraître dans Comm. Math. Helvetici (2016).
- [Bou] N. Bourbaki, *Algèbre, chapitre 8*, Springer-Verlag, Berlin, 2012.
- [Ca] G. Castelnuovo, *Sulla razionalità delle involuzioni piane*, Math. Ann. **44** (1894), 125–155.
- [CP] I. Cheltsov et J. Park, *Birationally rigid Fano threefold hypersurfaces*, Mem. Amer. Math. Soc. (2016), à paraître.
- [CG] C. H. Clemens et P. A. Griffiths, *The intermediate jacobian of the cubic threefold*, Ann. of Math. (2) **95** (1972), 281–356.

- [CT] J.-L. Colliot-Thélène, *Birational invariants, Purity and the Gersten Conjecture*, *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras* (Santa-Barbara, 1992) (B. Jacob et A. Rosenberg, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58.1, AMS, Providence, 1995, pp. 1–64.
- [CTO] J.-L. Colliot-Thélène et M. Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles : au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford*, Invent. math. **97** (1989), 141–158.
- [CTP1] J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka, *Hypersurfaces quartiques de dimension 3 : non rationalité stable*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (2) **49** (2016), 371–397.
- [CTP2] ———, Циклические накрытия, которые не являются стабильно рациональными, Izvestija RAN, Ser. Math. **80** (2016), n° 4, 35–47.
- [CTS] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La R-équivalence sur les tores*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **10** (1977), 175–229.
- [CPR] A. Corti, A. V. Pukhlikov et M. Reid, *Fano 3-fold hypersurfaces*, Explicit birational geometry of 3-folds, London Math. Soc. Lecture Note, vol. 281, Cambridge university press, Cambridge, 2000, pp. 175–258.
- [De] P. Deligne, *Variétés unirationnelles non rationnelles [d'après M. Artin et D. Mumford]*, Séminaire Bourbaki 24-ème année, 1971/72, n° 402.
- [FF] T. de Fernex et D. Fusi, *Rationality in families of threefolds*, Rend. Circ. Mat. Palermo **62** (2013), n° 1, 127–135.
- [Fu1] W. Fulton, *Rational equivalence on singular varieties*, Publ. Math. IHÉS **45** (1975), 147–167.
- [Fu2] ———, *Intersection theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [GLL] O. Gabber, Q. Liu et D. Lorenzini, *The index of an algebraic variety*, Invent. Math. **192** (2013), 567–626.
- [HM] C. Hacon et J. McKernan, *On Shokurov's rational connectedness conjecture*, Duke Math. J. **138** (2007), n° 1, 119–136.
- [Ha] J. Harris, *Lectures on rationally connected varieties*, EAGER Advanced School in Algebraic Geometry, Levico Terme, notes by J. Kock (2001).
- [HKT] B. Hassett, A. Kresch et Y. Tschinkel, *Stable rationality and conic bundles*, Math. Annalen **365** (2016), 1201–1217.
- [HPT1] B. Hassett, A. Pirutka et Y. Tschinkel, *A very general quartic double fourfold is not stably rational*, <http://arxiv.org/abs/1605.03220> (2016).
- [HPT2] ———, *Stable rationality of quadric surface bundles over surfaces*, <http://arxiv.org/abs/1603.09262> (2016).

- [HT] B. Hassett et Y. Tschinkel, *On stable rationality of Fano threefolds and Del Pezzo fibrations*, <http://arxiv.org/abs/1601.07074>, à paraître dans J. reine angew. Math. (2016).
- [HY] A. Hoshi et A. Yamasaki, *Rationality problems for algebraic tori*, Mem. Amer. Math. Soc. (2016), à paraître.
- [IM] V. A. Iskovskikh et Y. I. Manin, *Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem*, Mat. Sb. **86** (1971), 140–166 ; English transl. in Math. USSR Sb. **15** (1971), 141–166.
- [K3] *Géométrie des surfaces K3 : modules et périodes*, Astérisque 126, Soc. Math. France, Paris, (1985).
- [KM] N. A. Karpenko et A. S. Merkurjev, *On standard norm varieties*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **46** (2013), n° 1, 175–214.
- [Ko] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete 3. Folge, vol. 32, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [Lü] J. Lüroth, *Beweis eines Satzes über rationale Curven*, Math. Ann. **9** (1875), 163–165.
- [Me] A. S. Merkurjev, *Unramified elements in cycle modules*, J. Lond. Math. Soc. (2) **78** (2008), n° 1, 51–64.
- [MB] L. Moret-Bailly, *Variétés stablement rationnelles non rationnelles*, Séminaire N. Bourbaki, 37-ème année (1984/85), exposé n° 643, Astérisque, vol. 133–134, SMF, Paris, 1986.
- [Oka1] T. Okada, *Stable rationality of cyclic covers of projective spaces*, <http://arxiv.org/abs/1604.08417> (2016).
- [Oka2] ———, *Stable rationality of orbifold Fano threefold hypersurfaces*, <http://arxiv.org/abs/1608.01186> (2016).
- [Pi] A. Pirutka, *Varieties that are not stably rational, zero-cycles and unramified cohomology*, <http://arxiv.org/abs/1603.09261> (2016).
- [Ro] M. Rost, *Chow groups with coefficients*, Doc. Math. J. DMV **1** (1996), 319–393.
- [Se] J.-P. Serre, *Critère de rationalité pour les surfaces algébriques*, Séminaire N. Bourbaki, 9-ème année (1956/57), exposé n° 146, Édition hors série, vol. 4, SMF, Paris, 1995.
- [To1] B. Totaro, *Hypersurfaces that are not stably rational*, J. Amer. Math. Soc. **29** (2016), 883–891.
- [To2] ———, *Rationality does not specialize among terminal varieties*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **161** (2016), 13–15.
- [Vi] C. Vial, *Algebraic cycles and fibrations*, Doc. Math. J. DMV (2013), n° 18, 1521–1553.

- [Vo1] C. Voisin, *Abel-Jacobi map, integral Hodge classes and decomposition of the diagonal*, J. Algebraic Geom. **22** (2013), n° 1, 141–174.
- [Vo2] ———, *Unirational threefolds with no universal codimension 2 cycle*, Invent. Math. **201** (2015), n° 1, 207–237.
- [Vo3] ———, *Stable birational invariants and the Lüroth problem*, Advances in geometry and mathematical physics, Surveys in Differential Geometry, vol. XXI, International Press, Boston, 2016, pp. 313–342.

Emmanuel Peyre

Institut Fourier

Université Grenoble Alpes et CNRS

CS 40700

38058 Grenoble CEDEX 09

France

Courriel : `Emmanuel.Peyre@univ-grenoble-alpes.fr`

Site personnel : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre`