

## ISOMORPHISMES DE GRAPHERS EN TEMPS QUASI-POLYNOMIAL [d'après Babai et Luks, Weisfeiler-Leman, ...]

par Harald Andrés HELFGOTT

*Résumé* : Soient donnés deux graphes  $\Gamma_1, \Gamma_2$  à  $n$  sommets. Sont-ils isomorphes ? S'ils le sont, l'ensemble des isomorphismes de  $\Gamma_1$  à  $\Gamma_2$  peut être identifié avec une classe  $H \cdot \pi$  du groupe symétrique sur  $n$  éléments. Comment trouver  $\pi$  et des générateurs de  $H$  ?

Le défi de donner un algorithme toujours efficace en réponse à ces questions est resté longtemps ouvert. Babai a récemment montré comment résoudre ces questions – et d'autres qui y sont liées – en temps quasi-polynomial, c'est-à-dire en temps  $\exp(O(\log n)^{O(1)})$ . Sa stratégie est basée en partie sur l'algorithme de Luks (1980/82), qui a résolu le cas de graphes de degré borné.

### 1. INTRODUCTION

Soient  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  deux chaînes de caractères, à savoir, deux applications  $\Omega \rightarrow \Sigma$ , où  $\Sigma$  (l'*alphabet*) et  $\Omega$  (le *domaine*) sont des ensembles finis. Tout groupe de permutations <sup>(1)</sup>  $G < \text{Sym}(\Omega)$  agit sur l'ensemble  $\Sigma^\Omega$  des chaînes de domaine  $\Omega$  sur un alphabet  $\Sigma$ . Pour nous, *décrire un groupe  $G$* , ou *être donné un groupe  $G$* , voudra toujours dire « donner, voire être donné, un ensemble de générateurs de  $G$  » ; *décrire une classe  $H\pi$*  voudra dire « donner un élément  $\pi$  de la classe et un ensemble de générateurs de  $H$  ».

Le *problème de l'isomorphisme de chaînes* consiste à déterminer, étant donnés  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  et  $G$ , s'il y a au moins un élément  $\pi$  de  $G$  qui envoie  $\mathbf{x}$  sur  $\mathbf{y}$ , et, si de tels éléments (*isomorphismes*) existent, à les décrire. Il est clair que l'ensemble des isomorphismes  $\text{Iso}_G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  forme une classe  $\text{Aut}_G(\mathbf{x})\pi$  du groupe  $\text{Aut}_G(\mathbf{x})$  d'automorphismes de  $\mathbf{x}$  dans  $G$ , c'est-à-dire du groupe consistant dans les éléments de  $G$  qui envoient  $\mathbf{x}$  sur lui-même.

Le défi consiste à donner un algorithme qui résolve le problème en temps polynomial en la taille  $n = |\Omega|$  de  $\Omega$ , voire en temps raisonnable. Par exemple, le temps employé pourrait être *quasi-polynomial* en  $n$ , ce qui veut dire  $\exp(O(\log n)^{O(1)})$ . Ici, comme toujours,  $O(f(n))$  désigne une quantité bornée par  $C \cdot f(n)$ , pour  $n$  assez grand et  $C > 0$  une constante, et  $O_\epsilon$  indique que la constante  $C$  dépend de  $\epsilon$ .

Une grande partie de la motivation pour le problème de l'isomorphisme de chaînes vient du fait que le *problème de l'isomorphisme de graphes* se réduit à lui. Ce problème

---

1. Pour nous,  $G < S$  (ou  $S > G$ ) veut dire «  $G$  est un sous-groupe de  $S$ , pas forcément propre. »

consiste à déterminer si deux graphes finis  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont isomorphes, et, s'ils le sont, à décrire la classe de leurs isomorphismes. (Un *isomorphisme*  $\pi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$  est une bijection  $\pi$  de l'ensemble de sommets de  $\Gamma_1$  vers celui de  $\Gamma_2$  telle que  $\pi(\Gamma_1) = \Gamma_2$ .) Une solution permettrait, par exemple, de trouver une molécule dans une base de données.

Le problème de l'isomorphisme de graphes se réduit en temps polynomial au problème de l'isomorphisme de chaînes, de la façon suivante. Supposons sans perte de généralité que  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  ont le même ensemble de sommets  $V$ . Alors, nous pouvons définir  $\Omega$  comme l'ensemble des paires d'éléments de  $V$  (ordonnés ou non ordonnés, suivant que nos graphes sont orientés ou pas). La chaîne  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, 2$ , est définie comme suit : pour la paire  $a = \{v_1, v_2\}$  (ou  $a = (v_1, v_2)$ , si nos graphes sont orientés), la valeur de  $\mathbf{x}_i(a)$  est 1 s'il y a une arête entre  $v_1$  et  $v_2$  en  $\Gamma_i$ , et 0 dans le cas contraire. Soit  $G$  l'image de l'homomorphisme  $\iota : \text{Sym}(V) \rightarrow \text{Sym}(\Omega)$  définie par  $\sigma^t(\{v_1, v_2\}) = \{\sigma(v_1), \sigma(v_2)\}$ , où  $\sigma^t = \iota(\sigma)$ . Alors  $\iota$  induit une bijection entre la classe des isomorphismes de  $\Gamma_1$  à  $\Gamma_2$  et la classe  $\text{Iso}_G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ .

THÉOREME 1.1 (Babai). — *Le problème de l'isomorphisme de chaînes  $\Omega \rightarrow \Sigma$  peut être résolu en temps quasi-polynomial en le nombre d'éléments du domaine  $\Omega$ .*

En novembre 2015, Babai a annoncé une solution en temps quasipolynomial, avec un algorithme explicite. La préparation de cet exposé m'a conduit à trouver une erreur non triviale dans l'analyse du temps, mais Babai a réussi à le réparer en simplifiant l'algorithme. La preuve est maintenant correcte.

COROLLAIRE 1.2 (Babai). — *Le problème de l'isomorphisme de graphes peut être résolu en temps quasi-polynomial en le nombre de sommets.*

Notre référence principale sera [Ba]; nous nous servons aussi de la version courte [Ba2]. Nous essayerons d'examiner la preuve de la façon la plus détaillée possible dans un exposé de ce format, en partie pour aider à éliminer tout doute qui pourrait rester sur la forme actuelle du résultat.

La meilleure borne générale connue antérieurement pour le temps requis par le problème de l'isomorphisme de graphes, due à Luks [BKL], était  $\exp(O(\sqrt{n \log n}))$ ,

\* \* \*

L'usage de la *canonicité* joue un rôle crucial dans la stratégie de Babai. Comme dans la théorie de catégories, voire dans l'usage courant, un choix est *canonique* s'il est fonctoriel. La situation typique pour nous sera la suivante : un groupe  $G < \text{Sym}(\Omega)$  agit sur  $\Omega$ , et donc sur  $\Sigma^\Omega$ ; il agit aussi sur un autre ensemble  $S$ , et donc aussi sur les applications  $S \rightarrow \mathcal{C}$ , où  $\mathcal{C}$  est un ensemble fini. Une application  $S \rightarrow \mathcal{C}$  s'appelle un *coloriage*; l'ensemble  $\mathcal{C}$  s'appelle l'ensemble de *couleurs*. Un choix *canonique* (en relation à  $G$ ) d'un coloriage de  $\Omega$  pour chaque chaîne  $\mathbf{x} \in \Sigma^\Omega$  est une application qui va de  $\Sigma^\Omega$  aux coloriages et qui commute avec l'action de  $G$ .

En particulier, un choix canonique peut être un outil pour détecter des non-isomorphismes : si les coloriages  $C(\mathbf{x})$  et  $C(\mathbf{y})$  induits canoniquement par  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$

ne sont pas isomorphes l'un à l'autre – par exemple, s'ils ont un nombre différent d'éléments vermeils – alors  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  ne sont pas isomorphes l'un à l'autre. Même quand il y a des isomorphismes dans  $G$  qui envoient  $C(\mathbf{x})$  sur  $C(\mathbf{y})$ , la classe  $\text{Iso}_G(C(\mathbf{x}), C(\mathbf{y}))$  de tels isomorphismes sert à délimiter la classe d'isomorphismes  $\text{Iso}_G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  de  $\mathbf{x}$  à  $\mathbf{y}$ , puisque cette dernière est forcément un sous-ensemble de  $\text{Iso}_G(C(\mathbf{x}), C(\mathbf{y}))$ .

La preuve assimile aussi plusieurs idées développées lors d'approches antérieures au problème. La première étape de la procédure consiste à essayer de suivre ce qui est en essence l'algorithme de Luks [Lu]. Si cet algorithme s'arrête, c'est parce qu'il s'est heurté contre un quotient  $H_1/H_2$  isomorphe à  $\text{Alt}(\Gamma)$ , où  $H_2 \triangleleft H_1 < G$  et  $\Gamma$  est plutôt grand.

Notre tâche majeure consiste à étudier ce qui se passe à ce moment-là. La stratégie principale sera de chercher à colorier  $\Gamma$  d'une façon qui dépend canoniquement de  $\mathbf{x}$ . Cela limitera les automorphismes et isomorphismes possibles à considérer. Par exemple, si la moitié de  $\Gamma$  est coloriée en rouge et l'autre en noir, le groupe d'automorphismes possibles se réduit à  $\text{Sym}(|\Gamma|/2) \times \text{Sym}(|\Gamma|/2)$ . Un coloriage similaire induit par  $\mathbf{y}$  limite les isomorphismes aux applications qui alignent les deux coloriages. Nous trouverons toujours des coloriages qui nous aident, sauf quand certaines structures ont une très grande symétrie, laquelle, en revanche, permettra une descente à  $\Omega$  considérablement plus petit. Cette double récursion – réduction du groupe  $H_1/H_2$  ou descente à des chaînes considérablement plus courtes – résoudra le problème.

## 2. FONDEMENTS ET TRAVAUX PRÉCÉDENTS

En suivant l'usage courant pour les groupes de permutations, nous écrirons  $r^g$  pour l'élément  $g(r)$  auquel  $g \in \text{Sym}(\Omega)$  envoie  $r \in \Omega$ . Étant donné une chaîne  $\mathbf{x} : \Omega \rightarrow \Sigma$  et un élément  $g \in \text{Sym}(\Omega)$ , nous définissons  $\mathbf{x}^g : \Omega \rightarrow \Sigma$  par  $\mathbf{x}^g(r) = \mathbf{x}(r^{g^{-1}})$ .

Par contre, nous écrivons  $\Omega^k$  pour l'ensemble des  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$  avec l'action à gauche donnée par  $(\phi(\vec{x}))_r = \vec{x}_{\phi(r)}$ . L'idée est que ceci est défini non pas seulement pour  $\phi$  une permutation, mais pour toute application  $\phi : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ , même non injective. Nous appelons les éléments de  $\Omega^k$  *tuples* plutôt que *chaînes*.

### 2.1. Algorithmes de base

**2.1.1. Schreier-Sims.** — Plusieurs algorithmes essentiels se basent sur une idée de Schreier [Sch]. Il a remarqué que, si  $A$  est un ensemble de générateurs d'un groupe  $G$ , et  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , alors, pour tout ensemble de représentants  $A$  des classes de  $H$  dans  $G$ ,

$$A' = AAA^{-1} \cap H = \{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1} : \sigma_i \in A\} \cap H$$

est un ensemble de générateurs de  $H$ .

L'étape suivante est celle de Sims [Si1], [Si2], qui a montré l'utilité de travailler avec un groupe de permutations  $G < \text{Sym}(\Omega)$ ,  $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ , en termes d'une *chaîne de stabilisateurs*

$$G = G_0 > G_1 > G_2 > \dots > G_{n-1} = \{e\},$$

où  $G_k = G_{(x_1, x_2, \dots, x_k)} = \{g \in G : \forall 1 \leq i \leq k \ x_i^g = x_i\}$  (*stabilisateur de points*).

L'algorithme de Schreier-Sims (Algorithme 1; description basée sur [Lu, §1.2]) construit des ensembles  $C_i$  de représentants de  $G_i/G_{i+1}$  tels que  $\cup_{i \leq j < n-1} C_j$  engendre  $G_i$  pour tout  $0 \leq i < n-1$ . Le temps pris par l'algorithme est  $O(n^5 + n^3|A|)$ , où  $A$  est l'ensemble de générateurs de  $G$  qui nous est donné : la fonction FILTRE prend  $O(n)$  de temps, et tout  $g$  pour lequel elle est appelée satisfait  $g \in AC \cup CA \cup C^2$ , où  $C$  est la valeur de  $\cup_i C_i$  à la fin de la procédure. Bien sûr,  $|C| \leq n(n+1)/2$ .

Grâce à l'algorithme lui-même, nous pourrions toujours supposer que nos ensembles de générateurs sont de taille  $O(n^2)$ . Le temps pris par l'algorithme est donc  $O(n^5)$ .<sup>(2)</sup>

---

**Algorithme 1** Schreier-Sims : construction d'ensembles  $C_i$

---

1: **fonction** SCHREIERSIMS( $A, \vec{x}$ ) ▷  $A$  engendre  $G < \text{Sym}(\{x_1, \dots, x_n\})$   
**assure**  $\cup_{i \leq j < n-1} C_j$  engendre  $G_i$  et  $C_i \mapsto G_i/G_{i+1}$  est injectif  $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$   
2:  $C_i \leftarrow \{e\}$  pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$   
3:  $B \leftarrow A$   
4: **tantque**  $B \neq \emptyset$   
5:     Choisir  $g \in B$  arbitraire, et l'enlever de  $B$   
6:      $(i, \gamma) \leftarrow \text{FILTRER}(g, (C_i), \vec{x})$   
7:     **si**  $\gamma \neq e$  **alors**  
8:         ajouter  $\gamma$  à  $C_i$   
9:          $B \leftarrow B \cup \cup_{j \leq i} C_j \gamma \cup \cup_{j \geq i} \gamma C_j$   
10:     **retourner**  $(C_i)$   
11: **fonction** FILTRER( $g, (C_i), \vec{x}$ ) ▷ retourne  $(i, \gamma)$  tel que  $\gamma \in G_i, g \in C_0 C_1 \dots C_{i-1} \gamma$   
**requiert**  $C_i \subset G_i$  et  $C_i \rightarrow G_i/G_{i+1}$  injectif  $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$   
**assure**  $g \notin C_0 C_1 \dots C_i G_{i+1}$  sauf si  $(i, \gamma) = (n-1, e)$   
12:      $\gamma \leftarrow g$   
13:     **pour**  $i = 0$  **jusqu'à**  $n-2$   
14:         **si**  $\exists h \in C_i$  tel quel  $x_i^h = x_i^g$  **alors**  
15:              $\gamma \leftarrow h^{-1} \gamma$   
16:         **sinon**  
17:             **retourner**  $(i, \gamma)$   
18:     **retourner**  $(n-1, e)$

---

2. Nous supposons que l'ensemble de générateurs initial, spécifiant le groupe  $G$  du problème, est de taille  $O(n^C)$ ,  $C$  une constante. Le temps pris par la première utilisation de l'algorithme est donc  $O(n^{\max(5, 3+C)})$ .

Une fois les ensembles  $C_i$  construits, il devient possible d'accomplir plusieurs tâches essentielles rapidement.

EXERCICE 2.1. — *Montrer comment accomplir les tâches suivantes en temps polynomial, étant donné un groupe  $G < \text{Sym}(\Omega)$ ,  $|\Omega| = n$  :*

- (a) *Déterminer si un élément  $g \in \text{Sym}(\Omega)$  est dans  $G$ .*
- (b) *Étant donné un homomorphisme  $\phi : G \rightarrow \text{Sym}(\Omega')$ ,  $|\Omega'| \ll |\Omega|^{O(1)}$ , et un sous-groupe  $H < \text{Sym}(\Omega')$ , décrire  $\phi^{-1}(H)$ .*
- (c) [FHL] *Soit  $H < G$  avec  $[G : H] \ll n^{O(1)}$ . Étant donné un test qui détermine en temps polynomial si un élément  $g \in G$  appartient à  $H$ , décrire  $H$ . Astuce : travailler avec  $G > H > H_1 > H_2 > \dots$  à la place de  $G = G_0 > G_1 > G_2 > \dots$ .*

Ici, comme toujours, « décrire » veut dire « trouver un ensemble de générateurs », et un groupe nous est « donné » si un tel ensemble nous est donné.

L'algorithme de Schreier-Sims décrit le stabilisateur de points  $G_{(x_1, \dots, x_k)}$  pour  $x_1, \dots, x_k \in \Omega$  arbitraires. Par contre, nous ne pouvons pas demander allègrement un ensemble de générateurs d'un *stabilisateur d'ensemble*  $G_{\{x_1, \dots, x_k\}} = \{g \in G : \{x_1^g, \dots, x_k^g\} = \{x_1, \dots, x_k\}\}$  pour  $G$ ,  $x_i$  arbitraires : faire ceci serait équivalent à résoudre le problème de l'isomorphisme lui-même.

**2.1.2. Orbites et blocs.** — Soit donné, comme toujours, un groupe de permutations  $G$  agissant sur un ensemble fini  $\Omega$ . Le domaine  $\Omega$  est l'union disjointe des *orbites*  $\{x^g : g \in G\}$  de  $G$ . Ces orbites peuvent être déterminées en temps polynomial<sup>(3)</sup> en  $|\Omega|$ . Ceci est un exercice simple. La tâche se réduit à celle – simple elle aussi – de trouver les composantes connexes d'un graphe.

Supposons que l'action de  $G$  soit transitive. (Il y a donc une seule orbite.) Un *bloc* de  $G$  est un sous-ensemble  $B \subset \Omega$ ,  $B \notin \{\emptyset, \Omega\}$ , tel que, pour  $g, h \in G$  quelconques, soit  $B^g = B^h$ , soit  $B^g \cap B^h = \emptyset$ . La collection  $\{B^g : g \in G\}$  (*système de blocs*) pour  $B$  donné partitionne  $\Omega$ . L'action de  $G$  est *primitive* s'il n'y a pas de blocs de taille  $> 1$ ; autrement, elle s'appelle *imprimitive*. Un système de blocs est *minimal*<sup>(4)</sup> si l'action de  $G$  sur lui est primitive.

Voyons comment déterminer si l'action de  $G$  est primitive, et, s'il ne l'est pas, comment trouver un système de blocs de taille  $> 1$ . En itérant la procédure, nous obtiendrons un système de blocs minimal en temps polynomial. (Nous suivons [Lu], qui cite [Si1].)

Pour  $a, b \in \Omega$  distincts, soit  $\Gamma$  le graphe avec  $\Omega$  comme son ensemble de sommets et l'orbite  $\{\{a, b\}^g : g \in G\}$  comme son ensemble d'arêtes. La composante connexe qui

3. Pour être précis :  $O(|\Omega|^{O(1)} + |A||\Omega|)$ , où  $A$  est la taille de l'ensemble de générateurs de  $G$  qui nous est donné. Nous omettrons toute mention de cette taille par la suite, puisque, comme nous l'avons déjà dit, nous pouvons la garder toujours sous contrôle.

4. Pour paraphraser [Lu, §1.1] : il faut avouer qu'un tel système pourrait s'appeler plutôt maximal. La taille des blocs est maximale, leur nombre est minimal.

contient  $a$  et  $b$  est le bloc le plus petit qui contient  $a$  et  $b$ . (Si  $\Gamma$  est connexe, alors le « bloc » est  $\Omega$ .) L'action de  $G$  est imprimitive ssi  $\Gamma$  est non connexe pour un  $a$  arbitraire et au moins un  $b$ ; dans ce cas-là, nous obtenons un bloc qui contient  $a$  et  $b$ , et donc tout un système de blocs de taille  $> 1$ .

Un dernier mot : si  $G < \text{Sym}(\Omega)$ , nous disons que  $G$  est *transitif*, voire *primitif*, si son action sur  $\Omega$  l'est.

## 2.2. Luks : le cas de groupes avec facteurs d'ordre borné

Luks a montré comment résoudre le problème de l'isomorphisme de graphes en temps polynomial dans le cas spécial de graphes de degré borné. (Le *degré*, ou *valence*, d'un sommet dans un graphe non orienté est le nombre d'arêtes qui le contiennent.) Il réduit ceci au problème de décrire le groupe d'automorphismes de chaînes dans le cas d'un groupe  $G$  tel que tout facteur de composition de  $G$  – c'est-à-dire, tout quotient dans une suite principale (Jordan-Hölder) de  $G$  – est borné. Le processus de réduction, élégant et loin d'être trivial, ne nous concerne pas ici. Voyons plutôt comment Luks résout ce cas du problème de l'isomorphisme de chaînes.

Nous suivrons la notation de [Ba], même si les idées viennent de [Lu].

DÉFINITION 2.2. — Soient  $K \subset \text{Sym}(\Omega)$  et  $\Delta \subset \Omega$  (la « fenêtre »). L'ensemble d'isomorphismes partiels  $\text{Iso}_K^\Delta$  est

$$\text{Iso}_K^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\tau \in K : \mathbf{x}(x) = \mathbf{y}(x^\tau) \quad \forall x \in \Delta\}.$$

L'ensemble d'automorphismes partiels  $\text{Aut}_K^\Delta(\mathbf{x})$  est égal à  $\text{Iso}_K^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ .

$\text{Iso}_K^\Delta$  est donc l'ensemble de toutes les permutations  $g \in K$  qui envoient  $\mathbf{x}$  sur  $\mathbf{y}$  – au moins à en juger par ce qui peut se voir par la fenêtre  $\Delta$ . Nous travaillerons en général avec  $K$  de la forme  $H\pi$ , où  $H$  laisse  $\Delta$  invariante (en tant qu'ensemble).

Il est clair que, pour  $K, K_1, K_2 \subset \text{Sym}(\Omega)$  et  $\sigma \in \text{Sym}(\Omega)$ ,

$$(1) \quad \text{Iso}_{K\sigma}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{Iso}_K^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{\sigma^{-1}}) \sigma,$$

$$(2) \quad \text{Iso}_{K_1 \cup K_2}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{Iso}_{K_1}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cup \text{Iso}_{K_2}^\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Il est aussi clair que, si  $G$  est un sous-groupe de  $\text{Sym}(\Omega)$  et  $\Delta$  est invariant sous  $G$ , alors  $\text{Aut}_G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est un sous-groupe de  $G$ , et, pour tout  $\sigma \in \text{Sym}(\Omega)$ ,  $\text{Iso}_{G\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est soit vide, soit une classe à droite de la forme  $\text{Aut}_G(\mathbf{x})\tau$ ,  $\tau \in \text{Sym}(\Omega)$ . Soient  $\Delta_1, \Delta_2 \subset \Omega$ ,  $\Delta_1$  invariant sous  $G$ . Pour  $G' = \text{Aut}_G(\mathbf{x})$  et  $\sigma, \tau$  tels que  $\text{Iso}_{G'\sigma}^{\Delta_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G'\tau$ ,

$$(3) \quad \text{Iso}_{G'\sigma}^{\Delta_1 \cup \Delta_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{Iso}_{G'\tau}^{\Delta_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{Iso}_{G'}^{\Delta_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{\tau^{-1}}) \tau,$$

où la deuxième équation est une application de (1). Babai appelle (3) la *règle de la chaîne*.

L'énoncé suivant n'utilise pas la classification de groupes finis simples.

THÉOREME 2.3 ([BCP] <sup>(6)</sup>). — Soit  $G < \text{Sym}(\Omega)$  un groupe primitif. Soit  $n = |\Omega|$ . Si tout facteur de composition de  $G$  est d'ordre  $\leq k$ , alors  $|G| \leq n^{O_k(1)}$ .

Ici, comme d'habitude,  $O_k(1)$  désigne une quantité qui dépend seulement de  $k$ .

THÉOREME 2.4 (Luks [Lu]). — Soient  $\Omega$  un ensemble fini et  $\mathbf{x}, \mathbf{y} : \Omega \rightarrow \Sigma$  deux chaînes. Soit donné un groupe  $G < \text{Sym}(\Omega)$  tel que tout facteur de composition de  $G$  est d'ordre  $\leq k$ . Il est possible de déterminer  $\text{Iso}_G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  en temps polynomial en  $n = |\Omega|$ .

PREUVE — **Cas 1 :  $G$  non transitif.** Soit  $\Delta_1 \subsetneq \Omega$ ,  $\Delta_1 \neq \emptyset$ ,  $\Delta_1$  stable sous l'action de  $G$ . Définissons  $\Delta_2 = \Omega \setminus \Delta_1$ . Alors, par (3), il suffit de calculer  $\text{Iso}_G^{\Delta_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  (égal à une classe que nous notons  $G'\tau$ ) et  $\text{Iso}_G^{\Delta_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}')$  pour  $\mathbf{y}' = \mathbf{y}^{\tau^{-1}}$ . Or, pour déterminer  $\text{Iso}_G^{\Delta_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , nous déterminons, de façon récursive,  $\text{Iso}_G(\mathbf{x}|_{\Delta_1}, \mathbf{y}|_{\Delta_1})$ , puis, par Schreier-Sims, le stabilisateur de points  $G_{(\Delta_1)}$ . De la même manière, déterminer  $\text{Iso}_G^{\Delta_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}')$  pour  $\mathbf{y}' = \mathbf{y}^{\tau^{-1}}$  se réduit à déterminer le groupe d'isomorphismes (dans un groupe  $G'$ ) entre deux chaînes de longueur  $|\Delta_2|$ . Comme  $|\Delta_1| + |\Delta_2| = n$  et Schreier-Sims prend du temps  $O(n^5)$ , tout va bien. (La comptabilité est laissée au lecteur.)

**Cas 2 :  $G$  transitif.** Soit  $N$  le stabilisateur d'un système de blocs minimal pour  $G$ ; donc,  $G/N$  est primitif. Par le Théorème 2.3,  $|G/N| \leq m^{O_k(1)}$ , où  $m$  est le nombre de blocs. Or, pour  $\sigma_1, \dots, \sigma_\ell$  ( $\ell = |G/N|$ ) tels que  $G = \cup_{1 \leq i \leq \ell} N\sigma_i$ ,

$$(4) \quad \text{Iso}_G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{Iso}_{\cup_i N\sigma_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bigcup_{1 \leq i \leq \ell} \text{Iso}_{N\sigma_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bigcup_{1 \leq i \leq \ell} \text{Iso}_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{\sigma_i^{-1}})\sigma_i$$

par (1) et (2). Comme les orbites de  $N$  sont contenues dans les blocs, qui sont de taille  $n/m$ , déterminer  $\text{Iso}_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i)$  ( $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}^{\sigma_i^{-1}}$ ) se réduit – par la règle (3) – à déterminer les groupes d'isomorphismes de  $m$  paires de chaînes de longueur  $n/m$ . Nous avons donc réduit le problème à la solution de  $\ell \cdot m = m^{O_k(1)}$  problèmes pour des chaînes de longueur  $n/m$ .

Le pas final consiste à faire l'union de classes en (4). Nous avons une description de chaque  $\text{Iso}_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i)$ , soit comme l'ensemble vide, soit comme une classe à droite  $H\tau_i$  du groupe  $H = \text{Aut}_N(\mathbf{x})$ , dont nous avons trouvé une description, c'est-à-dire un ensemble de générateurs  $A$ . Alors

$$\begin{aligned} \text{Iso}_G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \bigcup_{1 \leq i \leq \ell} \text{Iso}_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i)\sigma_i = \bigcup_{1 \leq i \leq \ell} H\tau_i\sigma_i \\ &= \langle A \cup \{\tau_i\sigma_i(\tau_1\sigma_1)^{-1} : 1 \leq i \leq \ell\} \rangle \tau_1\sigma_1. \end{aligned}$$

□

Nous aurions pu éviter quelques appels à Schreier-Sims en travaillant toujours avec des isomorphismes partiels, mais cela a peu d'importance qualitative.

---

6. À vrai dire, [BCP, Thm 1.1] est plus général que ceci; par exemple, des facteurs abéliens arbitraires (non bornés) sont admis. Cela donne une généralisation du Théorème 2.4.

### 2.3. Relations, partitions, configurations

Soit  $\mathcal{C}$  (« couleurs ») un ensemble fini que nous pouvons supposer ordonné (disons, de rouge à violet). Une *relation  $k$ -aire* sur un ensemble fini  $\Gamma$  est un sous-ensemble  $R \subset \Gamma^k$ . Une *structure (relationnelle)  $k$ -aire* est une paire  $\mathfrak{X} = (\Gamma, (R_i)_{i \in \mathcal{C}})$ , où, pour chaque  $i \in \mathcal{C}$ ,  $R_i$  est une relation  $k$ -aire sur  $\Gamma$ . Si les  $R_i$  sont tous non vides et partitionnent  $\Gamma^k$ , nous disons que  $\mathfrak{X}$  est une *structure de partition  $k$ -aire*. Dans ce cas-là, nous pouvons décrire  $\mathfrak{X}$  par une fonction  $c : \Gamma^k \rightarrow \mathcal{C}$  qui assigne à chaque  $\vec{x} \in \Gamma^k$  l'indice  $i$  de la relation  $R_i$  à laquelle il appartient. Nous disons que  $c(\vec{x})$  est la couleur de  $\vec{x}$ .

Un isomorphisme entre deux structures  $k$ -aires  $\mathfrak{X} = (\Gamma, (R_i)_{i \in \mathcal{C}})$  et  $\mathfrak{X}' = (\Gamma', (R'_i)_{i \in \mathcal{C}'})$  est une bijection  $\Gamma \rightarrow \Gamma'$  qui envoie  $R_i$  à  $R'_i$  pour chaque  $i$ . Il est possible de construire un foncteur  $F_1$  qui envoie chaque structure  $k$ -aire  $\mathfrak{X}$  sur  $\Gamma$  à une structure de partition  $k$ -aire  $F_1(\mathfrak{X})$  sur  $\Gamma$ ; qui plus est,  $\text{Iso}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \text{Iso}(F_1(\mathfrak{X}), F_1(\mathfrak{Y}))$ . La procédure est plutôt triviale; nous la détaillons (Algorithme 2) pour montrer ce qu'*indexer* veut dire. Cela nous permet de ne pas utiliser plus de  $\min(|\Gamma|^k, 2^{|\mathcal{C}|})$  couleurs, où  $n = |\Omega|$ , tout en gardant leur signification en termes des couleurs originales  $\mathcal{C}$ . Le temps pris pour calculer  $F_1(\mathfrak{X})$  est  $O(|\mathcal{C}||\Gamma|^{O(k)})$ . Nous ne nous occupons pas des détails d'implémentation de la collection de tuples  $\mathcal{S}$ , mais il peut s'agir tout simplement d'une liste ordonnée lexicographiquement; dans ce cas,  $|\Gamma|^{O(k)}$  est  $|\Gamma|^{2k}$ . (Dans la réalité,  $\mathcal{S}$  serait implémentée avec du *hachage*, ce qui n'est que l'art de bien organiser une bibliothèque.)

---

**Algorithme 2** Raffinement d'une structure de relation. Indexeur.

---

```

1: fonction  $F_1(\Gamma, k, \mathcal{C}, (R_i)_{i \in \mathcal{C}})$ 
2:    $\mathcal{S} \leftarrow \emptyset$ 
3:   pour  $\vec{x} \in \Gamma^k$ 
4:      $a \leftarrow \{i \in \mathcal{C} : \vec{x} \in R_i\}$ 
5:      $c(x) \leftarrow \text{INDEXEUR}(\mathcal{S}, a)$ 
6:   retourner  $(\mathcal{S}, c)$  ▷ retourne  $c : \Gamma^k \rightarrow \mathcal{C}'$ 
7:     ▷  $\mathcal{C}'$  est l'ensemble d'indices de  $\mathcal{S}$ ;  $\mathcal{S}$  explique  $\mathcal{C}'$  en termes de  $\mathcal{C}$ 
8: fonction  $\text{INDEXEUR}(\mathcal{S}, a)$  ▷  $\mathcal{S}$  est une collection modifiable
9:   si  $a$  n'est pas dans  $\mathcal{S}$  alors
10:     ajouter  $a$  à  $\mathcal{S}$ 
11:   retourner indice de  $a$  dans  $\mathcal{S}$ 

```

---

Un élément  $\vec{x} \in \Gamma^k$  définit une relation d'équivalence  $\rho(\vec{x})$  sur  $\{1, \dots, k\} : i \sim j$  ssi  $x_i = x_j$ . Le monoïde  $\mathfrak{M}(S)$  ( $S$  un ensemble) consiste en les applications  $S \rightarrow S$ , avec la composition comme opération.

**DÉFINITION 2.5.** — Une structure de partition  $k$ -aire  $\mathfrak{X} = (\Gamma, c)$  est dite configuration  $k$ -aire si

- (a) Pour tous  $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma^k$ , si  $c(\vec{x}) = c(\vec{y})$ , alors  $\rho(\vec{x}) = \rho(\vec{y})$ .
- (b) Il y a un homomorphisme de monoïdes  $\eta : \mathfrak{M}(\{1, \dots, k\}) \rightarrow \mathfrak{M}(\mathcal{C})$  tel que, pour tout  $\tau \in \mathfrak{M}(\{1, \dots, k\})$ ,  $c(\tau(\vec{x})) = \tau^\eta(c(\vec{x}))$  pour tout  $\vec{x} \in \Gamma^k$ .

Alors, par exemple, pour  $k = 2$ , (a) veut dire que la couleur de  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  « sait » si  $x_1 = x_2$  ou pas, dans le sens où, si nous connaissons  $c(\vec{x})$ , alors nous savons si  $x_1 = x_2$  ou pas. De la même façon, (b) nous indique que la couleur de  $\vec{x}$  connaît les couleurs de  $(x_2, x_1)$ ,  $(x_1, x_1)$  et  $(x_2, x_2)$ .

Nous pouvons définir un foncteur  $F_2$  qui envoie chaque structure de partition  $k$ -aire  $\mathfrak{X}$  sur  $\Gamma$  à une configuration  $k$ -aire ; comme pour  $F_1$ , le fait que  $F_2(\mathfrak{X})$  est un raffinement de  $\mathfrak{X}$  implique que  $\text{Iso}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \text{Iso}(F_2(\mathfrak{X}), F_2(\mathfrak{Y}))$ . La procédure pour calculer  $F_2$  est très similaire à celle pour calculer  $F_1$  (Algorithme 2). Au lieu d'assigner à  $\vec{x}$  la couleur  $\{i \in \mathcal{C} : \vec{x} \in R_i\}$ , nous lui assignons la couleur  $(\rho(\vec{x}), (c(\phi(\vec{x})))_{\phi \in \mathfrak{M}(\{1, \dots, k\})})$ .

Il est aisé de voir que  $F_2(\mathfrak{X})$  est le raffinement le plus grossier d'une structure de partition  $\mathfrak{X}$  qui est une configuration, de la même manière que  $F_1(\mathfrak{X})$  est le raffinement le plus grossier d'une structure  $\mathfrak{X}$  qui est une structure de partition.

DÉFINITION 2.6. — Soit  $\mathfrak{X} = (\Gamma, c)$ ,  $c : \Gamma^k \rightarrow \mathcal{C}$ , une structure de partition  $k$ -aire. Pour  $1 \leq l \leq k$ , nous définissons  $c^{(l)} : \Gamma^l \rightarrow \mathcal{C}$  comme suit :

$$c^{(l)}(\vec{x}) = c(x_1, x_2, \dots, x_l, x_l, \dots, x_l).$$

La structure de partition  $l$ -aire  $\mathfrak{X}^{(l)} = (\Gamma, c^{(l)})$  est dite le  $(l)$ -squelette de  $\mathfrak{X}$ .

La chaîne vide sera viride.

EXERCICE 2.7. — Tout squelette d'une configuration est une configuration.

Ici le fait que l'axiome (b) dans la définition de *configuration* soit valable même pour  $\eta$  non injectif est crucial.

Pour  $\mathfrak{X} = (\Gamma, c)$  une structure de partition et  $\Gamma' \subset \Gamma$ , la *sous-structure induite*  $\mathfrak{X}[\Gamma']$  est la structure  $(\Gamma', c|_{\Gamma'})$  définie par la restriction de  $c$  à  $\Gamma'$ . Il est clair que, si  $\mathfrak{X}$  est une configuration, alors  $\mathfrak{X}[\Gamma']$  l'est aussi.

\* \* \*

Il ne faut pas confondre une structure de partition (*partition structure*) avec ce que nous appellerons un *découpage* (*colored partition*). Un découpage d'un ensemble  $\Gamma$  est un coloriage de  $\Gamma$  supplémenté d'une partition de chaque classe de couleur. (Une *classe de couleur* est l'ensemble de sommets d'une couleur donnée.) Un découpage est dit *admissible* si chaque ensemble  $B$  dans chaque partition est de taille  $\geq 2$ . Pour  $\alpha < 1$ , un  $\alpha$ -*découpage* est un découpage admissible tel que  $|B| \leq \alpha|\Gamma|$  pour chaque  $B$ .

Un découpage est une structure plus fine que le coloriage qu'il raffine, mais moins fine que la structure que nous obtiendrions si nous donnions à chaque élément de chaque partition une couleur différente. Un automorphisme ou isomorphisme d'un découpage doit préserver les couleurs de celui-ci, mais pourrait permuter les ensembles de la même taille qui appartiennent à la partition d'une couleur. Comme les ensembles de taille différente ne peuvent, évidemment, être permutés, il est clair que nous pouvons supposer sans perte de généralité que toute couleur est partitionnée en ensembles de la même taille. Nous ajoutons ceci à la définition de  $\alpha$ -découpage à partir de maintenant.

## 2.4. Configurations cohérentes $k$ -aires

Pour  $\vec{x} \in \Gamma^k$ ,  $z \in \Gamma$  et  $1 \leq i \leq k$ , nous définissons  $\vec{x}^i(z) \in \Gamma^k$  comme suit :

$$\vec{x}^i(z) = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_k).$$

DÉFINITION 2.8. — Une configuration cohérente  $k$ -aire  $\mathfrak{X} = (\Gamma, c)$  est une configuration  $k$ -aire ayant la propriété suivante : il y a une fonction  $\gamma : \mathcal{C}^k \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}_0^+$  telle que, pour  $\vec{k} \in \mathcal{C}^k$  et  $j \in \mathcal{C}$  arbitraires et tout  $\vec{x} \in \Gamma^k$  tel que  $c(\vec{x}) = j$ ,

$$|\{z \in \Gamma : c(\vec{x}^i(z)) = k_i \forall i \in \mathcal{C}\}| = \gamma(\vec{k}, j).$$

Les valeurs  $\gamma(\vec{k}, j)$  sont appelées nombres d'intersection de  $\mathfrak{X}$ .

Une configuration cohérente est dite *classique* si  $k = 2$ .

Remarque 2.9. — Les configurations cohérentes classiques ont été introduites par Higman [Hi]. Les premiers exemples étaient du type *schurien* : une configuration est *schurienne* si elle est la partition de  $\Gamma^2$  dans ses orbites (« orbitales ») sous l'action d'un groupe  $G < \text{Sym}(\Gamma)$ .

DÉFINITION 2.10. — Si une configuration cohérente classique n'a que deux couleurs, une pour  $\{(x, x) : x \in \Gamma\}$  et l'autre pour son complément, la configuration est dite une clique, ou triviale.

EXERCICE 2.11. — Tout squelette d'une configuration cohérente est cohérent.

Encore une fois, l'axiome (b) des configurations joue un rôle clé.

EXERCICE 2.12. — Soient  $\mathfrak{X} = (\Gamma, c)$  une configuration cohérente et  $\Gamma' \subset \Gamma$  une classe de couleurs en relation au coloriage induit par  $c$  sur  $\Gamma$ . Alors la sous-structure induite  $\mathfrak{X}[\Gamma']$  est une configuration cohérente.

Ici, c'est un cas spécial de (b) qu'il faut utiliser : la couleur  $c(x_1, \dots, x_n)$  « connaît » les couleurs  $c(x_1), \dots, c(x_n)$ , puisque  $c(x_i) = c(x_i, \dots, x_i)$ .

Soient  $0 \leq l < k$  et  $\vec{x} \in \Gamma^l$ . Nous colorions  $\Gamma^{k-l}$  comme suit : pour  $\vec{y} \in \Gamma^{k-l}$ ,

$$c_{\vec{x}}(\vec{y}) = c(\vec{x}\vec{y}).$$

En résulte une structure de partition  $(k-l)$ -aire  $\mathfrak{X}_{\vec{x}} = (\Gamma, c_{\vec{x}})$ .

EXERCICE 2.13. — Soit  $\mathfrak{X} = (\Gamma, c)$  une structure de partition ; soit  $\vec{x} \in \Gamma^l$ ,  $0 \leq l < k$ . Alors

- (a)  $c_{\vec{x}}$  est un raffinement du coloriage du squelette  $\mathfrak{X}^{(k-l)}$ .
- (b) Si  $\mathfrak{X}$  est cohérente,  $\mathfrak{X}_{\vec{x}}$  l'est aussi.

Il est clair que, de plus,  $\mathfrak{X}_{\vec{x}}$  est canonique en relation à  $\vec{x}$ , ce qui veut dire que  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}_{\vec{x}}$  commute avec l'action sur  $\Gamma$  du stabilisateur dans  $\text{Sym}(\Gamma)$  des points  $x_1, \dots, x_l$ .

DÉFINITION 2.14. — Une configuration cohérente  $(\Gamma, c)$  est dite homogène si la couleur  $c(x, x, \dots, x)$  de tout sommet  $x \in \Gamma$  est la même. Une configuration cohérente classique est dite primitive si elle est homogène et les graphes  $\mathcal{G}_r = \{(x, y) : x, y \in \Gamma, c(x, y) = r\}$  (pour toute couleur  $r$  telle que  $c(x, y) = r$  pour au moins une paire  $(x, y)$  avec  $x \neq y$ ) sont tous connexes. Elle est dite uniprimitive si elle est primitive et non triviale.

Nous n'avons pas besoin de préciser si ces graphes sont connexes dans le sens propre (à savoir, il y a un chemin de tout sommet à tout autre, respectant l'orientation) ou dans le sens faible (sans compter l'orientation) : le fait que  $(\Gamma, c)$  soit cohérente, classique et homogène implique que  $d_r^+(x) = |\{y \in \Gamma : (x, y) \in \mathcal{G}_r\}|$  est indépendant de  $x$  (pourquoi?), ce qui implique que toute composante faiblement connexe de  $\mathcal{G}_r$  est connexe (exercice).

EXERCICE 2.15. — Soit  $\mathfrak{X} = (\Gamma, c)$  une configuration cohérente classique uniprimitive. Il n'y a aucun ensemble  $B \subset \Gamma$ ,  $|B| > |\Gamma|/2$ , tel que la restriction de  $\mathfrak{X}$  à  $B$  soit une clique.

SOLUTION – Si les arêtes de la grande clique sont sensées être blanches, soit *noir* une autre couleur d'arêtes de  $\mathfrak{X}$ , et soit  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{noir}}$ . Or, pour un graphe orienté birégulier<sup>(7)</sup>  $\mathcal{G}$  non vide avec  $\Gamma$  comme ensemble de sommets, il est impossible qu'il y ait un ensemble  $B \subset \Gamma$ ,  $|B| > |G|/2$ , tel que la réduction du graphe à  $B$  soit vide (pourquoi?).  $\square$

EXERCICE 2.16. — Soit  $(\Gamma, c)$  une configuration cohérente classique homogène.

(a) Soit  $r_0, \dots, r_k$  une séquence de couleurs. Alors, si  $x_0, x_k \in \Gamma$  sont tels que  $c(x_0, x_k) = r_0$ , le nombre de  $x_1, \dots, x_{k-1} \in \Gamma$  tels que  $c(x_{i-1}, x_i) = r_i$  pour tout  $1 \leq i \leq k$  dépend seulement de  $r_0, \dots, r_k$ .

(b) Pour toute couleur  $r$ , toute composante connexe de  $\mathcal{G}_r$  est de la même taille.

SOLUTION (ESQUISSE) – En (a), le cas  $k = 2$  vaut par la définition de « cohérent » ; prouvez les cas  $k > 2$  par induction. Pour prouver (b), utilisez (a).

## 2.5. Le raffinement canonique $k$ -aire à la façon de Weisfeiler-Leman

Définissons un foncteur  $F_3$  qui envoie une configuration  $\mathfrak{X} = (\Gamma, c)$  à une configuration cohérente  $F_3(\mathfrak{X}) = (\Gamma, c')$ . Comme  $F_3(\mathfrak{X})$  sera un raffinement de  $\mathfrak{X}$ , nous aurons  $\text{Iso}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \text{Iso}(F_3(\mathfrak{X}), F_3(\mathfrak{Y}))$ .

L'algorithme 3, qui calcule  $F_3$ , est basé sur une idée de Weisfeiler et Leman<sup>(8)</sup> [WL]. Il s'agit d'itérer une procédure de raffinement. Si, dans une itération, aucun raffinement ne se produit – c'est-à-dire, si les classes d'équivalence du nouveau coloriage  $\mathcal{C}_i$  sont les mêmes que celles de l'ancien coloriage  $\mathcal{C}_{i-1}$  – alors, (a) aucun raffinement ne se produira dans le futur, (b) le coloriage  $\mathcal{C}_{i-1}$  est déjà cohérent.

7. Voir la définition du §2.6.

8. Aussi appelé Lehman, mais [Ba] indique que le deuxième auteur préférerait *Leman*. Deux transformations naturelles  $L \rightarrow \mathbb{J}L$ ,  $\mathbb{J}L \rightarrow L$  peuvent ne pas être l'inverse l'une de l'autre.

Si le coloriage  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$  du début a  $r$  couleurs différentes, il est clair qu'il ne peut être raffiné que  $|\Gamma|^k - r$  fois. Alors,  $|\Gamma|^k - r$  itérations sont suffisantes pour produire une configuration cohérente. En particulier, le temps pris est  $O(k^2|\Gamma|^{2k+1})$ , même avec une implémentation brutale.

Les algorithmes de type Weisfeiler-Leman étaient autrefois regardés comme une approche plausible au problème de l'isomorphisme de graphes. Depuis [CFI], [EvP], il est clair qu'il ne se suffisent pas à eux-mêmes. Ils sont quand même un outil précieux. La version  $k$ -aire ici est due à Babai-Mathon [Ba3] et Immermann-Lander [ImL].

---

**Algorithme 3** Weisfeiler-Leman pour les configurations  $k$ -aires.

---

```

1: fonction WEISFEILERLEMAN( $\Gamma, k, c : \Gamma^k \rightarrow \mathcal{C}$ )
2:    $\mathcal{C}_0 \leftarrow \mathcal{C}; c_0 \leftarrow c; i_0 \leftarrow |\Gamma|^k - |c(\Gamma^k)|$ 
3:   pour  $i = 1$  jusqu'à  $i_0$ 
4:      $\mathcal{I}_i \leftarrow \emptyset$ 
5:     pour  $\vec{x} \in \Gamma^k$ 
6:        $\nu \leftarrow \left( c_{i-1}(\vec{x}), (|\{z \in \Gamma : c_{i-1}(\vec{x}_j(z)) = r_j \ \forall 1 \leq j \leq k\}|)_{\vec{r} \in \mathcal{C}_{i-1}^k} \right)$ 
7:        $c_i(\vec{x}) = \text{INDEXEUR}(\mathcal{I}_i, \nu) \triangleright \text{INDEXEUR}$  est comme dans l'algorithme 2
8:      $\mathcal{C}_i \leftarrow$  indices de  $\mathcal{I}_i$ 
9:   retourner  $(c_{n-i_0} : \Gamma^k \rightarrow \mathcal{C}_{n-i_0}, (\mathcal{I}_i)_{1 \leq i \leq n-i_0}) \triangleright (\mathcal{I}_i)$  donne du sens à  $\mathcal{C}_{n-r}$ 

```

---

## 2.6. Graphes, hypergraphes et *designs* en blocs

Nous savons déjà qu'un *graphe* est une paire  $(V, A)$ , où  $V$  est un ensemble (« sommets ») et  $A$  est une collection de paires d'éléments de  $V$  (voire de sous-ensembles de  $V$  avec deux éléments, si le graphe est non orienté). Un graphe non orienté est dit *régulier* si le degré de tout sommet est le même; un graphe orienté est dit *birégulier* si le *degré sortant*  $d^+(v) = |\{w \in V : (v, w) \in A\}|$  et le *degré entrant*  $d^-(v) = |\{w \in V : (w, v) \in A\}|$  sont indépendants de  $v$ . (Pour  $V$  fini, ils sont forcément la même constante.)

Un *graphe biparti* est un triplet  $(V_1, V_2; A)$  avec  $A \subset V_1 \times V_2$ . Un graphe biparti est *semirégulier* si le degré<sup>(9)</sup>  $d^+(v_1)$  est indépendant de  $v_1 \in V_1$ , et le degré  $d^-(v_2)$  est indépendant de  $v_2 \in V_2$ .

EXERCICE 2.17. — Soit  $\mathfrak{X} = (\Gamma, c)$  une configuration cohérente classique homogène.

- (a) Soient  $C_1, C_2$  deux classes de couleur, et soit vert une couleur d'arêtes en  $C_1 \times C_2$ . Alors, le graphe biparti  $(C_1, C_2; \mathcal{G}_{\text{vert}})$  est semirégulier.
- (b) Soit  $y \in \Gamma$ , et  $L_i(y) = \{x \in \Gamma : (x, y) = i\}$ . Soient lin, bis et terre trois couleurs d'arêtes. Alors, pour  $L_1 = L_{\text{lin}}(y)$  et  $L_2 = L_{\text{bis}}(y)$ , le graphe biparti  $(L_1, L_2; R_{\text{terre}} \cap (L_1 \times L_2))$  est semirégulier.

---

9. Nous omettons les mots « entrant » et « sortant », puisqu'il est évident qu'il s'agit du degré entrant dans le cas de  $v_1$  et du degré sortant dans le cas de  $v_2$ .

EXERCICE 2.18. — Soit  $\mathfrak{X}$  une configuration cohérente classique homogène. Soient  $C_1, C_2$  deux classes de couleur. Soient vert une couleur d'arêtes en  $C_1 \times C_2$  et rouge une couleur d'arêtes en  $C_2 \times C_2$ . Soient  $B_1, \dots, B_m$  les composantes connexes de  $\mathcal{G}_{\text{rouge}}$  en  $C_2$ . Définissons le graphe biparti  $Y = (C_1, \{1, \dots, m\}; D)$  comme suit :  $(x, y) \in D$  ssi  $(x, y) \in \mathcal{G}_{\text{vert}}$  pour au moins un  $y \in B_i$ . Alors  $Y$  est semirégulier.

SOLUTION — Notez que, pour  $y \in B_i$  et  $x \in C_1$ ,  $(x, y')$  est vert pour au moins un  $y' \in B_i$  ssi il existe  $x_0 = x, x_1, \dots, x_m$  tels que  $(x_i, x_{i+1})$  est rouge pour  $0 \leq i < m$  et  $(x_m, y)$  est vert. Concluez par l'exercice 2.16a que tous les sommets en  $\{1, \dots, m\}$  ont le même degré en  $Y$ .

De façon analogue, montrez que, pour  $x \in V_1$  et  $y \in B_i$  tels que  $(x, y)$  est rouge, le nombre de  $z \in B_i$  tels que  $(x, z)$  est rouge ne dépend pas de  $x, y$  ou  $i$ . Notons ce nombre  $q$ . Alors, le degré de tout  $v \in C_1$  est son degré en  $X$ , divisé par  $q$ . Par (a), il ne dépend donc pas de  $v$ .  $\square$

Un graphe biparti est *complet* (en tant que graphe biparti) si  $A = V_1 \times V_2$ . Un graphe biparti qui n'est ni vide ni complet est appelé *non trivial*.

Un *hypergraphe*  $\mathcal{H} = (V, \mathcal{A})$  consiste en un ensemble  $V$  (« sommets ») et une collection  $\mathcal{A}$  de sous-ensembles de  $V$  (« arêtes »), peut-être avec des sous-ensembles répétés. Un hypergraphe est dit *u-uniforme* si  $|A| = u$  pour tout  $A \in \mathcal{A}$ . Il est dit *régulier de degré r* si tout  $v \in V$  appartient à exactement  $r$  ensembles  $A$  dans  $\mathcal{A}$ .

L'hypergraphe *u-uniforme complet* sur  $V$  est  $(V, \{A \subset V : |A| = u\})$ , où chaque ensemble  $A$  est compté une fois. Un *coloriage des arêtes* de l'hypergraphe complet est une application de  $\{A \subset V : |A| = u\}$  à un ensemble fini  $\mathcal{C}$ .

Un *block design équilibré* (BDE) de paramètres  $(v, u, \lambda)$  est un hypergraphe avec  $|V| = v$  sommets, *u-uniforme* et régulier de degré  $r \geq 1$ , tel que toute paire  $\{v_1, v_2\}$  de sommets distincts est contenue dans exactement  $\lambda \geq 1$  arêtes (« blocks »). Un *block design dégénéré* a la même définition, mais avec  $\lambda = 0$ , et la condition additionnelle d'être un hypergraphe régulier. (La régularité peut être déduite de la définition si  $\lambda \geq 1$ .) Un *block design* est *incomplet* si  $u < v$ . Notons  $b$  le nombre  $|\mathcal{A}|$  d'arêtes d'un BDE.

PROPOSITION 2.19 (Inégalité de Fisher<sup>(11)</sup> [F]). — Pour tout *block design équilibré incomplet*,  $b \geq v$ .

Il est aisé de voir que cette inégalité est vraie même pour les designs dégénérés.

Les *blocks designs* admettent une généralisation. Un *design t-(v, u, λ)* est un hypergraphe  $(V, \mathcal{A})$  *u-uniforme* avec  $v = |V|$  sommets tel que tout  $T \subset V$  de taille  $t$  est contenu dans exactement  $\lambda$  arêtes. Ici  $t \geq 2$  et  $\lambda \geq 1$ . Nous écrivons toujours  $b = |\mathcal{A}|$ .

PROPOSITION 2.20 ([RChW]). — Pour tout *design t-(v, u, λ)* et tout  $s \leq \min(t/2, v-u)$ , nous avons  $b \geq \binom{v}{s}$ .

11. Si, R. A. Fisher, le statisticien. Ici *design* vient d'*experimental design*.

## 2.7. Schémas de Johnson

Un *schéma d'association* est une configuration cohérente classique  $(\Gamma, c : \Gamma^2 \rightarrow \mathcal{C})$  telle que  $c(x, y) = c(y, x) \quad \forall x, y \in \Gamma$ . (Il s'agit donc d'un sens du mot *schéma* qui n'a rien à voir avec les *schémas* de la géométrie algébrique.)

Soient  $s \geq 2$  et  $r \geq 2s + 1$ . Un *schéma de Johnson*  $\mathcal{J}(r, s) = (\Gamma, c)$  est donné par

$$\Gamma = \mathcal{S}_s(\Lambda) = \{S \subset \Lambda : |S| = s\}, \quad c(S_1, S_2) = |S_1 \setminus (S_1 \cap S_2)|,$$

où  $\Lambda$  est un ensemble à  $r$  éléments. La relation  $R_i$  est bien sûr l'ensemble

$$R_i = \{(S_1, S_2) : c(S_1, S_2) = i\}.$$

Notons que nous avons défini implicitement un foncteur de la catégorie d'ensembles  $\Lambda$  avec  $|\Lambda| = r$  à la catégorie de schémas de Johnson. Ceci est un foncteur plein ; autrement dit, les seuls automorphismes de  $\mathcal{J}(r, s)$  sont ceux qui sont induits par  $\text{Sym}(\Lambda)$ .

## 2.8. Identification de groupes et de schémas

Il est une chose de démontrer que deux groupes  $G, H$  sont isomorphes, et une autre de construire un isomorphisme  $\phi$  de façon explicite entre eux. Cette dernière tâche implique, au moins, de donner les images  $\phi(g_1), \dots, \phi(g_r)$  de générateurs  $g_1, \dots, g_r$  de  $G$ .

Voyons un cas particulier qui nous sera crucial. Nous aurons un groupe de permutation  $G < \text{Sym}(\Gamma)$ , et nous saurons qu'il est isomorphe au groupe abstrait  $\text{Alt}_m$ . Comment construire un isomorphisme ?

Si  $m$  n'est pas trop petit en relation à  $n = |\Gamma|$ , il est connu que  $G$  doit être isomorphe à un groupe de permutation de la forme  $\text{Alt}_m^{(k)}$ , qui n'est autre que le groupe  $\text{Alt}_m$  agissant sur l'ensemble  $\mathcal{S}_k(\Lambda_0) = \{S \subset \Lambda_0 : |S| = k\}$  à  $\binom{m}{k}$  éléments, où  $\Lambda_0$  est un ensemble à  $m$  éléments.<sup>(12)</sup> En d'autres termes, il existe une bijection  $\iota_0 : \Gamma \rightarrow \mathcal{S}_k(\Lambda_0)$  et un isomorphisme  $\phi_0 : G \rightarrow \text{Alt}(\Lambda_0)$  tels que

$$\iota_0(\omega^g) = \iota_0(\omega)^{\phi_0(g)}.$$

Le problème consiste à construire  $\iota : \Gamma \rightarrow \mathcal{S}_k(\Lambda)$  et  $\phi : G \rightarrow \text{Alt}(\Lambda)$ , calculables en temps polynomial, avec ces mêmes propriétés.

Nous suivons [BLS]. Soient  $\Upsilon \subset \Gamma \times \Gamma$  l'orbitale la plus petite de  $G$  (hors la diagonale  $(\{\omega, \omega\} : \omega \in \Gamma)$ ); soit  $\Delta \subset \Gamma \times \Gamma$  l'orbitale la plus grande. Nous supposons que  $k \leq m/3$ , ce qui revient à dire que  $n$  n'est pas trop grand en relation à  $m$ . Alors,

$$\phi(\Upsilon) = R_1 = \{(S_1, S_2) \in \mathcal{S}_k(\Lambda_0) : |S_1 \cap S_2| = k - 1\},$$

$$\phi(\Delta) = R_k = \{(S_1, S_2) \in \mathcal{S}_k(\Lambda_0) : S_1 \cap S_2 = \emptyset\}.$$

Définissons, pour  $(x, y) \in \Upsilon$ ,

$$B(x, y) = \{z \in \Gamma : (x, z) \notin \Delta, (y, z) \in \Delta\}.$$

12. Babai nomme les groupes  $\text{Alt}_m^{(k)}$  *groupes de Johnson*, par analogie avec les schémas de Johnson. Puisque  $\text{Alt}_m^{(k)}$  n'est qu'un déguisement de  $\text{Alt}_m$ , ne faudrait-il pas appeler ce dernier *groupe de Ramerrez* ?

Ceci est l'ensemble de tous les  $z$  tels que  $\iota_0(z)$  intersecte  $\iota_0(x)$  mais pas  $\iota_0(y)$ . Soit

$$C(x, y) = \Gamma \setminus \bigcup_{z \in B(x, y)} \{r : (z, r) \in \Delta(z)\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} & \iota_0(C(x, y)) \\ &= \{S \in \mathcal{S}_k(\Lambda_0) : S \cap S' \neq \emptyset \ \forall S' \in \mathcal{S}_k(\Lambda_0) \text{ t.q. } S' \cap \iota_0(x) \neq \emptyset, S' \cap \iota_0(y) = \emptyset\} \\ &= \{S \in \mathcal{S}_k(\Lambda_0) : i \in S\}, \end{aligned}$$

où  $i$  est l'élément de  $\iota_0(x)$  qui n'est pas dans  $\iota_0(y)$ .

Soit  $\Lambda$  la collection  $\{C(x, y) : (x, y) \in \Upsilon\}$ , sans multiplicités. Nous pouvons calculer et comparer  $C(x, y)$  pour  $(x, y)$  donné, et calculer et indexer  $\Lambda$ , tout en temps polynomial. Nous calculons, aussi en temps polynomial, l'action de  $G$  sur  $\Lambda$  induite par l'action de  $G$  sur  $\Upsilon$ . Ceci définit  $\phi : G \rightarrow \text{Alt}(\Lambda)$ .

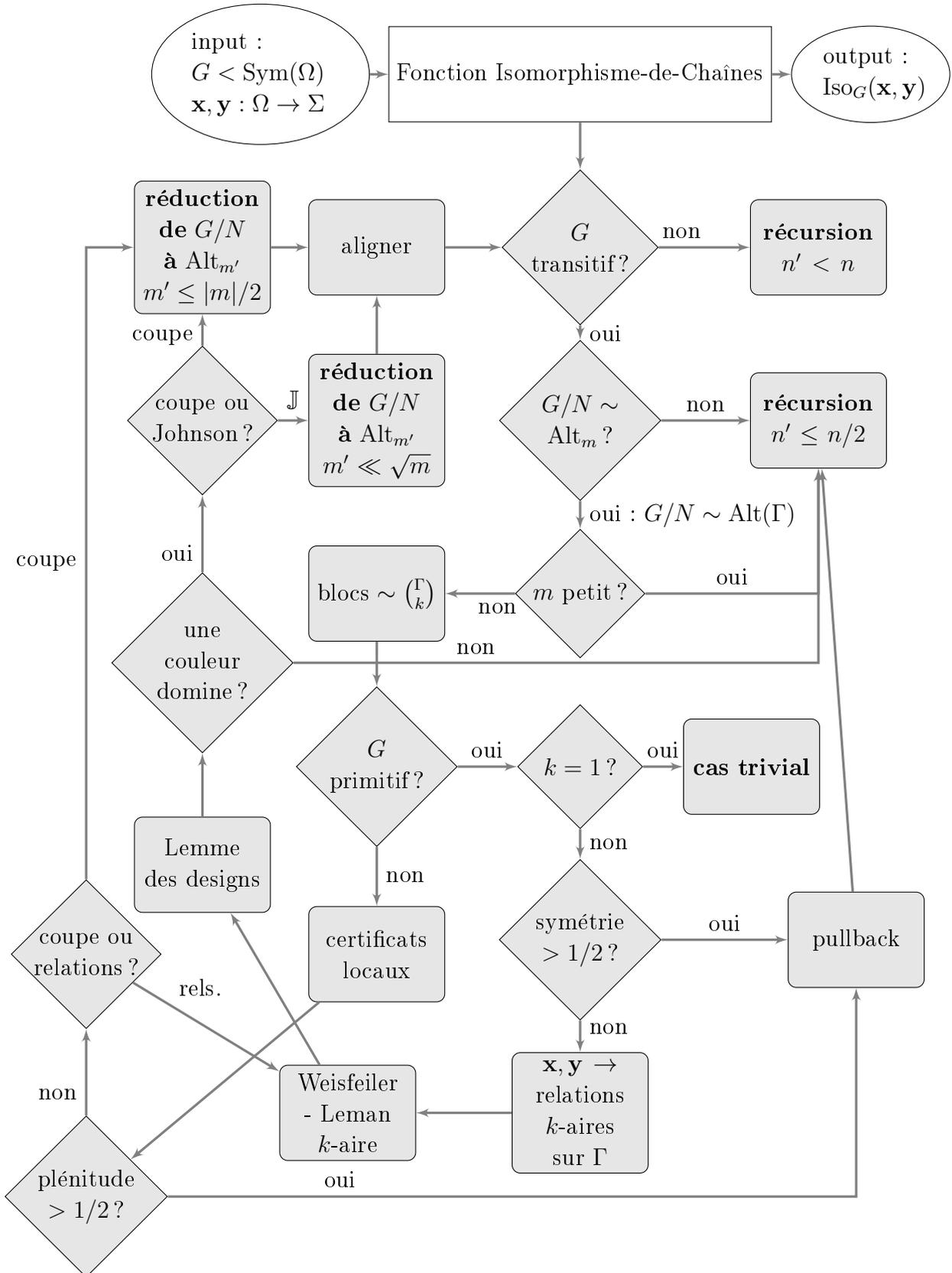
Il y a une bijection naturelle  $j : \Lambda \rightarrow \Lambda_0$  qui commute avec l'action de  $G$  : elle envoie  $C(x, y)$  à  $i$ , où  $i$  est l'élément de  $\Lambda_0$  tel que  $\iota_0(C(x, y)) = \{S \in \mathcal{S}_k(\Lambda_0) : i \in S\}$ . Il est clair que, pour  $\omega \in \Gamma$ ,  $\omega \in C(x, y)$  ssi  $j(C(x, y)) \in \iota_0(\omega)$ . Ainsi, nous obtenons la bijection  $\iota : \Gamma \rightarrow \mathcal{S}_k(\Lambda)$ , donnée par

$$\iota(\omega) = \{\gamma \in \Lambda : \omega \in \gamma\}.$$

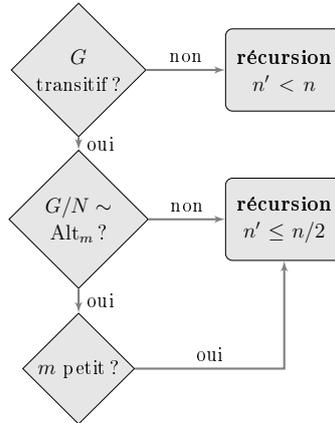
Celle-ci satisfait  $\iota(\omega^g) = \iota(\omega)^{\phi(g)}$ .

Les applications  $\phi, \iota$  sont donc celles que nous désirions ; nous avons construit un isomorphisme explicite entre  $G$  et  $\text{Alt}(\Lambda)$ . Notons que cette même procédure nous permet de construire un isomorphisme explicite entre, d'un côté, un schéma d'association (§2.7) qu'on sait être isomorphe à un schéma de Johnson  $\mathcal{J}(m, k)$ , et, de l'autre côté, ce même schéma.

### 3. LA PROCÉDURE PRINCIPALE



### 3.1. Premiers pas : récursion à la façon de Luks



Les premiers pas de la procédure sont ceux de la preuve du Théorème 2.4 (Luks). En particulier, si  $G < \text{Sym}(\Omega)$  n'est pas transitif, nous procédons exactement comme dans le cas non transitif de la preuve du Théorème 2.4. Bien qu'il soit possible que  $n = |\Omega|$  ne décroisse que très légèrement, la récursion marche, puisque son coût est aussi très léger dans ce cas : nous n'avons qu'à subdiviser le problème selon les orbites de  $G$ .

Supposons que  $G$  soit transitif. Nous savons que nous pouvons trouver rapidement un système de blocs minimal  $R = \{B_i : 1 \leq i \leq r\}$ ,  $B_i \subset \Omega$  (§2.1.2). Par Schreier-Sims, nous trouvons aussi, en temps polynomial, le sous-groupe  $N \triangleleft G$  des éléments  $g \in G$  tels que  $B_i^g = B_i$  pour tout  $i$ . Le groupe  $H = G/N$  agit sur  $R$ .

Au lieu du Théorème 2.3 [BCP], nous utiliserons une conséquence de la Classification des Groupes Finis Simples (CGFS). Elle a été dérivée pour la première fois par Cameron, puis raffinée par Maróti.

**THÉOREME 3.1** ([Cam], [Ma]). — *Soit  $H < \text{Sym}(R)$  un groupe primitif, où  $|R| = r$  est plus grand qu'une constante absolue. Alors, soit<sup>(13)</sup>*

- (a)  $|H| < r^{1+\log_2 r}$ , soit
- (b) il y a un  $M \triangleleft H$  tel que  $R$  se subdivise<sup>(14)</sup> en un système de  $\binom{m}{k}$  blocs sur lequel  $M$  agit comme un groupe  $\text{Alt}_m^{(k)}$ ,  $m \geq 5$ . En plus,  $[H : M] \leq r$ .

La borne  $[H : M] \leq r$  se déduit de  $m > 2$ ,  $|H| \geq r^{1+\log_2 r}$ ,  $|H| \leq m!^s s!$ ,  $m^s \leq r$  et  $[H : M] \leq 2^s s!$ , où  $s \geq 1$  est un paramètre dans Cameron-Maróti.

Il est possible [BLS] de trouver en temps polynomial le sous-groupe normal  $M$  et les blocs de l'action de  $M$ . Nous avons déjà vu au §2.8 comment identifier explicitement l'action de  $M$  avec celle de  $\text{Alt}_m^{(k)}$ .

Par ailleurs, l'algorithme de Schreier-Sims nous permet de calculer  $|H|$  en temps polynomial, et donc nous dit aussi si nous sommes dans le cas (a). Si c'est le cas, nous

13. Pour nous,  $\log_2$  désigne le logarithme en base 2, et non pas le logarithme itéré  $\log \log$ .

14. L'énoncé dans [Cam], [Ma] est plus fort : il décrit toute l'action de  $H$  sur  $R$ . À vrai dire, le groupe  $M$  est isomorphe, en tant que groupe de permutation, à  $(\text{Alt}_m^{(k)})^s$ ,  $s \geq 1$ . Nous avons  $r = \binom{m}{k}^s$ .

procédons comme dans le cas transitif de la preuve du Théorème 2.4. Nous réduisons ainsi le problème à  $r^{1+\log_2 r}$  instances du problème pour des chaînes de longueur  $\leq n/r$ .

Si nous sommes dans le cas (b) nous commençons toujours par réduire le problème à  $[H : M]$  instances du problème avec  $M$  à la place de  $H$  : par l'équation (2) et comme dans l'équation (4),

$$\text{Iso}_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bigcup_{\sigma \in S} \text{Iso}_M(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{\sigma^{-1}}) \sigma,$$

où  $S$  est un système de représentants des classes de  $M$  dans  $H$ .

Si  $m \leq C \log n$ , où  $C$  est une constante,

$$|M| = \frac{m!}{2} < m^m \leq m^{C \log n} \leq (m')^{C \log n},$$

où  $m' = \binom{m}{k}$ . Donc, ici comme dans le cas (a), nous nous permettons de procéder comme dans le cas transitif de la preuve du Théorème 2.4. Nous obtenons une réduction à  $\leq r \cdot (m')^{C \log n} = (m')^{O(\log n)}$  instances du problème pour des chaînes de longueur  $n/m'$ . Ceci est tout à fait consistant avec l'objectif d'avoir une solution en temps quasi-polynomial en  $n$  (ou même en temps  $n^{O(\log n)}$ ).

Il reste à savoir que faire si nous sommes dans le cas suivant : il y a un isomorphisme  $\phi : G/N \rightarrow \text{Alt}(\Gamma)$ ,  $|\Gamma| > C \log n$ ,  $C$  une constante. (Ici nous avons déjà (i) remplacé  $G$  par la préimage de  $M$  dans la réduction  $G \rightarrow G/N$ , et, après cela, (ii) remplacé  $N$  par le stabilisateur des blocs dans la partie (b) du Théorème 3.1.) Ce cas nous occupera pour le reste de l'article.

\* \* \*

Babai indique comment enlever la dépendance de CGFS à cette étape. Soient  $G$  et  $N$  comme avant, avec  $G$  transitif. Alors  $G/N$  est un groupe primitif agissant sur l'ensemble de blocs  $R$ .

Si un groupe de permutations sur un ensemble  $R$  est tel que son action sur l'ensemble des paires d'éléments distincts de  $R$  est transitive, le groupe est dit *doublement transitif*. Or, un résultat de Pyber qui ne dépend pas de CGFS [Py2] nous dit qu'un tel groupe est soit  $\text{Alt}(R)$ , soit  $\text{Sym}(R)$ , soit d'ordre  $\leq |R|^{O(\log^2 |R|)}$ .

Si  $G/N$  est  $\text{Alt}(R)$  ou  $\text{Sym}(R)$ , nous sommes dans le cas que nous discuterons d'ici jusqu'à la fin. Si  $G/N$  est doublement transitif, mais n'est égal ni à  $\text{Alt}(R)$  ni à  $\text{Sym}(R)$ , nous pouvons procéder comme dans le cas transitif de la preuve du Théorème 2.4, puisque  $|G/N| \leq r^{O(\log^2 r)}$ ,  $r = |R| \leq n$ . (Babai propose aussi un traitement alternatif, même plus efficace et élémentaire.)

Supposons donc que  $G/N$  n'est pas doublement transitif. Alors la configuration cohérente schurienne (§2.4) qu'elle induit n'est pas une clique. En conséquence, nous pouvons donner cette configuration à la procédure COUPE-OU-JOHNSON (§5.2), et reprendre le fil de l'argument à ce point-là.

## 4. LA STRUCTURE DE L'ACTION DE $\text{Alt}$

### 4.1. Stabilisateurs, orbites et quotients alternants

Nous aurons besoin de plusieurs résultats sur les épimorphismes  $G \rightarrow \text{Alt}_k$ . Ils joueront un rôle crucial dans la méthode des certificats locaux (§6.1). Dans la version originale [Ba], ils ont aussi été utilisés dans le rôle joué par [BLS] dans cet exposé.

LEMME 4.1. — *Soit  $G < \text{Sym}(\Omega)$  primitif. Soit  $\phi : G \rightarrow \text{Alt}_k$  un épimorphisme avec  $k > \max(8, 2 + \log_2 |\Omega|)$ . Alors  $\phi$  est un isomorphisme.*

Prouver ce lemme est à peu près un exercice en théorie des groupes finis ; il faut utiliser [BaPS, Prop. 1.22] pour le cas de socle abélien et la conjecture de Schreier pour le cas de socle non abélien. La conjecture de Schreier est un théorème, mais un théorème dont la preuve dépend, à son tour, de CGFS.

Par contre, Pyber [Py] a donné une preuve du Lemme 4.1 qui n'utilise pas CGFS, avec une condition plus stricte :  $k > \max(C, (\log |\Omega|)^5)$ ,  $C$  constante. La dépendance de CGFS a donc été complètement enlevée de la preuve du théorème principal.

DÉFINITION 4.2. — *Soit  $G < \text{Sym}(\Omega)$ . Soit  $\phi : G \rightarrow \text{Sym}_k$  un homomorphisme dont l'image contient  $\text{Alt}_k$ . Alors  $x \in \Omega$  est dit atteint si  $\phi(G_x)$  ne contient pas  $\text{Alt}_k$ .*

LEMME 4.3. — *Soit  $G < \text{Sym}(\Omega)$ . Soit  $\phi : G \rightarrow \text{Alt}_k$  un épimorphisme avec  $k > \max(8, 2 + \log_2 n_0)$ , où  $n_0$  est la taille de la plus grande orbite de  $G$ .*

(a) *Si  $G$  est transitif, tout  $x \in \Omega$  est atteint.*

(b) *Au moins un  $x \in \Omega$  est atteint.*

PREUVE (ESQUISSE) — (a) Ceci découle immédiatement du Lemme 4.1 si  $G$  est primitif, ou si  $K < \ker(\phi)$  pour  $K$  le stabilisateur d'un système de blocs minimal. Il reste le cas de  $\phi : K \rightarrow \text{Alt}_k$  surjectif. En général :

LEMME. — Pour  $K_i$  arbitraires,  $K < K_1 \times \cdots \times K_s$  et un épimorphisme  $\phi : K \rightarrow S$ ,  $S$  simple, il doit y avoir un  $i$  tel que  $\phi$  se factorise comme suit :  
 $K \rightarrow K_i \xrightarrow{\psi} S$ ,  $\psi$  un épimorphisme.

En utilisant ce lemme pour les restrictions  $K_i$  de  $K$  aux orbites de  $K$ , nous passons à une orbite  $K_i$ , et procédons par induction.

(b) Soient  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$  les orbites de  $G$ , et soit  $G_i = G|_{\Omega_i}$  la restriction de  $G$  à  $\Omega_i$ . Par le Lemme en (a), il doit y avoir un  $i$  tel que  $\phi$  se factorise en  $G \rightarrow G_i \xrightarrow{\psi} \text{Alt}_k$ ,  $\psi$  un épimorphisme. Alors, par (a),  $(G_x)^\psi = ((G_i)_x)^\psi \neq \text{Alt}_k$  pour tout  $x \in \Omega_i$ .  $\square$

La proposition suivante jouera un rôle crucial au §6.

PROPOSITION 4.4. — *Soient  $G < \text{Sym}(\Omega)$  transitif et  $\phi : G \rightarrow \text{Alt}_k$  un épimorphisme. Soit  $U \subset \Omega$  l'ensemble des éléments non atteints.*

(a) *Supposons que  $k \geq \max(8, 2 + \log_2 n_0)$ , où  $n_0$  est la taille de la plus grande orbite de  $G$ . Alors  $(G_{(U)})^\phi = \text{Alt}_k$ .*

(b) Supposons que  $k \geq 5$ . Si  $\Delta$  est une orbite de  $G$  qui contient des éléments atteints, alors chaque orbite de  $\ker(\phi)$  contenue dans  $\Delta$  est de longueur  $\leq |\Delta|/k$ .

Rappelons que  $G_{(U)} = \{g \in G : x^g = x \ \forall x \in U\}$  (stabilisateur de points).

PREUVE — (a) Il est facile de voir que  $G$  fixe  $U$  en tant qu'ensemble. Alors,  $G_{(U)} \triangleleft G$ , et donc  $(G_{(U)})^\phi \triangleleft G^\phi$ . Or,  $G^\phi = \text{Alt}_k$ . Supposons que  $(G_{(U)})^\phi = \{e\}$ . Alors  $\phi$  se factorise comme suit :

$$G \rightarrow G|_U \xrightarrow{\psi} \text{Alt}_k,$$

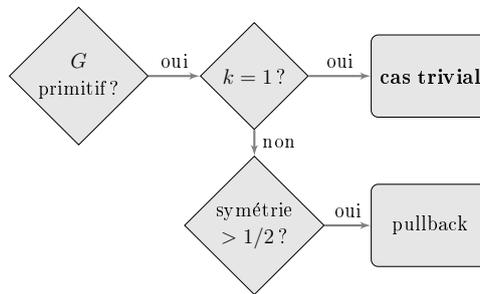
puisque  $G_{(U)}$  est le noyau de  $G \rightarrow G|_U$ . Ici  $\psi$  est un épimorphisme, et donc, par le Lemme 4.3 (b), il existe un  $x \in U$  tel que  $((G|_U)_x)^\psi \neq \text{Alt}_k$ . Or  $((G|_U)_x)^\psi = (G_x)^\phi = \text{Alt}_k$ , parce que  $x$  est dans  $U$ , c'est-à-dire non atteint. Contradiction.

(b) Comme  $\Delta$  contient des éléments atteints et est une orbite de  $G$ , tout élément de  $\Delta$  est atteint. Soit  $N = \ker(\phi)$ ,  $x \in \Delta$ . La longueur de l'orbite  $x^N$  est

$$\begin{aligned} |x^N| &= [N : N_x] = [N : (N \cap G_x)] = [NG_x : G_x] = \frac{[G : G_x]}{[G : NG_x]} \\ &= \frac{|\Delta|}{[G^\phi : (G_x)^\phi]} = \frac{|\Delta|}{[\text{Alt}_k : (G_x)^\phi]}. \end{aligned}$$

Or, tout sous-groupe propre de  $\text{Alt}_k$  est d'indice  $\geq k$ . Donc  $|x^N| \leq |\Delta|/k$ . □

#### 4.2. Le cas de grande symétrie



Considérons le cas de  $G$  primitif. Nous pouvons supposer que  $G$  est isomorphe en tant que groupe de permutation à  $\text{Alt}_m^{(k)}$ , puisque nous avons déjà éliminé les autres cas au §3 (peut-être en passant à un groupe non primitif  $M$ ; le cas non primitif sera traité au §6). Comme nous l'avons vu au §2.8, nous pouvons construire une bijection  $\iota$  entre  $\Omega$  et l'ensemble  $\mathcal{S}_k(\Gamma)$  des sous-ensembles avec  $k$  éléments d'un ensemble  $\Gamma$ . Cette bijection induit un isomorphisme  $\phi : G \rightarrow \text{Alt}(\Gamma)$ .

Si  $k = 1$ , alors  $\Omega$  est en bijection avec  $\Gamma$ , et  $G \sim \text{Alt}_n = \text{Alt}_m$ . Nous sommes donc dans le cas trivial : le groupe  $\text{Aut}_G(\mathbf{x})$  consiste en les éléments de  $\text{Alt}_n$  qui permutent les lettres de  $\mathbf{x}$  de la même couleur, et  $\text{Iso}_G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est non vide ssi  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  ont exactement le même nombre de lettres de chaque couleur – où, si aucune lettre n'est répétée ni en  $\mathbf{x}$  ni en  $\mathbf{y}$ , nous ajoutons la condition que la permutation de  $\{1, \dots, n\}$  qui induit  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$  soit dans  $\text{Alt}_n$ .

Alors, soit  $G$  primitif,  $k > 1$ .

Deux éléments  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$  sont des *jumeaux* par rapport à un objet si la transposition  $(\gamma_1\gamma_2)$  le laisse invariant. Il est clair que les jumeaux forment des classes d'équivalence, et que, pour toute telle classe d'équivalence  $C$ , tout  $\text{Sym}(C)$  laisse l'objet invariant. Notre objet sera la chaîne  $\mathbf{x}$  (ou  $\mathbf{y}$ ) :  $\gamma_1, \gamma_2$  sont des jumeaux par rapport à  $\mathbf{x}$  si, pour tout  $i \in \Omega$ ,  $\mathbf{x}(i) = \mathbf{x}(\tau^{\phi^{-1}}(i))$ , où  $\tau = (\gamma_1\gamma_2)$ .

Nous pouvons donc déterminer facilement (et en temps polynomial) les classes d'équivalence en  $\Gamma$  (dites *classes de jumeaux*), et vérifier s'il y a une classe d'équivalence  $C$  de taille  $> |\Gamma|/2$ . Examinons cette possibilité puisque nous devons l'exclure après.

La classe  $C$  de taille  $> |\Gamma|/2$  est évidemment unique et donc canonique. Si  $\mathbf{x}$  a une telle classe et  $\mathbf{y}$  ne l'a pas, ou si les deux ont de telles classes, mais de tailles différentes, alors  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  ne sont pas isomorphes.

Si  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  ont des classes de jumeaux  $C_{\mathbf{x}}, C_{\mathbf{y}}$  de la même taille  $> |\Gamma|/2$ , nous choisissons  $\sigma \in \text{Alt}(\Gamma)$  tel que  $C_{\mathbf{x}} = (C_{\mathbf{y}})^{\sigma}$ . (Nous supposons  $m > 1$ .) En remplaçant  $\mathbf{y}$  par  $\mathbf{y}^{\sigma'}$ , où  $\sigma' = \phi^{-1}(\sigma^{-1})$ , nous réduisons notre problème au cas  $C_{\mathbf{x}} = C_{\mathbf{y}}$ . (Voilà l'exemple le plus simple de ce que Babai appelle *aligner*; nous avons *aligné*  $C_{\mathbf{x}}$  et  $C_{\mathbf{y}}$ .)

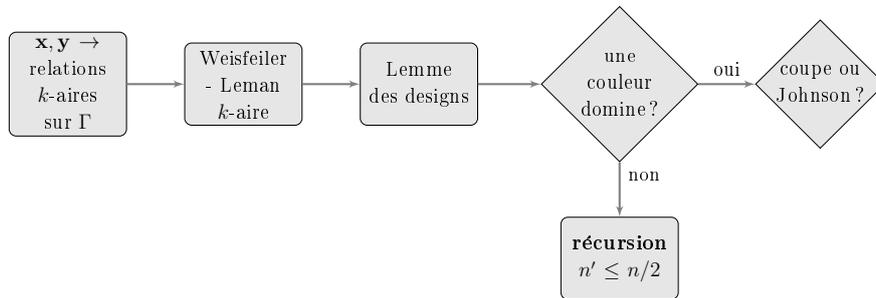
Alors, soit  $C = C_{\mathbf{x}} = C_{\mathbf{y}}$ . La partition  $\{C, \Gamma \setminus C\}$  de  $\Gamma$  induit une partition  $\{\Omega_j\}_{0 \leq j \leq k}$  de  $\Omega$  :  $\omega \in \Omega_j$  ssi  $\psi(\omega)$  contient  $k - j$  éléments de  $C$  et  $j$  éléments de  $\Gamma \setminus C$ . Il est aisé de montrer que  $\alpha^{k-j}(1 - \alpha)^j \binom{k}{j} < 1/2$  pour  $\alpha \in (1/2, 1]$ ,  $1 \leq j \leq k$ ; donc,  $|\Omega_j| < n/2$  pour  $1 \leq j \leq k$ .

Nous avons réduit notre problème à celui de déterminer  $\text{Iso}_H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , où  $H = \phi^{-1}(\text{Alt}(\Gamma)_C)$ . Ici le besoin de prendre un stabilisateur d'ensemble (à savoir,  $\text{Alt}(\Gamma)_C$ ) ne pose aucun souci : nous engendrons  $H$  en prenant des préimages  $\phi^{-1}(h_1), \dots, \phi^{-1}(h_5)$  de deux générateurs  $h_1, h_2$  de  $\text{Alt}(C) < \text{Alt}(\Gamma)$ , deux générateurs  $h_3, h_4$  de  $\text{Alt}(\Gamma \setminus C) < \text{Alt}(\Gamma)$  et un élément  $h_5 \in \text{Alt}(\Gamma)$  de la forme  $(\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3\gamma_4)$ , où  $\gamma_1, \gamma_2 \in C$ ,  $\gamma_3, \gamma_4 \in \Gamma \setminus C$ . (Si  $|\Gamma| < 8$ , le nombre de générateurs est moindre, et la discussion se simplifie.) Notre problème se réduit à celui de déterminer  $\text{Iso}_{H'}(\mathbf{x}, \mathbf{y}')$  pour  $\mathbf{y}' = \mathbf{y}$  et  $\mathbf{y}' = \mathbf{y}^{h_5}$ , où  $H' = \phi^{-1}(\text{Alt}(C) \times \text{Alt}(\Gamma \setminus C)) = \phi^{-1}(\langle h_1, \dots, h_4 \rangle)$ .

Comme  $C$  est une classe de jumeaux pour  $\mathbf{x}$ , tout élément de  $\phi^{-1}(\text{Alt}(C))$  laisse  $\mathbf{x}$  invariant. Si  $\mathbf{x}|_{\Omega_0} \neq \mathbf{y}|_{\Omega_0}$ , alors  $\text{Iso}_{H'}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \emptyset$ .

Soit alors  $\mathbf{x}|_{\Omega_0} = \mathbf{y}|_{\Omega_0}$ . Nous avons réduit notre problème à celui de déterminer  $\text{Iso}_{H'|_{\Omega'}}(\mathbf{x}|_{\Omega'}, \mathbf{y}|_{\Omega'})$ , où  $\Omega' = \Omega \setminus \Omega_0$ . Rappelons que  $H'|_{\Omega'}$  agit sur  $\Omega'$  avec des orbites de longueur  $|\Omega_i| < n/2$ . Nous procédons donc comme dans le cas non transitif de la méthode de Luks (preuve du Thm. 2.4).

## 5. DES CHAÎNES AUX SCHÉMAS DE JOHNSON



Discutons maintenant le cas de  $G$  primitif et, plus précisément,  $G$  isomorphe à  $\text{Alt}_m^{(k)}$ ,  $k \geq 2$ . Maintenant nous pouvons supposer que nos chaînes  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  n'ont pas de classes de jumeaux de taille  $> m/2$ . Les outils principaux que nous développerons (Lemme des designs, coupe-ou-Johnson) nous seront utiles, voire essentiels, aussi dans le cas de  $G$  imprimitif.

Nous avons une bijection entre les éléments de  $\Omega$  et  $\{S \subset \Gamma : |S| = k\}$ . Pour  $\mathbf{x} : \Omega \rightarrow \Sigma$  donné, nous avons donc une structure relationnelle  $\mathfrak{X} = (\Gamma, (R_i)_{i \in \Sigma})$   $k$ -aire sur  $\Gamma : (x_1, \dots, x_k) \in R_i$  si  $x_1, \dots, x_k$  sont tous différents et  $\mathbf{x}(\omega) = i$ , où  $\omega$  est l'élément de  $\Omega$  qui correspond à  $\{x_1, \dots, x_k\}$ .

Nous appliquons à  $\mathfrak{X}$  le foncteur  $F_1$  (§2.3), qui fait d'elle une structure de partition, puis le foncteur  $F_2$  (§2.4), qui nous donne une configuration  $k$ -aire, et, finalement, le foncteur  $F_3$  défini par Weisfeiler-Leman  $k$ -aire (§2.5). Nous obtenons ainsi un raffinement  $F_3(F_2(F_1(\mathfrak{X}))) = (\Gamma, c_{\mathbf{x}} : \Omega^k \rightarrow \mathcal{C})$  qui est une configuration cohérente  $k$ -aire.

Comme  $F_1, F_2, F_3$  sont des foncteurs, l'assignation de  $c_{\mathbf{x}}$  à  $\mathbf{x}$  est canonique. Elle nous sera donc utile : si  $c_{\mathbf{x}}$  et  $c_{\mathbf{y}}$  ne sont pas isomorphes sous l'action de  $\text{Alt}_m$ , alors  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  ne sont pas isomorphes sous l'action de  $\text{Alt}_m^{(k)}$  non plus.

Nous obtiendrons une configuration cohérente classique de façon canonique à partir de  $c_{\mathbf{x}}$  (Lemme des *designs*). Soit cette nouvelle configuration sera non triviale, soit nous obtiendrons un coloriage canonique sans couleur dominante, ce qui nous permettra immédiatement de réduire le problème à un certain nombre de problèmes pour des chaînes plus courtes, comme dans l'algorithme de Luks.

Supposons, alors, que nous disposons d'une configuration cohérente classique non triviale assignée de façon canonique à  $\mathbf{x}$ . La procédure COUPE-OU-JOHNSON nous donnera l'un ou l'autre de ces deux résultats : soit un *découpage* canonique de  $\Gamma$ , soit un *schéma de Johnson* plongé de façon canonique dans  $\Gamma$ . Dans un cas comme dans l'autre, avoir une telle structure canonique limite fortement l'ensemble d'isomorphismes et automorphismes possibles. Nous pourrions réduire  $G$  à un sous-groupe  $\sim \text{Alt}_{m'}$ , avec  $m' \leq m/2$ , dans le cas du découpage, ou  $m' \ll \sqrt{m}$ , dans le cas de Johnson. Déjà  $m' \leq m/2$  est suffisante pour une récursion réussie.

### 5.1. Lemme des designs

Étant donné une configuration  $\mathfrak{X} = (\Gamma, c : \Gamma^k \rightarrow \mathcal{C})$  et un paramètre  $1/2 \leq \alpha < 1$ , une couleur  $i$  est dite *dominante* si  $c(\gamma, \dots, \gamma) = i$  pour  $\geq \alpha|\Gamma|$  valeurs de  $\gamma \in \Gamma$ . La classe de couleurs  $\{\gamma \in \Gamma : c(\gamma, \dots, \gamma) = i\}$  est, elle aussi, dite *dominante*, et le coloriage est dit un  $\alpha$ -coloriage.

Comme avant, deux éléments  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$  sont des *jumeaux* par rapport à une structure  $\mathfrak{X}$  (ici, une configuration cohérente sur  $\Gamma$ ) si  $(\gamma_1\gamma_2) \in \text{Aut}(\mathfrak{X})$ .

PROPOSITION 5.1 (Lemme des designs). — Soit  $\mathfrak{X} = (\Gamma, c : \Gamma^k \rightarrow \mathcal{C})$  une configuration cohérente  $k$ -aire, où  $2 \leq k \leq |\Gamma|/2$ . Soit  $1/2 \leq \alpha < 1$ . Supposons qu'il n'y a aucune classe de jumeaux dans  $\Gamma$  avec  $> \alpha|\Gamma|$  éléments.

Alors, au moins une des options suivantes est vraie :

- (a) il existe  $x_1, \dots, x_\ell \in \Gamma$ ,  $0 \leq \ell < k$ , tels que  $\mathfrak{X}_{\bar{x}}^{(1)}$  n'a pas de couleur dominante ;
- (b) il existe  $x_1, \dots, x_\ell \in \Gamma$ ,  $0 \leq \ell < k - 1$ , tels que  $\mathfrak{X}_{\bar{x}}^{(1)}$  a une couleur dominante  $C$  et  $(\mathfrak{X}_{\bar{x}})^{(2)}[C]$  n'est pas une clique.

La notation a été définie dans les sections 2.3 – 2.4 . En particulier, le 1-squelette  $\mathfrak{X}_{\bar{x}}^{(1)}$  est tout simplement un coloriage de  $\Gamma$ .

LEMME 5.2 (Lemme de la grande clique). — Soit  $\mathfrak{X} = (\Gamma, c)$  une configuration cohérente classique. Soit  $C \subset \Gamma$  une classe de couleurs avec  $|C| \geq |\Gamma|/2$ . Si  $\mathfrak{X}[C]$  est une clique, alors  $C$  est une classe de jumeaux.

PREUVE — Supposons que  $C$  n'est pas une classe de jumeaux. Il y a donc un  $x \in \Gamma$  et une couleur (disons, *azur*) telle que  $c(x, y)$  est de cette couleur pour au moins un  $y \in C$  mais pas pour tous. Comme  $\mathfrak{X}[C]$  est une clique,  $x \notin C$ . Appelons la couleur de  $C$  *carmin*, et celle de  $x$  *bronze*. Soit  $B \subset \Gamma$  l'ensemble des éléments de couleur bronze.

Il s'agit de construire un block design équilibré (§2.6) qui contredise l'inégalité de Fisher (Prop. 2.19). Définissons  $A_b = \{y \in \Gamma : c(by) = \text{azur}\}$  pour  $b \in B$ . Comme  $x \in B$  et  $c(xy) = \text{azur}$  pour au moins un  $y \in C$ , et  $c(xy)$  connaît la couleur de  $y$ , tous les éléments de  $A_b$  sont carmin.

Par la cohérence de  $\mathfrak{X}$  et la définition des nombres d'intersection (Def. 2.8),

$$|A_b| = \gamma(\text{azur}, \text{azur}^{-1}, \text{bronze}),$$

et donc  $|A_b|$  ne dépend pas de  $b$ . Comme nous l'avons dit au début,  $1 \leq |A_x| < |C|$ ; donc,  $1 \leq |A_b| < C$  pour tout  $b \in B$ .

Montrez de façon similaire que, pour  $v \in C$ , la taille de  $\{b \in B : v \in A_b\} = \{b \in B : c(bv) = \text{azur}\}$  ne dépend pas de  $b$ . Comme  $\mathfrak{X}[C]$  est une clique,  $c(v, v')$  est de la même couleur pour tous  $v, v' \in C$ ,  $v = v'$ ; appelons cette couleur *doré*. Montrez que

$$\{b \in B : v, v' \in A_b\} = \gamma(\text{azur}, \text{azur}^{-1}, \text{doré}).$$

Alors  $(C, \{A_b\}_{b \in B})$  est un block design équilibré incomplet.

En conséquence, par l'inégalité de Fisher,  $|B| \geq |C|$ . Or, nous savons que  $|C| > |\Gamma|/2$ ,  $B, C \subset \Gamma$  et  $B \cap C = \emptyset$ . Contradiction.  $\square$

PREUVE DU LEMME DES DESIGNS (Prop. 5.1) — Supposons que pour chaque  $\vec{x} \in \Omega^\ell$ ,  $0 \leq \ell < k$ ,  $C_{\vec{x}}$  a une couleur dominante  $C(\vec{x})$ , et, en plus, si  $\ell < k - 1$ ,  $(\mathfrak{X}_{\vec{x}})^{(2)}[C]$  est une clique. Nous arriverons à une contradiction.

Soit  $C = C(\text{vide})$ . Comme  $|C| > \alpha|\Gamma|$ ,  $C$  est trop grande pour être un ensemble de jumeaux. Donc il existe  $u, v \in C$ ,  $u \neq v$ , tels que  $\tau = (uv) \notin \text{Aut}(\mathfrak{X})$ . Soit  $\vec{y}$  de longueur minimale  $r$  entre les chaînes satisfaisant  $c(\vec{y}^\tau) \neq c(\vec{y})$ . Par cette minimalité et les règles dans la définition 2.5,  $y_1, \dots, y_r$  sont tous distincts. En les permutant, nous pouvons assurer que  $u, v \notin \{y_1, y_2, \dots, y_{r-2}\}$ , et, sans perte de généralité, que soit (i)  $y_{r-1} \neq u, v$ ,  $y_r = u$ , soit (ii)  $y_{r-1} = u$ ,  $y_r = v$ . Dans le cas (i), nous choisissons  $\vec{x} = y_1, \dots, y_{r-1}$ ,  $\ell = r - 1$ , et voyons que  $c_{\vec{x}}(u) \neq c_{\vec{x}}(v)$ ; dans le cas (ii), nous choisissons  $\vec{x} = y_1, \dots, y_{r-2}$ ,  $\ell = r - 2$ , et obtenons  $c_{\vec{x}}(u, v) \neq c_{\vec{x}}(v, u)$ . Nous aurons donc une contradiction avec notre supposition une fois que nous aurons prouvé que  $u, v \in C(\vec{x})$ .

Le fait que  $u, v \in C(\vec{x})$  s'ensuivra immédiatement de l'égalité  $C(\vec{x}) = C \setminus \{x_1, \dots, x_\ell\}$ ; cette égalité, à son tour, se déduit par itération du fait que, pour  $\vec{y}$  de longueur  $\leq k - 2$  et  $\vec{x} = \vec{y}z$ ,  $z \in \Omega$ ,

$$(5) \quad C(\vec{x}) = C(\vec{y}) \setminus \{z\}.$$

Pourquoi (5) est-il vrai? Nous sommes en train de supposer que  $\mathfrak{X}_{\vec{y}}^{(2)}[C(\vec{y})]$  est une clique, et que  $|C(\vec{y})| > \alpha|\Gamma| \geq |\Gamma|/2$ . Donc, par le lemme de la grande clique, tous les éléments de  $C(\vec{y})$  sont des jumeaux en  $\mathfrak{X}_{\vec{y}}^{(2)}$ . En particulier, pour  $u \in C(\vec{y}) \setminus \{z\}$ ,  $c_{\vec{x}}(u) = c_{\vec{y}}(zu)$  ne dépend pas de  $u$ . Puisque le coloriage de sommets en  $C_{\vec{x}}$  est un raffinement de celui en  $C_{\vec{y}}$  (par la deuxième règle de la définition 2.5), il s'ensuit que, soit  $C(\vec{x}) = C(\vec{y}) \setminus \{z\}$ , soit  $C(\vec{x}) \subset \Gamma \setminus C(\vec{y})$ , soit  $C(\vec{x}) = \{z\}$ . Comme  $|C(\vec{x})|, |C(\vec{y})| > \alpha|\Gamma| \geq |\Gamma|/2$ , les deux dernières possibilités sont exclues.  $\square$

Nous appliquons le Lemme des designs (avec  $\alpha = 1/2$ ) à la configuration cohérente  $k$ -aire  $\mathfrak{X}' = F_3(F_2(F_1(\mathfrak{X})))$ , où  $\mathfrak{X}$  est donnée par  $\mathbf{x}$  de la façon décrite au début de la section. Nous parcourons tous les tuples possibles  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_\ell) \in \Gamma^\ell$ ,  $0 \leq \ell < k$ , jusqu'à trouver un tuple pour lequel la première ou la deuxième conclusion du Lemme des designs est vraie.

Si la première conclusion est vraie, nous définissons  $c_{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}_{\vec{x}}^{(1)}$  et sautons à la section 5.3.1. Si la deuxième conclusion est vraie, nous passons au §5.2, ayant défini  $\mathfrak{X}'' = \mathfrak{X}_{\vec{x}}^{(2)}[C]$ , où  $C$  est la couleur dominante de  $\mathfrak{X}_{\vec{x}}^{(1)}$ .

## 5.2. Coupe ou Johnson

Nous avons une configuration classique cohérente homogène non triviale  $\mathfrak{X}'' = (\Gamma, c)$ . (Nous rappelons que ceci est un coloriage  $c$  du graphe complet sur  $\Gamma$  tel que (a) les sommets ont leur couleur propre (« couleur diagonale »), (b) les arêtes  $(x, y)$ ,  $x \neq y$ , ne sont pas toutes de la même couleur, (c) la couleur  $c(x, y)$  de l'arête  $(x, y)$  détermine  $c(y, x)$ , et (d) l'axiome de cohérence (2.8) se vérifie.) Nous voudrions trouver des structures qui dépendent canoniquement de  $\mathfrak{X}''$  et qui contraignent son groupe d'automorphismes.

Il est raisonnable de s'attendre à ce que de telles structures existent : par le Théorème 3.1, si le groupe d'automorphismes est transitif, soit il est imprimitif (et donc il laisse une partition invariante), soit il est près d'être  $\text{Alt}_m^{(k)}$ ,  $k \geq 2$ , (qui laisse invariant un schéma de Johnson), soit il est petit (et donc le stabilisateur de quelques points aura des orbites petites, et ainsi nous donnera un coloriage sans couleur dominante). Le défi est de trouver de telles structures, et de le faire canoniquement.

Si  $\mathfrak{X}''$  n'est pas primitif (Déf. 2.14), la tâche est plutôt facile : soit  $r$  la couleur non diagonale la plus rouge telle que le graphe  $\mathcal{G}_r = \{(x, y) : x, y \in \Gamma, c(x, y) = r\}$  est connexe ; par l'exercice 2.16, ceci donne une partition de  $\Gamma$  dans des ensembles de la même taille  $\leq |\Gamma|/2$ .

**THÉOREME 5.3** (Coupe ou Johnson). — *Soit  $\mathfrak{X} = (\Gamma, c)$  une configuration classique cohérente uniprimitive. Soit  $2/3 \leq \alpha < 1$ . En temps  $|\Gamma|^{O(1)}$ , nous pouvons trouver*

- soit un  $\alpha$ -découpage de  $\Gamma$ ,
- soit un schéma de Johnson plongé sur  $\Gamma_0 \subset \Gamma$ ,  $|\Gamma_0| \geq \alpha|\Gamma|$ ,

et un sous-groupe  $H < \text{Sym}(\Gamma)$  avec

$$[\text{Sym}(\Gamma) : H] = |\Gamma|^{O(\log |\Gamma|)}$$

tel que le découpage, voire le schéma, est canonique en relation à  $H$ .

Le groupe  $H$  sera défini comme un stabilisateur de points en  $\Gamma$ .

La valeur  $2/3$  dans l'énoncé est assez arbitraire ; toute valeur  $> 1/2$  serait valable.

**PREUVE** — Choisissons un  $x \in \Gamma$  arbitraire. Donnons à chaque  $y \in \Gamma$  la couleur de  $c(x, y)$ . Ce coloriage est canonique en relation à  $G_x$ . S'il n'y a aucune classe de couleur  $C$  de taille  $> \alpha|\Gamma|$ , la partition triviale (non-partition) de chaque classe nous donne un  $\alpha$ -découpage de  $\Gamma$ , et nous avons fini.

Supposons, par contre, qu'il y ait une classe de couleur – disons,  $C_{\text{lin}}$  – de taille  $> \alpha|\Gamma|$ . Comme  $\alpha n > n/2$ , la relation  $R_{\text{lin}}$  de cette couleur est non orientée ( $c(y, z) = \text{lin}$  ssi  $c(z, y) = \text{lin}$ ). Le complément de  $R_{\text{lin}}$  (ou de toute autre relation) est de diamètre 2 (exercice). Soient  $x, z \in \Gamma$  tels que  $c(x, z) = \text{lin}$ , et soit  $y \in \Gamma$  tel que  $c(x, y), c(z, y) \neq \text{lin}$ . Appelons  $c(x, y)$  *bis* et  $c(z, y)$  *terre*.

Considérons le graphe biparti  $(V_1, V_2; A)$  avec sommets  $V_1 = C_{\text{lin}}$ ,  $V_2 = C_{\text{bis}}$  et arêtes  $R_{\text{terre}} \cap (V_1 \times V_2)$ . Le graphe est non vide par définition et semirégulier par l'exercice 2.17b. Par homogénéité et cohérence, le nombre de  $y$  tels que  $c(y, w)$  est d'une couleur donnée  $c_0$  est indépendant de  $w$ . Donc, il est toujours  $\leq (1 - \alpha)n < n/2$  pour  $c_0 \neq \text{lin}$ . Appliquant ceci à  $c_0 = \text{terre}$  et  $V_2$ , nous voyons que le degré  $|\{v_1 \in V_1 : (v_1, v_2) \in A\}|$  est  $< n/2$ , et donc, comme  $|V_1| > n/2$ , le graphe n'est pas complet.

Nous appliquons donc la Proposition 5.7 à  $(V_1, V_2; A)$  avec  $\beta = \alpha|\Gamma|/|V_1|$ . Notons que  $|V_2| \leq \beta|V_1|$ . □

Nous travaillerons donc avec un graphe biparti  $(V_1, V_2; A)$ . La stratégie sera d'essayer, soit de rendre  $V_2$  plus petit (par au moins un facteur constant), soit de trouver des structures en lui. Soit ces structures nous permettront de réduire  $V_2$  quand même, soit

elles nous aideront à découper  $V_1$ , ou à trouver un schéma de Johnson assez grand sur  $V_1$ .

Tout d'abord, nous devons borner la symétrie en  $V_1$ , c'est-à-dire réduire, voire éliminer les jumeaux. Il y a deux raisons à ceci.

- Même si nous découvriions une structure assez riche en  $V_2$ , cela impliquerait peu ou rien sur  $V_1$  si beaucoup d'éléments de  $V_1$  se connectent à  $V_2$  de la même façon.
- Si  $V_2$  est petit, nous colorierons chaque sommet de  $V_1$  par son ensemble de voisins en  $V_2$ . Ceci nous donnera un coloriage canonique en relation à  $G_{(V_2)}$ . Or, dans ce coloriage, deux sommets en  $V_1$  auront la même couleur ssi ils sont des jumeaux ; donc, si aucune classe de jumeaux en  $V_1$  n'a  $> \alpha|V_1|$  éléments, nous aurons un  $\alpha$ -coloriage.

EXERCICE 5.4. — Soit  $(V_1, V_2; A)$  un graphe biparti semirégulier et non trivial. Alors, aucune classe de jumeaux en  $V_1$  n'a plus de  $|V_1|/2$  éléments.

SOLUTION — Nous assurons que  $|A| \leq |V_1||V_2|/2$  en prenant le complément s'il est nécessaire. Soient  $d_2$  le degré des sommets en  $V_2$  et  $S$  une classe de jumeaux en  $V_1$ . Montrez que  $d_2 \geq |S|$ , et donc  $|A| \geq |S||V_2|$ .  $\square$

EXERCICE 5.5. — Soit  $(V_1, V_2; A)$  un graphe biparti sans jumeaux en  $V_1$ . Soient  $V_2 = C_1 \cup C_2$ ,  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ . Montrez que, pour au moins un  $i = 1, 2$ , il n'y a aucune classe de  $\geq |V_1|/2 + 1$  jumeaux en  $V_1$  dans le graphe  $(V_1, C_i; A \cap (V_1 \times C_i))$ .

EXERCICE 5.6. — Soit  $\mathfrak{X} = (\Gamma, c)$  une configuration cohérente. Soient  $C_1, C_2$  deux classes de couleurs en  $\Gamma$ . Soit brun une couleur d'arêtes en  $A \times B$ . Alors, pour  $x, y \in C_1$ , la couleur  $c(x, y)$  détermine si  $x$  et  $y$  sont des jumeaux dans le graphe biparti  $(C_1, C_2; \mathcal{G}_{\text{brun}})$ .

PROPOSITION 5.7 (Coupe ou Johnson biparti, ou « Una partita a poker »)

Soit  $X = (V_1, V_2; A)$  un graphe biparti avec  $|V_2| < \beta|V_1|$ , où  $2/3 \leq \beta < 1$ , et tel qu'aucune classe de jumeaux en  $V_1$  n'ait plus de  $2|V_1|/3$  éléments. Alors, nous pouvons trouver, en temps  $|V_1|^{O(1)}$ ,

- soit un  $\beta$ -découpage de  $V_1$ ,
- soit un schéma de Johnson plongé sur  $V_0 \subset V_1$ ,  $|V_0| \geq \beta|V_1|$ ,

et un sous-groupe  $H < G$ ,  $G = \text{Sym}(V_1) \times \text{Sym}(V_2)$ , avec

$$[G : H] = |V_1|^{O(\log |V_1|)}$$

tel que le découpage, voire le schéma, est canonique en relation à  $H$ .

La condition sur les classes de jumeaux ici était remplie (même avec  $1/2$  à la place de  $2/3$ ) à la fin de la preuve du Thm. 5.3, grâce à l'exercice 5.4.

En ce qui concerne le temps de la procédure, nous expliciterons quelques détails qui pourraient ne pas être évidents. Ce qui sera plus délicat est l'indice  $[G : H]$ . Le groupe  $H$  sera défini comme un stabilisateur de points ; nous devons bien contrôler le nombre de points que nous stabilisons.

PREUVE — Si  $|V_1| \leq c$ , où  $c$  est une constante, nous colorions chaque  $v \in V_1$  par lui-même. Ce coloriage est canonique en relation à  $H = \{e\}$ ; autrement dit, il n'est pas canonique du tout. Peu importe : trivialement,  $|G| \leq (c!)^2 \leq |V_1|^{O(\log |V_1|)}$ . Nous pouvons donc supposer que  $|V_1| > c$ .

Si  $|V_2| \leq (6 \log |V_1|)^{3/2}$  (disons), alors, par la discussion ci-dessus, nous obtenons un  $(2/3)$ -coloriage de  $V_1$  (et donc : un  $(2/3)$ -découpage de  $V_1$ ). Ce coloriage est canonique en relation à un  $H$  d'indice

$$|V_2|! \leq |V_2|^{|V_2|} \leq (6 \log |V_1|)^{\frac{3}{2}(6 \log |V_1|)^{\frac{3}{2}}} \ll |V_1|^{\log |V_1|}.$$

Nous pouvons donc supposer que  $|V_2| > (6 \log |V_1|)^{3/2}$ .

Notre première tâche est d'éliminer les jumeaux. Nous divisons  $V_1$  dans ses classes de jumeaux et colorions chaque  $v \in V_1$  par son nombre de jumeaux et par son degré dans le graphe  $(V_1, V_2; A)$ . Nous obtenons un  $\beta$ -découpage de  $V_1$ , sauf s'il y a un entier  $d_1$  tel que l'ensemble  $V'_1$  des sommets  $v$  sans jumeaux et de degré  $d_1$  est de taille  $|V'_1| > \beta|V_1|$ . Supposons dorénavant que cela est le cas. Comme  $|V'_1| > |V_2|$  et qu'il n'y a pas de jumeaux en  $V'_1$ , nous voyons que  $1 < d_1 < |V_2| - 1$ ; nous pouvons supposer que  $d_1 \leq |V_2|/2$  en remplaçant  $A$  par son complément, si nécessaire.

Soit  $\mathcal{H} = (V_2, \mathcal{A})$  l'hypergraphe dont les arêtes sont les voisinages en  $(V_1, V_2; A)$  des sommets dans  $V'_1$ . (Elles sont toutes contenues en  $V_2$ .) L'hypergraphe est  $d_1$ -uniforme. Comme il n'y a pas de jumeaux dans  $V'_1$ , il n'y a pas d'arêtes identiques. Si  $\mathcal{H}$  est l'hypergraphe complet  $d_1$ -uniforme, alors  $V'_1$  peut être identifié avec le schéma de Johnson  $\mathcal{S}_{d_1}(V_2)$ . (*Scoppia in un pianto angoscioso e abbraccia la testa di Johnson.*)

Supposons alors que  $\mathcal{H}$  n'est pas complet. Nous voudrions avoir un coloriage canonique sur  $V_2^d$  pour un  $d \ll l$ ,  $l = (\log |V'_1|)/\log |V_2|$ , tel que les éléments de  $V_2$  ne soient pas tous jumeaux. Si  $d_1 \leq 6\lceil l \rceil$ , nous définissons  $d = d_1$  et colorions  $\{(v_1, \dots, v_d) \in V_2^d : \{v_1, \dots, v_d\} \in \mathcal{H}\}$  en écarlate, et tout le reste en gris.

Supposons, par contre, que  $d_1 > 6\lceil l \rceil$ . Soit  $d = 6\lceil l \rceil$ . Nous colorions  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_d)$  en gris si les  $v_i$  ne sont pas tous distincts; dans le cas contraire, nous donnons à  $\vec{v}$  la couleur

$$(6) \quad |\{H \in \mathcal{H} : \{v_1, \dots, v_d\} \subset H\}|.$$

Cette opération de coloriage peut être faite en temps de l'ordre de

$$|V_1| \cdot \binom{d_1}{d} \leq |V_1| \cdot |V_2|^d = |V_1| \cdot |V_2|^{6 \left\lceil \frac{\log |V'_1|}{\log |V_2|} \right\rceil} = |V_1| \cdot |V'_1|^{O(1)} = |V_1|^{O(1)}.$$

Si les tuples avec  $v_1, \dots, v_d$  distincts n'avaient pas tous la même couleur  $\lambda$ , nous aurions un design  $d - (|V_2|, d_1, \lambda)$  avec  $|V'_1|$  arêtes. Donc, par la Proposition 2.20,  $|V'_1| \geq \binom{|V_2|}{s}$  pour  $s = 3\lceil l \rceil$ . Comme  $|V_2| \geq (6 \log |V'_1|)^{3/2}$  et  $|V'_1|$  peut être supposé plus grand qu'une constante,

$$\binom{|V_2|}{s} \geq \left(\frac{|V_2|}{s}\right)^s > \left(\frac{|V_2|}{6l}\right)^s > (|V_2|^{1/3})^{3l} = |V_2|^{\frac{\log |V'_1|}{\log |V_2|}} = |V'_1|,$$

ce qui donne une contradiction.

Donc, pour  $d_1$  arbitraire, les tuples avec  $v_1, \dots, v_d$  distincts n'ont pas tous la même couleur ; en d'autres termes, les éléments de  $V_2$  ne sont pas tous jumeaux en relation à notre nouvelle structure  $d$ -aire. S'il y a une classe  $S$  de jumeaux de taille  $> |V_2|/2$ , alors, par l'exercice 5.5, au moins un des deux graphes  $(V'_1, S; A \cap (V'_1 \times S))$ ,  $(V'_1, V_2 \setminus S; A \cap (V'_1 \times (V_2 \setminus S)))$  n'a aucune classe de  $> |V'_1|/2 + 1$  jumeaux dans  $V_1$ . Comme  $2|V'_1|/3 \geq |V'_1|/2 + 1$  pour  $|V_1| \geq 8$ , nous appliquons la Proposition 5.7 elle-même à un de ces deux graphes (disons, celui sur  $V'_1 \times S$  si les deux sont valables), et terminons. (Peut-être que la taille de  $V_2$  est descendue seulement à  $|V_2| - 1$ , mais tous nos choix ont été canoniques – des non-choix, si l'on veut – donc gratuits. Nous n'avons perdu que du temps ; pour être précis,  $|V_1|^{O(1)}$  de temps, ce qui est acceptable.)

Alors, nous avons un coloriage de  $V_2^d$  en relation auquel il n'y a aucune classe de jumeaux en  $V_2$  de taille  $> |V_2|/2$ . Nous appliquons les foncteurs  $F_1, F_2, F_3$  (Weisfeiler-Leman) à ce coloriage. Puis nous utilisons le Lemme des designs (Prop. 5.1) avec  $\alpha = 3/4$  (disons). Nous trouvons les éléments  $x_1, \dots, x_\ell \in V_2$  ( $\ell = d-1$  ou  $\ell = d-2$ ) dans l'énoncé de la Proposition 5.1 par force brute, en temps proportionnel à  $|V_2|^d = |V_1|^{O(1)}$ . Nous les fixons, et nous imposons que  $H$  fixe  $x_1, \dots, x_\ell$ , ce qui a un coût de  $|V_1|^{O(1)}$ , dans le sens où

$$[G : G_{x_1, \dots, x_\ell}] \leq |V_2|^d = |V_1|^{O(1)}.$$

Si nous sommes dans le premier cas du Lemme de designs (pas de couleur dominante), nous cueillons les classes de couleur, en commençant par la plus rouge (interprétez la quantité en (6) comme une longueur d'onde), jusqu'à avoir une union des classes  $S \subset V_2$  avec  $3|V_2|/8 < |S| \leq 3|V_2|/4$ . Nous appliquons l'exercice 5.5, et obtenons un graphe  $(V'_1, V'_2, A \cap (V'_1 \cap V'_2))$  remplissant les conditions de notre Proposition 5.7 avec  $V'_2 = S$  ou  $V'_2 = V_2 \setminus S$ , et donc  $|V'_2| \leq 3|V_2|/4$ . Donc, nous appliquons la Proposition 5.7 à ce graphe ; la récursion marche. (Il est important ici que  $|V'_2| \leq 3|V_2|/4$ , puisque nous avons déjà encouru un coût considérable ( $|V_1|^{O(1)}$ ) dans l'indice.)

Restons donc dans le deuxième cas du Lemme des designs : nous avons un coloriage de  $V_2$  avec une classe de couleurs  $C \subset V_2$  telle que  $|C| \geq 3|V_2|/4$ , et une configuration cohérente homogène classique  $\mathfrak{Y}$  non triviale sur  $C$ .

Nous définissons un graphe avec des sommets  $V'_1 \cup V_2$ , où  $V'_1$  est de couleur nacrée et  $V_2$  vient d'être colorié par le Lemme des Designs ; les arêtes seront non pas seulement celles en  $A \cap (V'_1 \times V_2)$  (coloriées en noir) mais aussi les arêtes entre les éléments de  $V_2$ , dans les couleurs données par  $\mathfrak{Y}$ . Nous appliquons les raffinements  $F_1, F_2$  et  $F_3$  (Weisfeiler-Leman) à ce graphe, et obtenons une configuration cohérente  $\mathfrak{X}$ . Notons  $\mathfrak{X}_i$  sa restriction à  $V_i$ ,  $i = 1, 2$ , et  $\mathfrak{X}_3$  sa restriction à  $V_1 \times V_2$ .

La configuration  $\mathfrak{X}_2$  est un raffinement de  $\mathfrak{Y}$ . Si elle n'a pas de couleur dominante, nous réduisons notre problème à celui pour  $(V'_1, V'_2, A \cap (V'_1 \cap V'_2))$ ,  $|V'_2| \leq 3|V_2|/4$ , comme avant. Supposons donc qu'il y a une classe de couleurs dominantes  $C_2$  dans  $\mathfrak{X}_2$ . Elle doit être un sous-ensemble de  $C$ . La restriction de  $\mathfrak{X}_2$  à  $C_2$  n'est pas une clique : si elle l'était, la restriction de  $\mathfrak{Y}$  à  $C_2$  l'aurait été aussi, et cela est impossible par l'exercice 2.15.

Nous pouvons supposer qu'il existe une classe de couleurs  $C_1 \subset V_1'$  en  $\mathfrak{X}_1$  qui satisfait  $|C_1| > \beta|V_1|$ ; sinon, nous avons un  $\beta$ -coloriage de  $V_1$ , et pouvons finir. Si la restriction  $\mathfrak{X}_1[C_1]$  de  $\mathfrak{X}_1$  à  $C_1$  n'est pas primitive, la plus rouge de ses relations non connexes nous donne un  $\beta$ -découpage canonique de  $V_1$ , par l'exercice 2.16, et nous pouvons finir aussi.

Nous pouvons supposer que la restriction  $\mathfrak{X}'_3$  de  $\mathfrak{X}_3$  à  $C_1 \times C_2$  n'est pas d'une seule couleur. Si elle l'était, il y aurait une classe de  $\geq |C_1| > \beta|V_1| > |V_1|/2 + 1$  jumeaux en  $V_1$  dans le graphe  $(V_1, C_2; A \cap (V_1 \times C_2))$ , dont  $\mathfrak{X}_3[V_1 \times C_2]$  est un raffinement. Dans ce cas, par l'exercice 5.5, nous aurions une réduction à  $(V_1, V_2 \setminus C_2; A \cap (V_1 \times (V_2 \setminus C_2)))$ , et nous pourrions finir.

Soit *pourpre* une couleur d'arêtes dans la restriction de  $\mathfrak{X}_3$  à  $C_1 \times V_2$ . Si  $\mathfrak{X}_1[C_1]$  était une clique, alors, par cohérence, les voisinages dans  $(C_1, V_2; \mathcal{G}_{\text{pourpre}})$  des sommets en  $C_2$  nous donneraient un block design équilibré incomplet sur  $C_1$ . Par l'inégalité de Fisher, nous aurions  $|V_2| \geq |C_1|$ . Or, nous savons que  $|C_1| > \beta|V_1| > |V_2|$ . Donc,  $\mathfrak{X}_1[C_1]$  n'est pas une clique.

Alors, nous avons  $\mathfrak{X}'_1 = \mathfrak{X}_1[C_1]$  uniprimitive,  $\mathfrak{X}'_2 = \mathfrak{X}_2[C_2]$  homogène et non triviale, et  $\mathfrak{X}'_3$  non monochrome. Nous avons deux cas à considérer :  $\mathfrak{X}'_2$  primitive et  $\mathfrak{X}'_2$  imprimitive.

Supposons d'abord que  $\mathfrak{X}'_2$  est imprimitive. La relation non connexe la plus rouge dans  $\mathfrak{X}_2$  nous donne une partition de  $C_2$  dans des ensembles  $B_1, \dots, B_m$ ,  $m \geq 2$ , tous de la même taille  $\geq 2$ . Nous avons donc trouvé une structure en  $V_2$ , et nous l'utiliserons, soit pour découper  $V_1$ , soit pour réduire  $|V_2|$  par un facteur constant. Le premier pas consiste, bien sûr, à éliminer les jumeaux.

Comme notre configuration est cohérente, la couleur d'une arête en  $C_1$  sait si ses sommets sont des jumeaux en relation à  $C_2$  (Ex. 5.6); donc, s'il y avait des jumeaux dans  $C_1$  en relation à  $C_2$ , nous aurions, soit qu'une des couleurs d'arêtes en  $C_1$  donne une relation non connexe – ce qui contredit le fait que  $\mathfrak{X}_1$  est uniprimitive – soit que tous les éléments de  $C_1$  sont des jumeaux en relation en  $C_2$ . Dans ce dernier cas, par l'exercice 5.4,  $\mathfrak{X}_3$  serait monochrome, ce qui n'est pas le cas. En conclusion, il n'y a pas de jumeaux dans  $C_1$  en relation à  $C_2$ .

Notre intention est d'appliquer l'exercice 2.18 pour obtenir un graphe biparti contracté  $Y$ , avec  $V_2$  beaucoup plus petit; nous devons seulement faire attention à ce que ce graphe ne soit pas trivial.

Soit  $d_c$  le degré de tout  $w \in C_2$  dans le graphe biparti  $(C_1, C_2; \mathcal{G}_c)$  pour une couleur  $c$  donnée, où  $\mathcal{G}_c$  consiste en les arêtes de couleur  $c$  dans notre configuration cohérente. (Par l'ex. 2.17a, le degré ne dépend pas de  $w$ .) Si  $d_c \leq |C_1|/2$  pour tout  $c$ , nous fixons un  $w \in C_2$  (non canonique) et obtenons un  $(1/2)$ -coloriage de  $C_1$  (et donc de  $V_1$ ). Supposons donc qu'il y a une couleur – que nous appellerons *violet* – telle que  $d_{\text{violet}} > |C_1|/2$ . S'il y a un  $1 \leq i \leq m$  tel qu'il n'y a aucune classe de plus que  $|C_1|/2$  jumeaux dans  $C_1$  en relation à  $C_2$ , nous fixons un tel  $i$  (non canoniquement) et obtenons ainsi une réduction à  $(C_1, B_i; G_{\text{violet}} \cap (C_1 \times B_i))$ , avec  $\beta|V_1|/|C_1|$  à la place de  $\beta$ .

Supposons que cela n'est pas le cas. Donc, pour chaque  $i$ , il existe une classe  $T_i \subset C_1$  de jumeaux en relation à  $B_i$  telle que  $|T_i| > |V_1|/2$ . Pour chaque  $w \in B_i$ , les arêtes

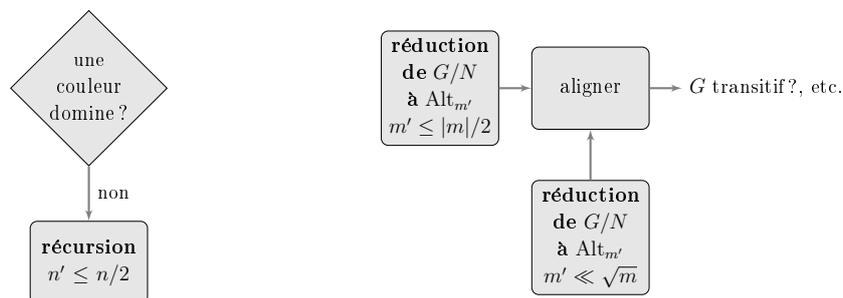
de  $w$  à tout  $v \in T_i$  sont de la même couleur ; alors, elles doivent être violettes. Soit  $vert$  une couleur d'arêtes en  $C_1 \times C_2$  qui ne soit pas violet. Alors, le graphe  $X = (C_1, \{1, \dots, m\}; D)$  dans l'exercice 2.18 n'est pas vide ; comme  $(v_i, i)$  est violet pour tout  $v \in T_i$ ,  $X$  n'est pas complet non plus. Comme  $X$  est birégulier, il n'y a aucune classe de jumeaux en  $C_1$  en relation à  $\{1, \dots, m\}$  avec  $> |C_1|/2$  éléments (ex. 5.4). Nous finissons donc par une récursion, ayant réduit  $V_2$  à  $m \leq |C_1|/2 \leq |V_2|/2$ .

Considérons maintenant le cas de  $\mathfrak{X}'_2$  primitive<sup>(15)</sup>. Fixons un  $y \in C_2$  arbitraire (non canoniquement). nous pouvons supposer qu'il y a une couleur – disons, violet – telle que  $d_{violet} > \beta|V_1|$ , puisque, sinon, les couleurs des arêtes qui connectent les éléments de  $V_1$  avec  $y$  nous donneraient un  $\beta$ -coloriage de  $V_1$ . Écrivons  $W = L_{violet}(y) = \{x \in C_1 : c(x, y) = \text{violet}\}$ . Donc  $|W| > \beta|V_1|$ . Soit  $bleu$  une couleur d'arêtes en  $\mathfrak{X}'_2$  telle que le degré de  $\mathcal{G}_{bleu}$  est (positif et)  $< |C_2|/2$  ; une telle couleur existe parce que  $\mathfrak{X}'_2$  n'est pas une clique. (S'il y a plusieurs couleurs comme cela, nous choisissons la plus bleue d'entre elles.) Alors,  $U = L_{bleu}(y) \subset C_2$  satisfait  $1 \leq |U| < |C_2|/2$ .

Le graphe biparti  $(W, U; \mathcal{G}_{violet} \cap (W \times U))$  est semirégulier par l'exercice 2.17b. Il est non vide parce que, pour tout  $u \in U$ ,  $|L_{violet}(u)| > |C_1|/2$ , et donc  $L_{violet}(u) \cap W \neq \emptyset$ . S'il était complet, nous aurions  $W \subset L_{violet}(u)$  pour tout  $u \in U$  ; comme  $|W| = |L_{violet}(y)| = |L_{violet}(u)|$ , ceci impliquerait que  $W = L_{violet}(u)$ . Or, cela voudrait dire que  $y$  et  $u$  sont des jumeaux dans le graphe  $(C_1, C_2; \mathcal{G}_{violet})$ . Par le même argument qu'avant (basé sur l'exercice 5.6), la primitivité de  $\mathfrak{X}'_2$  et le fait que  $\mathfrak{X}'_3$  ne soit pas monochrome impliquent qu'il n'y a pas de jumeaux dans  $C_2$  en relation au graphe  $(C_1, C_2; \mathcal{G}_{violet})$ . Donc,  $(W, U; \mathcal{G}_{violet} \cap (W \times U))$  n'est pas complet.

Par l'exercice 5.4, nous obtenons qu'aucune classe de jumeaux dans  $(W, U; \mathcal{G}_{violet} \cap (W \times U))$  n'a plus de  $|W|/2$  éléments. Nous pouvons donc appliquer la Proposition 5.7 de façon récursive, avec  $(W, U; \mathcal{G}_{violet} \cap (W \times U))$  à la place de  $V_1$  et  $V_2$ . Comme  $|U| < |V_2|/2$ , la récursion réussit. □

### 5.3. Récursion et réduction



15. Le problème dans la preuve originale de Babai était à ce point précis. Ce qui suit est un argument alternatif proposé par lui (*col rumore sordo di un galoppo*) lorsque cet article était en train d'être édité. Il est plus concis et élégant que l'argument d'origine, en plus d'être correct. Avant, la preuve faisait deux fois (ou plus) recours à la proposition elle-même, ce qui faisait croître l'indice  $[G : H]$  de façon catastrophique.

**5.3.1.** *Le cas sans couleurs dominantes.* — Nous sommes dans le cas dans lequel un coloriage  $c_{\mathfrak{X}} : \Gamma \rightarrow \mathcal{C}$  n'a pas de couleur dominante. Ici  $c_{\mathfrak{X}}$  est l'image d'une structure  $\mathfrak{X}$  sous un foncteur  $F$  qui commute avec l'action de  $H_{(x_1, \dots, x_\ell)}$ , où  $H = \text{Alt}(\Gamma)$ ,  $x_i \in \Gamma$ . Le fait que  $c_{\mathfrak{X}}$  n'a pas de couleur dominante nous servira pour trouver ou écarter ses isomorphismes possibles en  $H_{\bar{x}} = H_{(x_1, \dots, x_\ell)}$ . Pour trouver ou écarter des isomorphismes en tout  $H = \text{Alt}(\Gamma)$ , nous n'avons qu'à travailler avec un ensemble de représentants  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ ,  $s \leq |\Gamma|^\ell = m^\ell$ , des classes de  $H_{\bar{x}}$  dans  $H$ , et à faire l'union de  $\text{Iso}_{H_{\bar{x}}}(c_{\mathfrak{X}}, c_{\mathfrak{Y}_i})$  pour  $\mathfrak{Y}_i = \mathfrak{Y}^{\sigma_i^{-1}}$  :

$$(7) \quad \text{Iso}_H(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \bigcup_{1 \leq i \leq s} \text{Iso}_{H_{\bar{x}}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}_i) \sigma_i, \quad \text{Iso}_{H_{\bar{x}}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}_i) \subset \text{Iso}_{H_{\bar{x}}}(c_{\mathfrak{X}}, c_{\mathfrak{Y}_i}).$$

Ceci est similaire à l'équation (4), en §2.2. Le coût de la procédure est multiplié par  $s \leq m^\ell$ .

Si le coloriage  $c_{\mathfrak{X}}$  n'est pas une permutation (en  $H_{\bar{x}}$ ) du coloriage  $c_{\mathfrak{Y}_i}$ , alors  $\text{Iso}_{H_{\bar{x}}}(c_{\mathfrak{X}}, c_{\mathfrak{Y}_i}) = \emptyset$ . Supposons, par contre, qu'il y a au moins un  $\tau_i \in H_{\bar{x}}$  tel que  $c_{\mathfrak{X}} = c_{\mathfrak{Y}_i}^{\tau_i}$ . (Nous disons que  $\tau_i$  aligne  $c_{\mathfrak{X}}$  et  $c_{\mathfrak{Y}_i}$ .) Il est trivial de trouver  $\tau_i$ . Or

$$\text{Iso}_{H_{\bar{x}}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}_i) = \text{Iso}_{H_{\bar{x}}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}_i^{\tau_i}) \tau_i^{-1} \subset \text{Aut}_{H_{\bar{x}}}(c_{\mathfrak{X}}) \tau_i^{-1}.$$

Comme  $c_{\mathfrak{X}}$  n'a pas de couleur dominante, ceci est assez contraignant, ce que nous voulions.

Appliquons cette procédure générale au cas de  $G$  primitif que nous sommes en train de discuter. Il y a une bijection  $\iota : \Omega \rightarrow \{S \subset \Gamma : |S| = k\}$ ; donc,  $c_{\mathfrak{X}}$  induit un coloriage  $c' : \Omega \rightarrow \{(k_i)_{i \in \mathcal{C}} : k_i \geq 0, \sum_i k_i = k\}$ . Nous sommes dans une situation similaire à celle de la fin du §4.2, mais en mieux : il est facile de montrer que, comme aucune classe de couleur de  $c$  possède plus de  $\alpha|\Gamma|$  éléments, aucune classe de couleur de  $c'$  possède plus de  $\alpha|\Omega|$  éléments.

Nous procédons alors comme dans le cas intransitif de la preuve de Luks (Thm. 2.4), ce qui réduit le problème à  $\leq n$  problèmes d'isomorphisme de chaînes pour des chaînes de longueur  $\leq \alpha n$  et de longueur totale  $\leq n$ . Le dernier pas (*lifting*, « relèvement ») consiste à trouver des éléments de  $G$  qui induisent  $\tau_i$ . Étant donnée une bijection  $\iota$ , ceci est trivial.

**5.3.2.** *Le cas du découpage.* — Considérons maintenant un  $\alpha$ -découpage (fin de §2.3) d'un ensemble de sommets  $\Gamma$ . Ce découpage sera donné canoniquement, à savoir, en tant que l'image d'une structure  $\mathfrak{X}$  sous un foncteur, tout comme le coloriage au §5.3.1. Nous pouvons supposer que le découpage a une classe de couleurs  $C$  dominante ( $|C| > \alpha|\Gamma|$ ,  $\alpha > 1/2$ ), puisque, dans le cas contraire, nous pouvons passer au §5.3.1.

Nous voulons savoir quels éléments de  $\text{Alt}(\Gamma)$  respectent le  $\alpha$ -découpage; ceci nous aidera à contraindre les isomorphismes de  $\mathfrak{X}$ , tout comme en (7). Par la définition de  $\alpha$ -découpage,  $C$  est partitionné en  $\ell \geq 2$  ensembles de la même taille  $\geq 2$ . Les seules permutations en  $\text{Alt}_{m_0}$ ,  $m_0 = C$ , qui sont permises sont celles qui respectent la partition. Le groupe qui respecte la partition est isomorphe à  $\text{Alt}_{m_0/\ell}$ .

Nous avons donc réduit notre problème à un problème avec  $m' = m_0/\ell \leq m/2$ . Après avoir résolu ce problème, nous travaillons – comme dans le §5.3.1 – sur les autres classes de couleurs.

Étant donnés deux  $\alpha$ -découpages, nous vérifions si les partitions des deux découpages ont le même nombre d'ensembles de la même taille pour chaque couleur, puis nous alignons les deux découpages, et procédons exactement comme pour le problème de l'automorphisme.

**5.3.3. Le cas de Johnson.** — Soit donné un schéma de Johnson sur un ensemble de sommets  $\Gamma$ , ou plutôt deux schémas de Johnson  $\mathcal{J}(m_i, k_i)$ ,  $2 \leq k_i \leq m_i/2$ , sur des ensembles de sommets  $\Gamma_1, \Gamma_2$  de la même taille. Nous avons vu au §2.8 comment identifier  $\Gamma_i$  (là,  $\Omega$ ) explicitement avec les ensembles de taille  $k_i$  d'un ensemble  $\Lambda_i$  (là,  $\Gamma$ ) de taille  $m_i$ . Si  $k_1 \neq k_2$  et  $m_1 \neq m_2$ , nos structures ne sont pas isomorphes. Si  $k_1 = k_2$  et  $m_1 = m_2$ , nous établissons une bijection entre  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  et alignons les deux structures. Nous avons réduit notre problème à un problème avec  $m' \ll \sqrt{m}$  à la place de  $m$ .

La situation nous est donc même plus favorable que dans le cas du découpage. À nouveau, nous laissons la comptabilité au lecteur.

\* \* \*

Une petite confession : le cas de  $G$  primitif, que nous venons de finir de traiter, pourrait être traité exactement comme le cas de  $G$  imprimitif, que nous examinerons maintenant. La motivation du traitement séparé pour  $G$  primitif est pédagogique. Aucune peine n'est perdue, puisque toutes les techniques que nous avons étudiées nous seront essentielles dans le cas imprimitif.

## 6. LE CAS IMPRIMITIF

Nous avons une application surjective explicite

$$\phi : G \rightarrow \text{Alt}(\Gamma),$$

où  $G < \text{Sym}(\Omega)$  est un groupe de permutation,  $|\Gamma| = m$ ,  $|\Omega| = n$ . Nous pouvons supposer que  $|\Gamma| \geq C \log n$ ,  $C$  arbitraire. L'application  $\phi$  se factorise comme suit

$$G \rightarrow G/N \rightarrow \text{Alt}(\Gamma),$$

où  $N$  est le stabilisateur d'un système de blocs, et  $G/N \rightarrow \text{Alt}(\Gamma)$  est un isomorphisme.

Nous devons déterminer  $\text{Iso}_G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , où  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  sont des chaînes. Nous avons déjà résolu le cas  $N = \{e\}$ .

Nous attaquerons le problème de façon locale : pour  $T \subset \Gamma$ , nous arriverons à obtenir un certificat, soit du fait que  $\phi(\text{Aut}_{G_T}(\mathbf{x}))|_T$  contient  $\text{Alt}(T)$  (« certificat de plénitude »), soit du contraire. (Ici  $G_T$  désigne le groupe  $\{g \in G : T^{\phi(g)} = T\}$ .) Nous calculerons tous ces certificats pour  $T$  d'une taille  $k$  modérée. Si le nombre de certificats de plénitude est très grand, nous aurons prouvé que  $\phi(\text{Aut}_G(\mathbf{x}))$  contient un grand groupe alternant ; ce qui restera à faire sera une version de la procédure du §4.2 (« pull-back »).

Dans le cas contraire, les certificats formeront une structure  $k$ -aire dont la symétrie est bornée. Nous pourrions donc appliquer le Lemme des designs, suivi de Coupe-ou-Johnson, comme avant. Il y a aussi quelques autres cas particuliers, mais ils nous amènent à des  $\alpha$ -découpages,  $\alpha < 1$ , ce qui est aussi bien.

## 6.1. Les certificats locaux

**6.1.1. Certificats d'automorphismes.** — Un certificat local<sup>(16)</sup> pour  $T \subset \Gamma$  est

- soit une paire (« pas plein »,  $W, M(T)$ ), où  $W \subset \Omega$ ,  $M(T) < \text{Sym}(T)$ ,  $M(T) \neq \text{Alt}(T)$  (donc « pas plein ») et  $\phi(\text{Aut}_{G_T}^W(\mathbf{x}))|_T < M(T)$ ,
- soit une paire (« plein »,  $K(T)$ ), où  $K(T) < \text{Aut}_{G_T}(\mathbf{x})$ , et  $\phi(K(T))|_T = \text{Alt}(T)$ .

Le certificat local dépend de  $\mathbf{x}$  de façon canonique. Il est clair qu'un certificat plein, voire pas plein, garantit que  $\phi(\text{Aut}_{G_T}(\mathbf{x}))|_T$  est  $\text{Alt}(T)$ , voire ne l'est pas.

Si  $T$  est donné en tant que tuple ordonné, son certificat dépend de l'ordre de  $T$  seulement dans le sens de ne pas en dépendre : le même groupe  $\{(23), e\} < \text{Sym}(\{1, 2, 3\})$  (disons) a une apparence différente si nous le regardons du point de vue de l'ordre  $(1, 2, 3)$  ou de l'ordre  $(2, 1, 3)$ .

Nous construisons le certificat par une procédure itérative. Au début de chaque pas,  $W \subset \Omega$  et  $A(W)$  est le groupe  $\text{Aut}_{G_T}^W(\mathbf{x})$ ; la fenêtre  $W$  sera invariante sous  $A(W)$ . Au tout début de la procédure,  $W = \emptyset$  et  $A(W) = G_T$ . (Nous pouvons calculer  $G_T$  comme dans l'exercice 2.1c en temps  $|\Omega|^{O(k)}$ , où  $k = |T|$ .) À chaque pas, nous ajoutons à  $W$  tous les éléments atteints par  $A(W)$  (voir §4.1), puis nous mettons  $A(W)$  à jour, selon le nouveau  $W$ . Nous nous arrêtons si  $\phi(A(W))|_T \neq \text{Alt}(T)$  (non-plénitude) ou si  $W$  ne croît plus, ce qui veut dire qu'aucun élément de  $\Omega \setminus W$  n'est atteint par  $A(W)$ .

Il est clair qu'il y aura  $\leq |\Omega|$  itérations. À la fin, dans le cas de non-plénitude, nous retournons (« pas plein »,  $W, \phi(A(W))$ ); dans le cas de plénitude, nous retournons (« plein »,  $A(W)_{(\Omega \setminus W)}$ ). Il est clair que le stabilisateur des points  $A(W)_{(\Omega \setminus W)}$  est contenu non pas seulement dans  $\text{Aut}_{G_T}^W(x)$ , mais aussi dans  $\text{Aut}_{G_T}(x)$ , puisqu'il fixe tous les points de  $\Omega \setminus W$ . Nous savons que  $\phi(A(W)_{(\Omega \setminus W)}) = \text{Alt}(T)$  par la Proposition 4.4a, sous la condition que  $|T| \geq \max(8, 2 + \log_2 |\Omega|)$ .

Vérifier si  $\phi(A(W))|_T = \text{Alt}(T)$  est facile : nous n'avons qu'à vérifier, en utilisant Schreier-Sims, si deux générateurs arbitraires de  $\text{Alt}(T)$  sont en  $\phi(A(W))|_T$ . De la même façon, il est simple de déterminer quels éléments sont atteints par  $A(W)$  : nous calculons  $A(W)_x$  pour chaque  $x \in \Omega$  (par Schreier-Sims) et, toujours par Schreier-Sims, vérifions si  $\phi(A(W)_x)|_T = \text{Alt}(T)$ . Ceci prend du temps polynomial en  $|\Omega|$ .

Il reste à voir comment mettre à jour  $A(W)$ , étant donné  $A(W^-)$ , où nous écrivons  $W^-$  pour l'ancienne valeur de  $W$ . Tout élément de  $A(W)$  est dans  $A(W^-)$ , et donc  $A(W) = \text{Aut}_{A(W^-)}^W(\mathbf{x})$ . Comme dans l'équation (4),

$$(8) \quad \text{Aut}_{A(W^-)}^W(\mathbf{x}) = \bigcup_{\sigma} \text{Aut}_{N_{\sigma}}^W(\mathbf{x}) = \bigcup_{\sigma} \text{Iso}_N^W(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{\sigma^{-1}}),$$

16. Ou « local-global », dans la nomenclature de Babai. « Global » fait référence à  $\text{Aut}_{G^T}(\mathbf{x}) < \text{Sym}(\Omega)$ .

où  $N$  est le noyau de  $\phi|_{A(W_-)}$  et  $\sigma$  parcourt des représentants des  $k!/2$  classes de  $N$  en  $A(W)$ . Nous pouvons trouver rapidement un  $\sigma \in A(W^-) \cap \phi^{-1}(\{\tau\})$  pour tout  $\tau \in \text{Sym}(\Gamma)$ , par Schreier-Sims.

La Proposition 4.4b nous donne que toute orbite de  $N$  contenue en  $W$  (l'ensemble d'éléments atteints par  $A(W^-)$ ) est de longueur  $\leq |W|/k \leq |\Omega|/k$ . En conséquence, par la règle (3), mettre  $A(W)$  à jour se réduit à  $|\Omega| \cdot (k!/2)$  problèmes de détermination de Iso pour des chaînes de longueur  $\leq |\Omega|/k$ .

Comme le nombre d'itérations est  $\leq |\Omega|$ , la procédure fait appel à Isomorphisme-de-Chânes  $\leq |\Omega|^2 \cdot (k!/2)$  fois pour des chaînes de longueur  $\leq |\Omega|/k$ . Ceci – comme la routine qui prenait  $|\Omega|^{O(k)}$  de temps – est acceptable pour  $k \ll (\log |\Omega|)^\kappa$ . Nous choisissons  $\kappa = 1$ .

**6.1.2. Comparaisons de certificats.** — Une légère modification de la procédure ci-dessus nous permet d'élucider la relation entre deux certificats locaux pour deux chaînes. Soient  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' : \Omega \rightarrow \Sigma$ ,  $T, T' \subset \Sigma$ ,  $|T| = |T'| = k$ . Pour  $S \supset T$ , soit  $\mathbf{x}^S$  la chaîne

$$\mathbf{x}^S(i) = \begin{cases} \mathbf{x}(i) & \text{si } i \in S, \\ \text{glauque} & \text{si } i \notin S \end{cases}$$

où glauque  $\notin \Sigma$ . Nous voulons calculer

$$(9) \quad \text{Iso}_{G_T \tau_{T,T'}} \left( \mathbf{x}^W, \mathbf{x}^{W'} \right),$$

où  $G_T \tau_{T,T'}$  est la classe des éléments de  $G$  qui envoient l'ensemble  $T$  à  $T'$ , et  $W'$  est la valeur de  $W$  retournée quand la donnée est  $T'$  à la place de  $T$ .

Pour déterminer (9), nous suivons la procédure (§6.1.1), modifiée de la façon suivante : nous mettrons à jour, dans chaque itération, non pas seulement  $A(W)$ , mais aussi la classe  $A(W)\tau$  d'isomorphismes en  $G_T \tau_{T,T'}$  de  $\mathbf{x}^W$  à  $(\mathbf{x}')^{W'}$ . Voilà comment le faire, de façon analogue à (8) :

$$(10) \quad \bigcup_{\sigma} \text{Iso}_{N\sigma} \left( \mathbf{x}^W, (\mathbf{x}')^{W'} \right) = \bigcup_{\sigma} \text{Iso}_N \left( \mathbf{x}^W, \left( (\mathbf{x}')^{W'} \right)^{\sigma^{-1}} \right),$$

où  $N$  est le noyau de  $\phi|_{A(W_-)}$  et  $\sigma$  parcourt des représentants des  $k!/2$  classes de  $N$  contenues en  $A(W^-)\tau^-$ . Comme  $W$  est stabilisé par  $A(W_-)$  (et donc par  $N$ ), le fait que  $\sigma$  envoie  $W$  sur  $W'$  ou non dépend seulement de la classe de  $N$  à laquelle  $\sigma$  appartient. (La classe Iso dans la dernière expression de (10) est vide si  $W^\sigma \neq W'$ .)

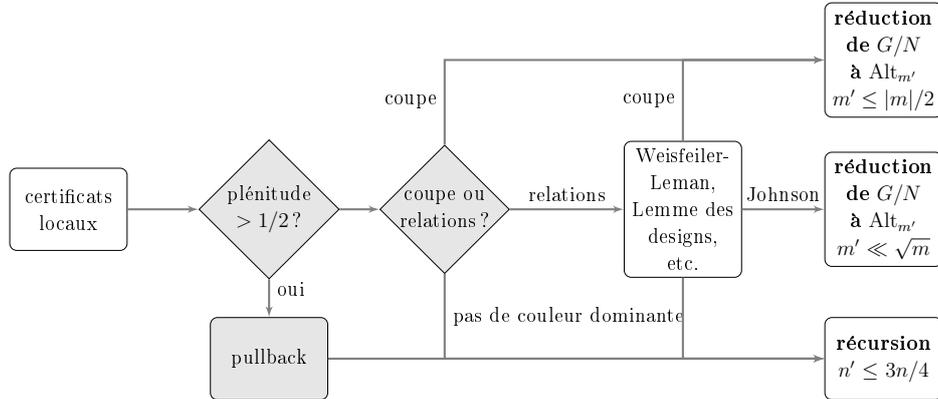
Comme avant, toute orbite de  $N$  contenue en  $W$  est de longueur  $\leq |W|/k$ , et le problème se réduit à  $|\Omega| \cdot (k!/2)$  appels par itération à Isomorphisme-de-Chânes pour des chaînes de longueur  $\leq |W|/k \leq |\Omega|/k$ .

Par ailleurs, si  $T$  et  $T'$  nous sont données comme tuples ordonnés  $(T)$ ,  $(T')$ , il est facile de déterminer

$$(11) \quad I(\mathbf{x}, \mathbf{x}', T, T') = \text{Iso}_{G_{(T) \cdot \tau_{(T),(T')}}} \left( \mathbf{x}^W, (\mathbf{x}')^{W'} \right),$$

où  $G_{(T)} \cdot \tau_{(T),(T')}$  est la classe des éléments de  $G$  qui envoient le tuple ordonné  $(T)$  à  $(T')$ . En effet, nous n'avons qu'à déterminer (9), puis utiliser Schreier-Sims pour déceler les éléments de (9) qui envoient  $(T)$  à  $(T')$  dans le bon ordre.

### 6.2. L'agrégation des certificats



En suivant la procédure du §6.1.1 pour une chaîne  $\mathbf{x}$ , nous trouvons des certificats locaux pour chaque  $T \subset \Gamma$  de taille  $k$ , où  $k$  est une constante  $\sim C \log |\Omega|$  ( $C > 1/\log 2$ ) et  $k < |\Gamma|/10$ . Soit  $F < \text{Aut}_G(\mathbf{x})$  le groupe engendré par les certificats pleins  $K(T)$ . Soit  $S \subset \Gamma$  le support de  $\phi(F)$ , c'est-à-dire l'ensemble des éléments de  $\Gamma$  qui ne sont pas fixés par tout élément de  $\phi(F)$ .

Notre objectif est de déterminer les isomorphismes  $\text{Iso}_G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  de  $\mathbf{x}$  à une autre chaîne  $\mathbf{x}'$ . Puisque les certificats sont canoniques, l'assignation de  $F$  et  $S$  à une chaîne l'est aussi. Donc, si nous arrivons à deux cas différents ci-dessous en suivant la procédure pour  $\mathbf{x}$  et pour  $\mathbf{x}'$ , les deux chaînes ne sont pas isomorphes.

Cas 1 :  $|S| \geq |\Gamma|/2$ , mais aucune orbite de  $\phi(F)$  n'est de longueur  $> |\Gamma|/2$ .

Alors, nous colorions chaque élément de  $\Gamma$  par la longueur de l'orbite qui le contient. Ceci est un coloriage canonique. Soit aucune classe de couleurs n'est de taille  $> |\Gamma|/2$ , soit une classe de couleurs de taille  $> |\Gamma|/2$  est découpée en  $\geq 2$  ensembles de la même taille  $\geq 2$ . Dans un cas comme dans l'autre, nous passons à une réduction/récursion.

Cas 2 :  $|S| \geq |\Gamma|/2$  et une orbite  $\Phi$  de  $\phi(F)$  est de longueur  $> |\Gamma|/2$ .

*Cas 2a* :  $\text{Alt}(\Phi) < \phi(F)|_\Phi$ . Nous sommes dans le cas de grande symétrie. Nous procédons comme au §4.2, jusqu'au point où nous devons déterminer  $\text{Iso}_H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  (où  $\mathbf{y}$  est  $(\mathbf{x}')^{\sigma'}$ ,  $\sigma' \in G$ , et  $H = \phi^{-1}(\text{Alt}(\Gamma)_\Phi)$ ). Définissons  $K = \phi^{-1}(\text{Alt}(\Gamma)_\Phi)$ , et soient  $\sigma_1, \sigma_2 \in G$  des préimages (arbitraires) sous  $\phi$  de deux générateurs de  $\text{Alt}(\Phi) < \text{Alt}(G)$ , trouvées par Schreier-Sims. Nous savons que les classes  $\text{Aut}_{K\sigma_i}(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, 2$ , sont non vides, puisque  $\text{Alt}(\Phi) < \phi(F)|_\Phi$ . Comme  $K$  n'a pas d'orbites de longueur  $> |\Omega|/2$ , nous pouvons déterminer ces deux classes par des appels à Isomorphisme-de-Chânes pour des chaînes de longueur  $\leq |\Omega|/2$  et longueur totale  $\leq 2|\Omega|$ . Elles engendrent  $\text{Aut}_H(\mathbf{x})$ .

Encore par le fait que  $\text{Alt}(\Phi) < \phi(F)|_\Phi$ , la classe  $\text{Iso}_H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  sera non vide ssi  $\text{Iso}_K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est non vide. Nous pouvons déterminer cette dernière classe par des appels

à Isomorphisme-de-Chânes comme ci-dessus, puisque  $K$  n'a pas d'orbites de longueur  $> |\Omega|/2$ . Si elle est non vide, nous obtenons la réponse

$$\text{Iso}_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{Aut}_H(\mathbf{x}) \text{Iso}_K(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

*Cas 2b* :  $\text{Alt}(\Phi) \not\leq \phi(F)|_\Phi$ . Soit  $d \geq 1$  l'entier maximal avec la propriété que  $\phi(F)|_\Phi$  est  $d$ -transitif, c'est-à-dire,  $\phi(F)|_\Phi$  agit transitivement sur l'ensemble des  $d$ -tuples d'éléments distincts de  $\Phi$ . Par CFSG,  $d \leq 5$ ; si nous ne voulons pas utiliser CFSG, nous avons la borne classique  $d \ll \log |\Gamma|$ .

Choisissons  $x_1, \dots, x_{d-1} \in \Phi$  arbitrairement. Le reste de notre traitement de ce cas sera donc seulement canonique en relation à

$$G_{(x_1, \dots, x_{d-1})} = \{g \in G : x_i^{\phi(g)} = x_i \forall 1 \leq i \leq d-1\},$$

ce qui, comme nous le savons, n'est pas un problème; voir le début du §5.3.1.

La restriction du groupe  $\phi(F)_{(x_1, \dots, x_{d-1})}$  à  $\Phi' = \Phi \setminus \{x_1, \dots, x_{d-1}\}$  est transitive sur  $\Phi'$ , mais elle n'est pas doublement transitive. Donc, la configuration cohérente schurienne qui lui correspond n'est pas une clique. Nous livrons cette configuration à Coupe-ou-Johnson (§5.2), tout comme à la fin du §5.2.

Pour comparer les configurations qui correspondent à deux chaînes  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ , nous alignons leurs classes  $\Phi$  d'abord. (Si elles ne sont pas de la même taille, ou si une chaîne nous donne le cas 2a et l'autre pas, les chaînes ne sont pas isomorphes.) Les isomorphismes seront donc contenus dans le stabilisateur  $H < G$  de l'ensemble  $\Phi$  (facile à déterminer, comme vers la fin du §4.2, puisque  $\phi$  est surjective). Nous pouvons remplacer  $\phi$  par l'application  $g \mapsto \phi(g)|_\Phi$  de  $H$  à  $\text{Alt}(\Phi)$ . Puis nous construisons les configurations comme ci-dessus, et comparons ce que Coupe-ou-Johnson nous donne.

Tout à la fin, nous nous occupons du complément de  $C$ . Il s'agit, comme d'habitude, d'appels à Isomorphisme-de-Chânes pour des chaînes de longueur  $\leq |\Omega|/2$  et longueur totale  $< |\Omega|$ .

*Cas 3* :  $|S| < |\Gamma|/2$ . Nous commençons en alignant les supports  $S$  pour les chaînes  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ , et en remplaçant  $\phi$  par  $g \mapsto \phi(g)|_{\Gamma \setminus S}$ , tout comme dans le cas 2(b).

Nous allons définir une relation  $k$ -aire avec très peu de jumeaux, pour la donner après au Lemme des designs.

Regardons la catégorie de toutes les chaînes  $\Omega \rightarrow \Sigma$ , où  $\Omega$  et  $\Sigma$  sont fixes, une action de  $G$  sur  $\Omega$  est donnée, et  $\phi : G \rightarrow \Gamma$  est aussi donnée. Nous la regardons depuis longtemps, puisque nous devons comparer les couleurs sur des configurations induites par des chaînes différentes pour décider si ces dernières sont isomorphes.

Cette fois-ci, nous définirons des couleurs par des classes d'équivalence : deux paires  $(\mathbf{x}, (T)), (\mathbf{x}', (T'))$  ( $T, T' \subset \Gamma \setminus S$ ,  $|T| = |T'| = k$ ) sont équivalentes si l'ensemble des isomorphismes en (11) est non vide. Nous colorions  $(T)$  – dans le coloriage de  $(\Gamma \setminus S)^k$  correspondant à  $\mathbf{x}$  – par la classe d'équivalence de  $(\mathbf{x}, (T))$ . Ici,  $(T)$  est un  $k$ -tuple ordonné sans répétitions; si  $(T)$  a des répétitions, elle est coloriée en gris.

Pour  $\mathbf{x}$  donné, aucune classe de jumeaux en  $\Gamma$  ne peut avoir  $\geq k$  éléments : s'il existait un tel ensemble avec  $\geq k$  éléments, il contiendrait un ensemble  $T$  avec  $k$  éléments, et

tous les ordres  $(T)$  de  $T$  auraient la même couleur. Ceci voudrait dire que l'ensemble des somorphismes en (11) serait non vide pour n'importe quels ordres  $(T)$ ,  $(T')$  de  $T$ . En conséquence,  $\text{Aut}_{G_T}(\mathbf{x}^W)$  contiendrait des éléments donnant toutes les permutations possibles de  $T$ . Ceci nous donnerait une contradiction, puisque  $T$ , étant contenu en  $\Gamma \setminus S$ , n'est pas plein.

Alors, pourvu que  $k \leq |\Gamma|/4$ , nous avons un coloriage de  $(\Gamma \setminus S)^k$  sans aucune classe de jumeaux avec  $\geq |\Gamma \setminus S|$  éléments. Nous pourrions donc appliquer le Lemme des designs, après une application de raffinements habituels  $F_2$ ,  $F_3$  (Weisfeiler-Leman).

Mais – pouvons-nous calculer ces coloriages ? Les classes d'équivalence sont énormes. Par contre, il n'y a aucun besoin de les calculer. Tout ce dont nous aurons besoin, pour comparer des structures qui viennent de chaînes  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ , sera d'être capables de comparer deux tuples  $(T)$  (sur la configuration donnée par  $\mathbf{x}$  ou  $\mathbf{y}$ ) et  $(T')$  (sur la configuration donnée par  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$  ou  $\mathbf{x}' = \mathbf{y}$ ) et dire si elles sont de la même couleur. En d'autres termes, nous devons calculer – au tout début de la procédure, pour toute paire  $((T), (T'))$ ,  $|T| = |T'| = k$ , et pour les paires de chaînes  $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ ,  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $(\mathbf{y}, \mathbf{y})$  – l'ensemble d'isomorphismes en (11), ce que nous savons déjà faire. Les couleurs sont donc, dans la pratique, des entrées dans un index que nous enrichissons et auquel nous faisons référence durant nos procédures.

Nous invoquons donc le Lemme des Designs, suivi par Coupe-ou-Johnson, et le reste de la procédure.

— FINE DELL'OPERA —

Le lecteur peut vérifier que les informations précisées jusqu'à ici (temps pris par des procédures, type de récursion) sont assez pour donner une borne du type  $\exp(O(\log |\Omega|)^c)$  pour le temps de l'algorithme qui résout le problème de l'isomorphisme de chaînes. Ceci donne une borne  $\exp(O(\log n)^c)$  pour le problème de l'isomorphisme de graphes avec  $n$  sommets. Avec un peu plus de travail, il devient clair que, dans un cas comme dans l'autre,  $c = 3$ . Nous donnons les détails dans l'appendice. L'exposant  $c = 3$  est plus petit que celui d'origine ; il est devenu possible grâce à quelques améliorations et simplifications que j'ai été capable d'apporter.

Remerciements. — Je remercie vivement L. Babai, L. Bartholdi, E. Kowalski, W. Kantor, G. Puccini, L. Pyber, A. Rimbau et C. Roney-Dougal pour des corrections et suggestions. En particulier, L. Babai a répondu à beaucoup de mes questions, et m'a aussi fourni des versions corrigées ou améliorées de plusieurs sections de [Ba]. En particulier, les §2.3–2.4 et §5.1 sont basés sur ces nouvelles versions. Je voudrais aussi remercier V. Ladret et V. Le Dret pour un grand nombre de corrections d'ordre typographique et linguistique.

## APPENDICE A. ANALYSE DU TEMPS D'EXÉCUTION

### A.1. Quelques précisions sur la procédure principale

À tout moment donné, nous travaillons avec un groupe transitif  $G < \text{Sym}(\Omega)$  qui agit sur un système de blocs  $\mathcal{B} = \{B_i\}$ ,  $\Omega = \bigcup_i B_i$ ,  $B_i$  disjoints ; nous notons  $N$  le noyau de l'action sur  $\mathcal{B}$ . À vrai dire, nous aurons toute une tour de systèmes de blocs  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_k$ , où  $B_i$  est un raffinement de  $B_{i+1}$  ;  $\mathcal{B}$  signifiera  $\mathcal{B}_k$ , le système le moins fin. Au début, il n'y a qu'un système,  $\mathcal{B}_1$ , dont les blocs  $B_i$  sont tous de taille 1, et dont le noyau  $N$  est trivial.

Nous voudrions que l'action de  $G$  sur  $\mathcal{B}$  soit primitive. Donc, si elle ne l'est pas, nous ajoutons à la tour un système minimal  $\mathcal{B}_{k+1}$  tel que  $\mathcal{B}_k$  soit un raffinement de  $\mathcal{B}_{k+1}$ . Nous redéfinissons  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{k+1}$  ;  $N$  sera le noyau du nouveau  $\mathcal{B}$ .

Si  $G/N$  est petit ( $\leq b^{O(\log b)}$ , où  $b = |\mathcal{B}|$ ) ; cas (a) du Théorème 3.1 (Cameron)), nous réduisons notre problème à plusieurs instances du problème avec  $N$  à la place de  $G$ . Chacune de ces instances se décompose en plusieurs instances – une pour chaque orbite de  $N$ . Chaque orbite  $\Omega'$  de  $N$  est contenue dans un bloc de  $\mathcal{B}$ . Les intersections de  $\Omega'$  avec les blocs de  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots$  nous donnent une tour de systèmes de blocs pour  $N|_{\Omega'}$ .

Si nous sommes dans le cas (b) du Théorème 3.1, nous passons à  $\leq b$  instances du problème avec  $M \triangleleft G$  (où  $[G : M] \leq b$ ) à la place de  $G$ . Nous passons à un nouveau système<sup>(17)</sup>  $\mathcal{B}'$  de  $m' = \binom{m}{k} \leq b$  blocs, et l'ajoutons à la tour comme son nouveau dernier niveau. Nous notons  $N'$  le noyau de l'action de  $M$  sur  $\mathcal{B}'$ . Alors,  $M/N' = \text{Alt}_m^{(k)}$ . Nous remplaçons  $G$  par  $M$  et redéfinissons  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ ,  $N = N'$ .

Donc, nous avons un isomorphisme de  $G/N$  à  $\text{Alt}_m$ . Nous sommes dans le cas principal que Babai attaque. Ses méthodes amènent à une réduction de  $\text{Alt}_m$ , soit à un groupe intransitif sans grandes orbites, soit à un produit  $\text{Alt}_{s_1} \wr \text{Alt}_{s_2}$ ,  $s_1, s_2 > 1$ ,  $s_1 s_2 \leq m$ , soit à un groupe  $\text{Alt}_{m'}$ ,  $m' \ll \sqrt{m}$ . (Nous simplifions quelque peu. Nous pourrions avoir, disons, un produit  $\text{Alt}_{s_1} \wr \text{Alt}_{s_2}$ , agissant sur une orbite de grande taille  $s_1 s_2 \leq m$ , et d'autres groupes sur des petites orbites, ou plusieurs produits agissant sur des petites orbites.)

Dans le cas intransitif sans grandes orbites, nous procédons comme dans la preuve de Luks. (La procédure aura été plus coûteuse que dans Luks, mais grâce au manque de grandes orbites, le gain dans la récursion est aussi plus grand.) Dans le cas de  $\text{Alt}_{m'}$ ,  $m' \ll \sqrt{m}$ , nous itérons la procédure. Dans le cas de  $\text{Alt}_{s_1} \wr \text{Alt}_{s_2}$  – qui correspond à un découpage dans des ensembles de taille  $r$  de la même couleur – nous avons une action primitive de  $\text{Alt}_s$  sur un système de  $s$  blocs de taille  $r$ . Nous passons, alors, à cette action et à ces blocs, sans oublier les blocs  $\mathcal{B}'$ , auxquels nous retournons plus tard, après avoir fini de travailler sur  $\text{Alt}_s$ .

Il est clair que ce type de procédure réduit complètement  $\text{Alt}_k$  en un nombre d'itérations qui n'est pas supérieur à  $\log_2 m$ .

<sup>17</sup>. Ce système peut être égal à  $\mathcal{B}$  seulement si  $M = G$  ; voir la deuxième note de pied de page dans l'énoncé du Théorème 3.1. Dans ce cas-là, le passage de  $G$  à  $M$  est bien sûr gratuit.

## A.2. Récursion et temps

Examinons le temps total d'exécution de l'algorithme qui trouve les isomorphismes entre deux chaînes. Les pas individuels sont peu onéreux ; aucun ne précède plus de  $n^{O(\log n)}$  de temps. Notre attention doit se porter avant tout sur la récursion.

Dans la procédure générale, une récursion est toujours d'une descente, soit vers des chaînes plus courtes, soit vers un groupe plus petit, ou au moins coupé dans des tranches plus fines par une tour de systèmes de blocs ayant plus de niveaux. Dans le premier type de descente, le groupe reste le même ou, plutôt, est remplacé par une restriction de lui-même. Dans le deuxième cas, la longueur des chaînes reste la même. (Nous pouvons aussi avoir un mélange des deux cas – tant mieux : le groupe devient plus petit et les chaînes se raccourcissent aussi.)

La descente la moins coûteuse, et moins avantageuse, est celle du cas intransitif de la procédure de Luks. Il pourrait arriver que  $G$  ait deux orbites sur  $\Omega$  ( $|\Omega| = n$ ), une de longueur  $n - 1$  et une de longueur 1. Ceci serait même compatible avec une borne polynomiale sur le temps, pourvu que le temps pris avant la descente soit lui-même polynomial :  $n^{c+1} \leq (n - 1)^{c+1} + 1^{c+1} + n^c$  pour  $c \geq 1$ .

D'autres types de descente sont plus coûteux, mais aussi plus avantageux : nous descendons à des chaînes de longueur  $\leq n/2$  (ou  $\leq 2n/3$ ), ou de  $\text{Alt}_m$  à  $\text{Alt}_{s_1} \wr \text{Alt}_{s_2}$ ,  $s_1 s_2 \leq m$ ,  $s_1, s_2 \leq m/2$ , par exemple. Il est clair qu'il est impossible de descendre plus qu'un nombre logarithmique de fois de cette façon.

Il est crucial de ne pas oublier qu'un coût (considérable) peut être caché dans une perte de canonicité. Si nos choix ne sont canoniques qu'en relation à un sous-groupe  $H$  de notre groupe  $G$ , le coût de leur application sera multiplié par  $[G : H]$ . (Voir §5.3.1.)

\* \* \*

Considérons, alors, le coût de chaque procédure. Le cas intransitif de Luks est, comme nous l'avons déjà vu, compatible même avec une borne polynomiale. Concentrons-nous alors sur le cas où  $G$  agit de façon primitive sur un système de blocs ; soit  $N$  le noyau.

Si nous sommes dans le cas (a) du Théorème 3.1, ou dans le cas (b), mais avec  $m \leq C \log n$ , nous faisons appel à  $(m')^{O(\log n)}$  instances de la procédure principale pour des chaînes de longueur  $n/m'$  (où  $m' \geq m$ ). Ceci est consistant avec une borne totale du type  $\exp(O((\log n)^c))$ ,  $c \geq 2$ . Nous pouvons, donc, nous concentrer sur le cas où il existe un isomorphisme  $\phi : G/N \rightarrow \text{Alt}(\Gamma)$ ,  $|\Gamma| = m > C \log n$ . (La procédure du §2.8 rend cet isomorphisme explicite.)

Le premier pas à considérer est la création de certificats locaux, avec, comme objectif, la création d'une relation  $k$ -aire sur  $\Gamma$ . (Si  $G$  est primitif, créer une telle relation est trivial ; voir le début du §5.) Il y a  $n^k$  certificats locaux, où  $k = 2 \log n$  (disons) ; nous devons les calculer et aussi comparer toute paire de certificats. Déjà le premier pas du calcul d'un certificat, à savoir le calcul de  $G_T$ , prend un temps  $n^{O(k)}$  (plus précisément,  $O((n/k)^{O(k)})$ ). D'autres calculs prennent moins de temps. L'usage de la récursion, par contre, est relativement lourd : nous faisons appel à la procédure principale  $\leq n^2 \cdot k!$  fois pour des chaînes de longueur  $\leq n/k$ . Ceci se passe pour chaque ensemble  $T$  de

taille  $k$ , c'est-à-dire  $\leq n^k/k!$  fois. La procédure pour comparer des paires de certificats est analogue.

Nous faisons donc appel à la procédure principale  $O(n^{2k+1})$  fois pour des chaînes de longueur  $\leq n/k$ . Dans chacun de ces appels, notre tour de stabilisateurs est héritée : notre groupe est un groupe transitif, égal à la restriction de  $N^-$  à une de ses orbites, où  $N^-$  (noté  $N$  au §6) est un sous-groupe d'un sous-groupe  $A(W^-)$  de  $G$ .

Pour deux systèmes de blocs consécutifs  $\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_{i+1}$ , notons  $r_i$  le nombre de blocs de  $\mathcal{B}_i$  dans chaque bloc de  $\mathcal{B}_{i+1}$ . Il est clair que ce nombre n'augmente pas quand nous passons à la restriction d'un sous-groupe de  $G$  (par exemple,  $N^-$ ) à une de ses orbites.

Examinons maintenant l'agrégation des certificats locaux (§6.2). Il y a trois cas. Dans le premier, le temps de calcul additionnel est à peu près trivial, et nous obtenons une réduction, soit à un groupe intransitif sans grandes orbites, soit à un produit  $\text{Alt}_{s_1} \wr \text{Alt}_{s_2}$  sur une grande orbite et éventuellement d'autres groupes sur des orbites plus petites.

Ici, déjà, l'analyse devient délicate. Nous devons prendre en considération non seulement la taille du domaine mais aussi le groupe qui agit sur lui. Plus précisément, nous devons borner le nombre de fois que notre tour  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_k$  pourrait être raffiné ou raccourci encore. Ceci sera mesuré par

$$\rho = \sum_{1 \leq i \leq k-1} (2\lfloor \log_2 r_i \rfloor - 1),$$

où nous supposons que nous avons enlevé des systèmes répétés de la tour (donc  $r_i > 1$ ).

Notons  $F(n, r)$  le temps d'exécution de la procédure principale pour des chaînes de longueur  $n$  et pour une tour de systèmes de blocs pour  $G$  telle que le paramètre  $\rho$  est  $\leq r$ . Une réduction de  $G/N$  fait décroître  $r$  par au moins 1 ; un coloriage sans aucune grande classe de couleurs assure une descente vers des chaînes de longueur  $\leq n/2$ . Nous devons aussi inclure un facteur de  $\log n^{2k}$ , prenant en considération le temps requis pour accéder à nos comparaisons de paires de certificats locaux<sup>(18)</sup>. Donc, dans le cas que nous examinons,  $F(n, r)$  est borné par

$$n^{O(k)} + \left( n^{2k+1} F(n/k, r) + F(n_1, r-1) + \sum_{i \geq 2} F(n_i, r) \right) \cdot O(k \log n),$$

où  $\sum n_i = n$  et  $n_i \leq n/2$  pour  $i \geq 2$ , ou

$$n^{O(k)} + \left( n^{2k+1} F(n/k, r) + \sum_i F(n_i, r) \right) \cdot O(k \log n),$$

où  $\sum n_i = n$  et  $n_i \leq n/2$  pour  $i \geq 1$ . Puisque  $k \ll \log n$ , ceci est consistant avec  $F(n, r) = \exp(O(r + \log n)^c)$  pour  $c \geq 3$ , ou même avec  $F(n, r) = \exp(O((\log n)^{c_1} + (\log r)^{c_2}))$  pour  $c_1 \geq 3$  et  $c_2 \geq 1$ , par exemple.

Le cas 2a a un coût très similaire, à un facteur constant près. Le cas 2b et 3 sont différents. Dans les deux cas, nous arrivons à construire une relation  $d$ -aire, avec  $d \leq 5$ ,

18. Faire ce type de comparaisons à l'avance nous aide, mais ne pas les faire à l'avance ne changerait pas l'ordre du temps utilisé, asymptotiquement.

dans le cas 2b, et  $d = k \ll \log n$  dans le cas 3. Puis, nous appelons Weisfeiler-Leman, suivi du Lemme des Designs pour des configurations  $d$ -aires, et, finalement, Coupe-ou-Johnson.

Weisfeiler-Leman prend un temps  $|\Gamma|^{O(d)} = m^{O(d)}$ . Le Lemme des designs garantit l'existence d'un tuple  $(x_1, \dots, x_\ell) \in \Gamma$ ,  $\ell \leq d - 1$ , avec certaines propriétés. Nous cherchons un tel tuple par force brute, ce qui prend un temps  $O(m^d)$ . Ce qui est plus important est que ce choix n'est pas canonique. Donc, le temps d'exécution de tout ce qui reste est multiplié par  $m^d = m^{O(\log n)}$ .

Coupe-ou-Johnson prend un temps  $O(m^d)$ . Ici, à nouveau, nous faisons des choix qui ne sont pas complètement canoniques ; ils imposent un facteur de  $m^{O(\log m)}$  sur tout ce qui suit. Le résultat de Coupe-ou-Johnson est soit un  $\beta$ -découpage, ce qui implique une réduction à un produit du type  $\text{Alt}_{s_1} \wr \text{Alt}_{s_2}$  et/ou à des chaînes plus courtes, soit un schéma de Johnson, ce qui implique une réduction à  $\text{Alt}_{m'}$ ,  $m' \ll \sqrt{m}$ . Donc, soit

$$(12) \quad F(n, r) \leq n^{O(k)} + O(kn^{2k+2}F(n/k, r)) + m^{O(\log n)} \left( 1 + F(n_1, r-1) + \sum_{i \geq 2} F(n_i, r) \right),$$

où  $\sum n_i = n$ , et  $n_i \leq n/2$  pour  $i \geq 2$ , ou

$$(13) \quad F(n, r) \leq n^{O(k)} + O(kn^{2k+2}F(n/k, r)) + m^{O(\log n)} \left( 1 + \sum_i F(n_i, r) \right),$$

où  $\sum n_i = n$  et  $n_i \leq n/2$  pour  $i \geq 1$ .

Ici  $m \leq n$ . (Nous pourrions travailler avec une borne moins grossière, mais cela nous servirait peu.) Donc, les inégalités (12) et (13) sont consistantes avec  $F(n, r) = \exp(O(r + \log n)^c)$  pour  $c \geq 3$ .

Comme  $r \leq 2 \log_2 n$ , nous concluons que le temps total d'exécution de la procédure pour déterminer les isomorphismes entre deux chaînes de longueur  $n$  est

$$F(n, r) \leq e^{O(\log n)^3}.$$

## RÉFÉRENCES

- [Ba] L. BABAI – *Graph Isomorphism in Quasipolynomial time*, prépublication, disponible en ligne sur [arxiv.org:1512.03547](https://arxiv.org/abs/1512.03547).
- [Ba2] L. BABAI – *Graph Isomorphism in Quasipolynomial time (Extended Abstract)*, dans *Proc. 48th ACM STOC* (2016), 684–697.
- [Ba3] L. BABAI – *Lectures on Graph Isomorphism*, University of Toronto, Dept. of Computer Science, notes polycopiées, 1979.
- [BCP] L. BABAI, P. J. CAMERON et P. P. PÁLFY – *On the orders of primitive groups with restricted nonabelian composition factors*, *Journal of Algebra* **79** (1982), 161–168.

- [BKL] L. BABAI, W. M. KANTOR et E. M. LUKS – *Computational complexity and the classification of finite simple groups*, dans *Proc. 24th IEEE FOCS* (1983), 162–171.
- [BLS] L. BABAI, E. M. LUKS et Á. SERESS – *Permutation groups in NC*, dans *Proc. 19th ACM STOC* (1987), 409–420.
- [BaPS] L. BABAI, P. P. PÁLFY et J. SAXL – *On the number of  $p$ -regular elements in finite simple groups*, *LMS J. Comput. and Math.* **12** (2009), 82–119.
- [CFI] J. CAI, M. FURER et N. IMMERMANN – *An optimal lower bound on the number of variables for graph identification*, *Combinatorica* **12** (1992), 389–410.
- [Cam] P. J. CAMERON – *Finite permutation groups and finite simple groups*, *Bull. London Math Soc.* **13** (1981) 1–22.
- [EvP] S. EVDOKIMOV et I. N. PONOMARENKO – *On highly closed cellular algebras and highly closed isomorphisms*, *Electr. J. Comb.* **6** (1999).
- [F] R. A. FISHER – *An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks*, *Ann. of Eugenics*, **10** (1940), 52–75.
- [FHL] M. FURST, J. HOPCROFT et E. LUKS – *Polynomial-time algorithms for permutation groups*, dans *Proc. 21st IEEE FOCS* (1980), 36–41.
- [Hi] D. G. HIGMAN – *Finite permutation groups of rank 3*, *Math. Z.* **86** (1964), 145–156.
- [ImL] N. IMMERMANN et E. S. LANDER – *Describing graphs : a first-order approach to graph canonization*, dans *Complexity Theory Retrospective – in honor of Juris Hartmanis on the occasion of his 60th birthday*, Springer, 1990, 59–81.
- [Lu] E. LUKS – *Isomorphism of graphs of bounded valence can be tested in polynomial time*, *J. of Comput. and Sys. Sci.* **25** (1982), 42–65.
- [Ma] A. MARÓTI – *On the orders of primitive groups*, *J. Algebra* **258** (2) (2002), 631–640.
- [Py] L. PYBER – *A CFSG-free analysis of Babai’s quasipolynomial GI algorithm*, disponible en ligne sur [arxiv.org:1605.08266](https://arxiv.org/abs/1605.08266).
- [Py2] L. PYBER – *On the orders of doubly transitive permutation groups, elementary estimates*, *J. of Combin. Th. A* **62** (1993), 361–366.
- [RChW] D. K. RAY-CHAUDHURI et R. M. WILSON – *On  $t$ -designs*, *Osaka J. Math.* **12** (1975), 737–744.
- [Sch] O. SCHREIER – *Die Untergruppen der freien Gruppen*, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.* **5** (1927), 161–183.
- [Si1] C. C. SIMS – *Graphs and finite permutation groups*, *Math. Z.* **95** (1967), 76–89.
- [Si2] C. C. SIMS – *Computational methods for permutation groups*, dans « *Computational Problems in Abstract Algebra* », pp. 169–184, Pergamon, Oxford, 1970.

- [SW] X. SUN et J. WILMES - *Faster canonical forms for primitive coherent configurations*, dans *Proc. 47th ACM STOC* (2015), 693–702.
- [WL] Б. Ю. ВЕЙСФЕЙЛЕР и А. А. ЛЕМАН – *Приведение графа к каноническому виду и возникающая при этом алгебра*, НТИ, сер. 2, **9** (1968), 12–16.

Harald Andrés HELFGOTT

Universität Göttingen

Mathematisches Institut

Bunsenstrasse 3-5

D-37073 Göttingen

Allemagne

*E-mail* : `helfgott@math.univ-paris-diderot.fr`