

**INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES
DANS LES ESPACES MÉTRIQUES MESURÉS**
[d'après F. Cavalletti & A. Mondino]

par **Cédric VILLANI**

*Hélas, on ne sait jamais quel problème est joli et quel problème est laid,
tant qu'on ne les a pas résolus.*

M. Gromov, *Sign and meaning of curvature*

INTRODUCTION

Vers l'an 2000, le développement rapide de la théorie du transport optimal menait à la découverte de liens étroits entre courbure de Ricci, entropie de Boltzmann et transport de Monge–Kantorovich [CEMS, OV]. À partir de cette observation, une théorie synthétique de la courbure de Ricci, basée sur les notions d'entropie et de transport optimal, entamait sa gestation dès 2004 [LV, St]. Les motivations étaient multiples : étendre à un cadre non lisse la théorie de la courbure de Ricci ; développer de nouvelles heuristiques et interprétations adaptées à certains problèmes d'analyse géométrique ou d'équations aux dérivées partielles ; en déduire de nouveaux théorèmes de géométrie riemannienne ; enfin, dégager des pistes pour des généralisations de la notion de courbure.

En 2008, le programme était suffisamment avancé pour faire l'objet d'un Séminaire Bourbaki rédigé par Michel Ledoux [Le], et d'une partie importante de ma monographie [Vi1]. La stabilité par topologie de Gromov–Hausdorff et l'adaptation de bon nombre d'inégalités géométriques classiques constituaient deux atouts de la nouvelle théorie. En revanche, comme le remarquait Ledoux, d'importantes interrogations subsistaient : parmi les problèmes ouverts recensés à l'époque, citons la compatibilité avec la théorie bien établie des espaces CAT (Cartan–Alexandrov–Toponogov) ou avec la théorie classique de l'analyse dans les espaces métriques, l'existence d'un semigroupe de la chaleur en courbure minorée, la localisation de la nouvelle notion de courbure, l'établissement d'inégalités géométriques optimales en dimension finie, ou encore des énoncés de rigidité.

Tous ces problèmes ont été résolus de façon satisfaisante entre 2010 et 2015 par une série de contributions marquantes [AGS2, AGS3, AGS4, CaMo1, EKS, G2, Pe, Ra1]. Parmi ces avancées majeures, la plus récente, due à Cavalletti & Mondino [C2, CaMo1] revêt une importance particulière, car elle permet d'intégrer dans la théorie des inégalités emblématiques qui étaient jusque là restées hors de portée. Elle repose sur une magnifique idée de Klartag [Kl] qui établit un pont inattendu entre les méthodes de la géométrie des convexes et celles du transport optimal.

Grâce à ces travaux, on peut pour la première fois proposer une démonstration synthétique, « raisonnable », de la célèbre inégalité isopérimétrique de Lévy–Gromov. Les preuves connues auparavant utilisaient des résultats fins d’analyse, très gourmands en hypothèses de régularité et obtenus par une orgie technique ; par contraste, la nouvelle démonstration ne demandera aucune régularité au-delà du non-branchement des géodésiques. La mise au point d’une preuve aussi générale était en fait une motivation forte du programme de la courbure de Ricci dans les espaces non lisses.

Par construction, l’inégalité de Lévy–Gromov implique des constantes optimales en fonction de la dimension ; parvenir à une telle optimalité est parfois un but en soi, parfois plutôt un test pour la puissance des méthodes. De fait, les mêmes techniques ont permis à Cavalletti & Mondino de traiter un grand nombre d’inégalités à constantes optimales, résolvant cinq ou six problèmes ouverts de [Vi1] et amenant la théorie dans un état de maturité qui semblait inaccessible encore récemment.

Dans cet exposé, je commencerai par énoncer l’inégalité de Lévy–Gromov et rappeler sa démonstration classique dans les variétés riemanniennes (Section 1). Puis je présenterai l’état de l’art concernant les bornes de courbure de Ricci dans les espaces métriques mesurés, et en particulier le cadre des « espaces $CD^*(K, N)$ essentiellement non branchants » qui est celui où se place naturellement la nouvelle démonstration de Cavalletti–Mondino (Section 2). La Section 3 sera consacrée à une difficulté majeure dans l’obtention d’inégalités optimales ; ce sont les résultats des Sections 4 et 5 qui permettront d’y répondre, à travers une étude qualitative fine du transport optimal. La section 6 démontrera le résultat principal, l’inégalité de Lévy–Gromov dans des espaces métriques mesurés (Théorème 6.1) ; la Section 7 sera consacrée aux cas d’optimalité et la Section 8 à d’autres applications de la méthode. Enfin on passera en revue quelques conclusions et perspectives de recherche dans la Section 9.

Je remercie chaleureusement Fabio Cavalletti, Nicola Gigli, Michel Ledoux, John Lott, Emanuel Milman et Andrea Mondino pour leur relecture de cet exposé et leurs précieux conseils. Le texte a été revu et corrigé à l’occasion d’un cours organisé à l’Institut Camille Jordan (Université de Lyon Claude Bernard) par Ivan Gentil.

NOTATION : J’utiliserai la convention $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Dans tout cet exposé, dès qu’une métrique riemannienne sera définie ou sous-jacente, je noterai sans plus de précisions d pour la distance géodésique associée, vol pour le volume riemannien, Ric pour la courbure de Ricci (qui est une forme quadratique définie sur le fibré tangent), ∇ pour l’opérateur gradient, Δ pour l’opérateur laplacien (divergence du gradient), ∇^2 pour l’opérateur hessien. Un ensemble A étant donné, je noterai $A^\varepsilon = \{x; d(x, A) \leq \varepsilon\}$ l’élargissement de A par une distance $\varepsilon \geq 0$; et $B_r(x)$ sera la boule ouverte de centre x et de rayon r . Je noterai aussi \mathbb{E}^n l’espace euclidien de dimension n , et $\mathbb{S}^n(R) \subset \mathbb{E}^{n+1}$ la sphère standard à n dimensions de rayon R . Enfin, les variétés seront toujours supposées connexes et complètes, et les géodésiques seront supposées minimisantes et de vitesse constante (parfois unitaires, c’est-à-dire de vitesse normalisée à 1 ; et parfois pas).

1. COMPARAISON ISOPÉRIMÉTRIQUE DE LÉVY–GROMOV

C'est une estimation de Lévy [Lev, Partie 3, Chapitre 4] qui fonda tout à la fois l'isopérimétrie non euclidienne et la théorie de la concentration de la mesure en grande dimension. Lévy considérait des hypersurfaces plongées de courbures sectionnelles uniformément positives ; autrement dit, des bords d'ouverts lisses uniformément convexes. Il montrait que dans une telle hypersurface, les inégalités isopérimétriques sont « au moins aussi fortes » que dans une sphère.

La date de la découverte de Lévy est incertaine (quelque part entre l'édition de 1919 et celle de 1951 de son ouvrage d'analyse fonctionnelle) ; c'est V. Milman qui en fit une promotion vigoureuse dans les années 1970. Gromov [Gr1] apporta trois contributions majeures au sujet : il montra par diverses applications la puissance de l'inégalité de Lévy ; il répara la preuve originale, qui achoppait sur des problèmes considérables de régularité ; enfin il généralisa l'estimation à toute variété riemannienne de courbure de Ricci uniformément positive.

Cette dernière évolution était en ligne avec deux principes généraux : d'une part, la courbure de Ricci est la courbure naturelle dans les questions qui font intervenir à la fois mesures et distances ; d'autre part, dans de nombreux énoncés, les bornes inférieures sur la courbure sectionnelle peuvent être remplacées par des bornes inférieures sur la courbure de Ricci (penser aux théorèmes de Bonnet–Myers, Lichnérowicz, Bishop–Gromov, Li–Yau, etc.). On rappelle que la courbure de Ricci au point $x \in M$, dans une direction tangente unitaire e , coïncide avec la somme des courbures sectionnelles dans les $n - 1$ plans engendrés par les paires (e, e_i) , si (e, e_2, \dots, e_n) est une base orthonormée de l'espace tangent $T_x M$; de sorte que la minoration de la courbure de Ricci est une hypothèse plus faible que la minoration des courbures sectionnelles.

THÉORÈME 1.1 (inégalité isopérimétrique de Lévy–Gromov, [Gr1])

Soit (M, g) une variété riemannienne lisse de dimension $n > 1$, de courbure de Ricci uniformément positive : $\text{Ric} \geq K g$, où $K > 0$ est une constante ; on rappelle qu'alors M est forcément compacte. Soit A une partie mesurable de M ; on note $\nu[A]$ son volume riemannien normalisé, et $\nu^+[\partial A]$ sa mesure de surface au sens de Minkowski, également normalisée :

$$\nu[A] = \frac{\text{vol}[A]}{\text{vol}[M]}, \quad \nu^+[\partial A] = \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\nu[A^\varepsilon \setminus A]}{\varepsilon}.$$

Soit par ailleurs $S = S^{K,n} = \mathbb{S}^n(\sqrt{(n-1)/K})$ la sphère de dimension n et de rayon $\sqrt{(n-1)/K}$, équipée de son volume normalisé σ . Soit enfin B une boule dans S , c'est-à-dire une calotte sphérique. Alors

$$(1) \quad \nu[A] = \sigma[B] \implies \nu^+[\partial A] \geq \sigma^+[\partial B].$$

En d'autres termes, si l'on définit sur $[0, 1]$ le profil isopérimétrique normalisé

$$(2) \quad \mathcal{I}_M(\alpha) = \inf \{ \nu^+[\partial A]; \quad \nu[A] = \alpha \},$$

alors $\mathcal{I}_M \geq \mathcal{I}_S$. De façon équivalente, si l'on pose, sur $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$,

$$(3) \quad \Phi_M(\alpha; \varepsilon) = \inf \{ \nu[A^\varepsilon]; \nu[A] = \alpha \},$$

alors $\Phi_M \geq \Phi_S$.

Remarque 1.2. — J'emploie la notation $\nu^+[\partial A]$ car la définition induit effectivement une notion de “mesure de bord” ν^+ sur ∂A ; mais c'est un abus de notation. En effet, si A est trop irrégulier, ν^+ peut ne pas dépendre uniquement de ∂A , mais aussi de tout l'ensemble A . (Penser au cas où A est dénombrable dense dans M : alors $\nu^+[\partial A] = \infty$ et $\nu^+[\partial(M \setminus A)] = 0$, bien que $\partial A = \partial(M \setminus A) = M$.)

Remarque 1.3. — Le Théorème 1.1 s'inscrit dans la riche tradition des énoncés par comparaison, où l'espace est comparé à une géométrie de référence, en l'occurrence une sphère. La plupart de ces résultats reposent *in fine* sur la comparaison de solutions d'équations différentielles d'ordre 2, et l'inégalité de Lévy–Gromov ne déroge pas à cette habitude.

Remarque 1.4. — Pour combiner, comme le fait le Théorème 1.1, une hypothèse de courbure et une hypothèse de dimension, on peut utiliser la **condition de courbure-dimension**, qui s'est imposée en théorie de la courbure de Ricci, au carrefour entre analyse, probabilité et géométrie. Moralement, elle exprime à la fois la minoration de la courbure et la majoration de la dimension. Dans la suite, j'utiliserai pour cette condition la notation classique $\text{CD}(K, N)$, où $K \in \mathbb{R}$ et $N \in [1, \infty]$ (pas forcément entier). On dit qu'une variété riemannienne (M^n, g) , munie d'une mesure de référence lisse $\nu(dx) = e^{-V(x)} \text{vol}(dx)$, vérifie la condition de courbure-dimension $\text{CD}(K, N)$ si

$$(4) \quad n \leq N, \quad \text{Ric} + \nabla^2 V - \frac{\nabla V \otimes \nabla V}{N - n} \geq Kg.$$

(Implicitement $n < N$ si $\nabla V \neq 0$.) Quand ν est la mesure de volume normalisé, la seconde inégalité se réduit à $\text{Ric} \geq Kg$; mais on est souvent amené à considérer d'autres mesures. L'inégalité (4) peut se ré-exprimer par de nombreuses conditions équivalentes [Vi1, Chapitre 14], dont les deux plus populaires sont

(a) l'inégalité de Bochner : pour toute fonction f lisse sur M ,

$$(5) \quad L\left(\frac{|\nabla f|^2}{2}\right) - \nabla f \cdot \nabla Lf \geq K|\nabla f|^2 + \frac{(Lf)^2}{N}, \quad Lf = \Delta f - \nabla V \cdot \nabla f;$$

(b) l'inégalité de déterminant jacobien de l'exponentielle : soient ψ une fonction lisse sur M , et $\gamma(x, t) = \exp_x(t\nabla\psi(x))$ le flot de géodésiques déterminé par le champ de vitesses $\nabla\psi$; soit $\mathcal{J}(x, t) = e^{-V(\gamma(x,t))+V(x)} \det(d_x\gamma(x, t))$ la distortion infinitésimale de la mesure associée à $x \mapsto \gamma(x, t)$; alors $\ell(x, t) := -\log \mathcal{J}(x, t)$ vérifie, tant que $t > 0$ reste assez petit pour que $\ell(x, t)$ soit bien défini,

$$(6) \quad \ddot{\ell} \geq K|\dot{\gamma}|^2 + \frac{(\dot{\ell})^2}{N}.$$

Si $N = \infty$, cette inégalité différentielle est linéaire ; si $N < \infty$ elle peut se réécrire sous une forme linéaire, modulo un changement de fonction :

$$(7) \quad \mathcal{D} := \mathcal{J}^{\frac{1}{N}} \implies \ddot{\mathcal{D}} + \left(\frac{K|\dot{\gamma}|^2}{N} \right) \mathcal{D} \leq 0.$$

L'équivalence entre (5) et (6) est une manifestation de la dualité entre points de vue eulérien et lagrangien ; l'une ou l'autre de ces inégalités peut se prouver avec le formalisme des champs de Jacobi [Vil, Chapitre 14]. Les conditions $\text{CD}(K, N)$ fournissent un cadre naturel à toutes sortes d'inégalités fonctionnelles et géométriques, comme on le voit par exemple dans l'ouvrage de synthèse de Bakry, Gentil et Ledoux [BGL].

Remarque 1.5. — Le Théorème 1.1 fait usage de la sphère comme espace de référence en courbure strictement positive ; d'autres géométries de référence classiques sont, bien entendu, l'espace euclidien (courbure nulle) et l'espace hyperbolique (courbure strictement négative). Chacun de ces espaces correspond à une valeur $N \in \mathbb{N}$, et est équipé de sa mesure volume. Il existe une autre famille d'espaces de référence qui ont un sens pour toute valeur de $N \in [1, \infty]$ (sauf $N = 1$ et $K \neq 0$) ; ces espaces $X^{K,N}$ sont obtenus en considérant la droite réelle, munie de sa structure euclidienne habituelle, et d'une mesure qui n'est pas forcément celle de Lebesgue : $X^{K,N} = (\mathbb{E}^1, v(x) dx)$, où $v(x) = \cos^{N-1}(\lambda x) 1_{|x| < \pi/(2\lambda)}$, $\lambda = \sqrt{K/(N-1)}$, quand $K/(N-1) > 0$; $v(x) = \cosh^{N-1}(\lambda x)$ $\lambda = \sqrt{|K|/(N-1)}$, quand $K/(N-1) < 0$; $v(x) = x^{N-1} 1_{x > 0}$ quand $K = 0$ et $N < \infty$; $v(x) = e^{-Kx^2/2}$ quand $N = \infty$. (Quand $N \in \mathbb{N}$, on peut voir $X^{K,N}$ comme la projection d'une sphère sur l'un de ses axes ; en particulier, le profil isopérimétrique de $X^{K,N}$ est le même que celui de $S^{K,N}$.) Milman [Mi] effectue une discussion plus détaillée incluant non seulement l'inégalité de courbure-dimension, mais aussi une borne sur le diamètre.

Remarque 1.6. — Dans le droit fil des remarques 1.4 et 1.5, l'inégalité de Lévy–Gromov peut se généraliser à toute variété riemannienne vérifiant le critère de courbure-dimension $\text{CD}(K, N)$ avec $K > 0$, y compris pour $N = \infty$ [BL, Mi] ; et l'on peut aussi traiter $K \leq 0$ si l'on impose une borne sur le diamètre [BeBG, Mi].

Remarque 1.7. — On peut mettre en regard le principe de comparaison de Lévy–Gromov (en courbure minorée) avec la conjecture de Cartan–Hadamard (en courbure majorée). Cette dernière postule que le profil isopérimétrique *non normalisé* des variétés *simplement connexes* de dimension n et de courbures sectionnelles négatives (resp. $\leq \kappa < 0$) est minoré par celui de l'espace euclidien \mathbb{E}^n (resp. de l'espace hyperbolique de dimension n et courbure κ). Je ne dirai rien de plus sur cette conjecture, si ce n'est qu'une étude récente l'aborde par le transport optimal [KK].

PREUVE DU THÉORÈME 1.1 — Soit A un sous-ensemble mesurable de M , et soit $\alpha = \nu[A]$. Si $\alpha \in \{0, 1\}$ on a $\sigma^+[B] = 0$, et la conclusion est évidente ; on supposera donc $0 < \alpha < 1$. La théorie géométrique de la mesure assure que, parmi tous les ensembles mesurables A' tels que $\nu[A'] = \alpha$, il en existe au moins un, disons A_0 , qui minimise

$\nu^+[\partial A]$; de plus les théorèmes de régularité d’Almgren [A] assurent que A_0 est lisse en dehors d’un ensemble singulier $(\partial A_0)^s \subset \partial A_0$, négligeable (vide si $n \leq 7$, de dimension au plus $n - 8$ si $n \geq 8$). En outre,

(a) la courbure moyenne de A_0 , mesurée le long de la partie régulière de ∂A_0 , est constante;

(b) l’ensemble singulier $(\partial A_0)^s$ peut être caractérisé comme l’ensemble des points de ∂A_0 en lesquels le cône (positif) tangent à A_0 n’est pas inclus dans un demi-espace;

(c) $\nu^+[\partial A_0] = \nu^+[\partial(M \setminus A_0)]$, et la mesure ν^+ induite sur ∂A_0 par A_0 ou par $M \setminus A_0$ est la même;

(d) $\nu^+[(\partial A_0)^s] = 0$.

Avant de commenter ces propriétés, notons w la fonction normale intérieure à A_0 : elle est définie globalement sur ∂A_0 en dehors de l’ensemble singulier $(\partial A_0)^s$.

On rappelle que la courbure moyenne η quantifie la variation de la surface vis-à-vis de petites déformations. Plus précisément, soit A un sous-ensemble mesurable d’une variété M de dimension n ; comme la notion est locale, on supposera même que $M = \mathbb{E}^n$. Soit x_0 un point régulier de ∂A , O un voisinage de x où ∂A s’écrit comme un graphe, f une fonction lisse définie sur ∂A , alors dans O on pourra écrire, pour $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$\text{vol}^+[\partial(A + \varepsilon f w)] = \text{vol}^+[\partial A] - (n - 1) \varepsilon \int_{\partial A} f(x) \eta(x) \nu^+(dx) + o(\varepsilon).$$

On généralise ainsi la notion de courbure extrinsèque introduite par S. Germain pour une surface plongée dans \mathbb{E}^3 , à savoir la moyenne des deux courbures principales.

On rappelle également la notion de cône tangent; là aussi, on se contente de la définir pour un sous-ensemble de l’espace euclidien. Soient donc $A \subset \mathbb{E}^n$, $x \in \partial A$; on appelle direction tangente à A , issue de x , un vecteur unitaire v qui est limite d’une suite $(y_k - x)/|y_k - x|$ avec $y_k \in A$, $y_k \neq x$, $y_k \rightarrow x$. Le cône tangent à A en x est alors l’ensemble des demi-droites issues de x et dirigées par une de ces directions tangentes. En un point régulier, le cône tangent est un demi-espace; pour une singularité “sortante”, il pourra être strictement inclus dans un demi-espace (penser au coin d’un cube). En revanche, un cône à deux nappes n’est inclus dans aucun demi-espace, et on peut dire qu’il est “de part et d’autre de la singularité”. Le résultat d’Almgren dit qu’un ensemble minimisant est situé de part et d’autre de n’importe lequel de ses points singuliers; cela nous rappelle que l’archétype d’une telle singularité est le cône minimal $x_1^2 + \dots + x_4^2 = x_5^2 + \dots + x_8^2$ (équation de ∂A_0) en dimension 8.

On reprend maintenant le fil de la preuve. L’idée est de définir une fibration de A_0 par des géodésiques issues de points réguliers de ∂A_0 : à chaque $x \in A_0$ on ferait correspondre sa projection sur ∂A_0 . Cependant il pourrait se faire, a priori, que l’ensemble singulier de ∂A_0 corresponde à un ensemble de mesure positive dans A_0 ... Le lemme suivant, basé sur la caractérisation (b) ci-dessus, écarte cette possibilité.

LEMME 1.8. — *Pour presque tout $x \in M$, la distance entre x et ∂A_0 est atteinte en un unique point régulier $y \in \partial A_0$, que l'on appellera projection géodésique de x sur ∂A_0 . La géodésique joignant y à x est orthogonale à ∂A_0 .*

Donc, pour presque tout $x \in M$ on trouve une unique projection géodésique y sur ∂A_0 , et c'est un point régulier. Si $x \in A_0$ on a $x = \exp_y(Lw(y))$, si $x \in M \setminus A_0$ on a $x = \exp_y(-Lw(y))$, avec dans les deux cas $L = d(x, y)$.

Pour tout y point régulier de ∂A_0 , définissons maintenant les temps de coupure $t_C^\pm(y)$ comme ceux où la géodésique issue de y avec vitesse $\pm w(y)$ cesse d'être minimisante :

$$t_C^\pm(y) = \sup \left\{ T > 0; \text{ pour tout } t \in [0, T[, \right. \\ \left. \exp_y(\pm tw(y)) \text{ admet } y \text{ pour projection géodésique} \right\}.$$

L'application $F : (t, z) \mapsto \exp_z(tw(z))$ est bien définie et lisse dans $]t_C^-(z), t_C^+(z)[, z\}$ pour $z \in \partial A_0$ au voisinage de chaque point régulier y ; on l'appellera application exponentielle issue orthonormalement de ∂A_0 . Elle atteint tout A_0 et tout $M \setminus A_0$ à un ensemble négligeable près. D'où les formules

$$(8) \quad \nu[A_0] = \int_{\partial A_0} \int_0^{t_C^+(y)} \mathcal{J}(y, t) dt \nu^+(dy), \\ \nu[M \setminus A_0] = \int_{\partial A_0} \int_0^{t_C^-(y)} \mathcal{J}(y, -t) dt \nu^+(dy),$$

où les intégrales sur ∂A_0 sont restreintes aux points réguliers, et $\mathcal{J}(y, t)$ est le déterminant jacobien de l'application $F(t, \cdot)$ en y . (C'est un résultat classique que $\mathcal{J}(y, t)$ reste strictement positif pour $t \in]-t_C^-(y), t_C^+(y)[$.)

Pour estimer le déterminant jacobien, on peut appliquer le principe de comparaison de Heintze–Karcher [HK], qui en fait était déjà connu de Lévy dans ce cas particulier :

LEMME 1.9. — *Dans une variété M de dimension n , vérifiant $\text{Ric} \geq Kg$, $K > 0$, soit H une hypersurface orientée de courbure moyenne constante égale à η . Alors, pour $t \geq 0$, le déterminant jacobien de l'application exponentielle issue orthonormalement de H vérifie*

$$\mathcal{J}(x, t) \leq \mathcal{J}_\eta(t),$$

où $\mathcal{J}_\eta(t)$ est le déterminant jacobien de l'application exponentielle sur la sphère $S^{K,n}$, issue orthonormalement de ∂B_η , et B_η est la boule de courbure moyenne η dans la sphère de référence $S^{K,n}$. Cette inégalité a lieu pour tout t inférieur ou égal au rayon de B_η .

Définissons maintenant

$$R(A_0) = \sup_{x \in A_0} d(x, \partial A_0) = \sup_{y \in \partial A_0} t_C^+(y);$$

on a une formule similaire pour $R(M \setminus A_0)$ en changeant simplement t_C^+ en t_C^- . Par ailleurs, $R(B_\eta)$ coïncide avec le rayon de B_η au sens usuel, et $S \setminus B_\eta$ n'est autre que $B_{-\eta}$. Tout pris en compte,

$$R(A_0) \leq R(B_\eta), \quad R(M \setminus A_0) \leq R(B_{-\eta}).$$

Combinant cela avec le Lemme 1.9, on conclut que

$$\begin{aligned} \nu[A_0] &\leq \nu^+[\partial A_0] \int_0^{R(B_\eta)} \mathcal{J}_\eta(t) dt = \nu^+[\partial A_0] \left(\frac{\sigma[B_\eta]}{\sigma^+[\partial B_\eta]} \right), \\ \nu[M \setminus A_0] &\leq \nu^+[\partial A_0] \int_0^{R(B_{-\eta})} \mathcal{J}_{-\eta}(t) dt = \nu^+[\partial A_0] \left(\frac{\sigma[B_{-\eta}]}{\sigma^+[\partial B_{-\eta}]} \right). \end{aligned}$$

(On a utilisé $\nu^+[\partial(M \setminus A_0)] = \nu^+[\partial A_0]$.) Donc

$$\begin{aligned} \nu^+[\partial A_0] &\geq \max \left(\nu[A_0] \frac{\sigma^+[\partial B_\eta]}{\sigma[B_\eta]}, \nu[M \setminus A_0] \frac{\sigma^+[\partial B_{-\eta}]}{\sigma[B_{-\eta}]} \right) \\ &= \max \left(\alpha \frac{\mathcal{I}_S(v)}{v}, (1 - \alpha) \frac{\mathcal{I}_S(1 - v)}{1 - v} \right), \end{aligned}$$

où $v = \sigma[B_\eta]$ et \mathcal{I}_S est la fonction $\sigma[B_\eta] \mapsto \sigma^+[\partial B_\eta]$. (Il résultera de la preuve que \mathcal{I}_S est bien le profil isopérimétrique de S .)

LEMME 1.10. — Si $S = S^{K,N}$ est la sphère de référence de paramètres K et N , alors la fonction \mathcal{I}_S vérifie l'inégalité différentielle

$$(9) \quad \mathcal{I}_S'' \mathcal{I}_S + \frac{(\mathcal{I}_S')^2}{N - 1} + K = 0.$$

En particulier, \mathcal{I}_S est concave. (C'est un cas très particulier d'un théorème bien plus délicat, selon lequel le profil isopérimétrique normalisé d'une variété compacte de courbure positive est concave.) Comme par ailleurs $\mathcal{I}_S(0) = \mathcal{I}_S(1) = 0$, et $\mathcal{I}(1 - v) = \mathcal{I}(v)$, on conclut que pour tout $v \in [0, 1]$,

$$\max \left(\alpha \frac{\mathcal{I}_S(v)}{v}, (1 - \alpha) \frac{\mathcal{I}_S(1 - v)}{1 - v} \right) \geq \mathcal{I}_S(\alpha).$$

(Écrire v comme combinaison convexe, soit de 0 et α si $v < \alpha$, soit de α et 1 si $v > \alpha$.) Enfin on achève la preuve du Théorème 1.1 en se rappelant que, par construction, $\nu^+[\partial A] \geq \nu^+[\partial A_0]$. \square

Remarque 1.11. — Comme on l'a vu, la preuve repose de façon importante sur les résultats de régularité subtils dus à Almgren. En fait, Lévy considérait le problème variationnel $\inf \{ \nu[A^\varepsilon]; \nu[A] = \alpha \}$; mais l'existence d'un ensemble minimisant suffisamment régulier n'est alors pas garantie, alors que pour la minimisation de la surface on a accès à de bons théorèmes de régularité. (Gromov crédite Allard pour avoir fourni les références pertinentes dans ce domaine.) Cependant, le profil isopérimétrique est une notion qui ne demande pas ou presque pas de régularité [HLMM], et qui est même

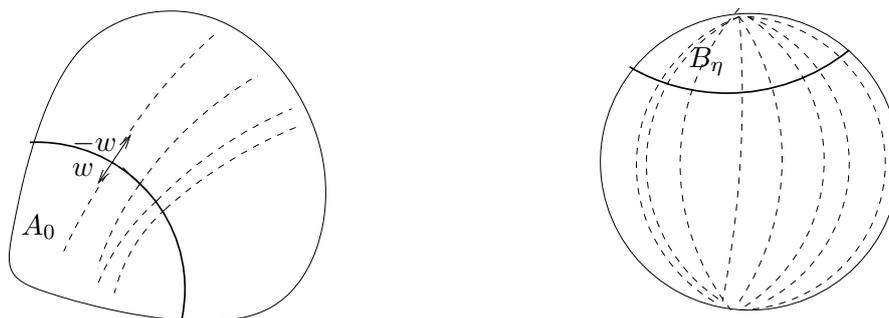


FIGURE 1. Principe de la preuve de Lévy–Gromov : A_0 est un minimiseur pour l’isopérimétrie dans M ; w est la normale le long de ∂A_0 ; on recouvre M par des courbes issues du bord de A_0 avec vitesse $\pm w$. Dans la sphère de référence, B_η est une boule de même courbure moyenne que A_0 ; et l’on recouvre la sphère par des courbes issues de ∂B_η .

stable pour des topologies n’exigeant aucune régularité, comme la topologie de Gromov–Hausdorff mesurée. (Plus précisément [G7], si $M_k \rightarrow M$ dans cette topologie, et que pour tout k on a $\mathcal{I}_{M_k} \geq f$, où f est une fonction croissante continue sur $[0, 1/2]$, alors $\mathcal{I}_M \geq f$.) On est donc en droit de souhaiter une preuve qui s’applique dans un cadre bien plus général. Un autre point saillant de la preuve est que l’on ne travaille pas directement sur l’ensemble A , mais sur un ensemble extrémal A_0 ; même si cela est bien sûr légitime, il serait intéressant, par exemple pour mieux comprendre les termes d’erreur, de pouvoir manipuler A directement. Dans la suite de l’exposé nous verrons comment remplir ces deux objectifs.

Pour finir, on présente brièvement les preuves des lemmes auxiliaires utilisés dans la démonstration du Théorème 1.1. Le premier relève de l’analyse non lisse, le second de la géométrie riemannienne, et le dernier d’un calcul « explicite » dans l’espace modèle. PREUVE DU LEMME 1.8 — Le début du raisonnement est classique. Soit $x \in M$, soit $y \in \partial A_0$ tel que $d(x, \partial A_0) = d(x, y)$, et soit γ une géodésique de vitesse constante unitaire, de longueur $L = d(x, y)$, joignant $y = \gamma(0)$ à $x = \gamma(L)$. La définition de la distance à ∂A_0 et la classique formule de variation des distances montrent que pour $x' \simeq x$,

$$d(x', \partial A_0) \leq d(x', y) \leq d(x, y) + \langle \dot{\gamma}(L), x' - x \rangle + o(d(x, x')),$$

où le produit scalaire est fourni par g_x , et j’ai noté abusivement $x' - x$ le vecteur z de norme minimale tel que $\exp_x z = x'$ (dans une carte, z est bien égal à $x' - x$, à des corrections d’ordre supérieur près). Le vecteur $\dot{\gamma}(L)$ est donc un sur-gradient de la fonction $f : x \mapsto d(x, \partial A_0)$.

Cependant, f est lipschitzienne (et même semi-concave), donc différentiable en dehors d’un ensemble négligeable \mathcal{N} . Pour tout $x \in M \setminus \mathcal{N}$, la fonction f admet un unique sur-gradient en x (c’est le gradient) ; cela détermine uniquement $\dot{\gamma}(L)$ et donc γ .

La sphère géodésique \mathcal{S} centrée en $\gamma(L/2)$, de rayon $L/2$, intersecte donc ∂A_0 seulement en y ; il s’ensuit que le cône tangent à A_0 en y est inclus dans le demi-espace

tangent extérieurement à \mathcal{S} . (Noter que y n'est pas situé dans le lieu de coupure de $\gamma(L/2)$, car sinon $\gamma(L/2)$ serait situé dans le lieu de coupure de y .) Comme A_0 est un ensemble minimisant, on conclut de la propriété (b) que y est un point régulier. \square

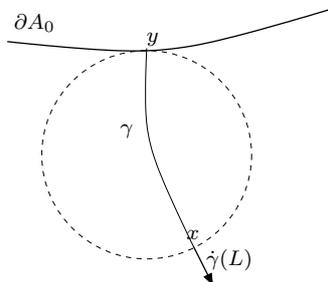


FIGURE 2. Preuve de ce que presque toute projection y sur ∂A_0 est un point régulier : la sphère géodésique de diamètre $\gamma([0, L])$ est tangente à ∂A_0 .

PREUVE DU LEMME 1.9 (esquisse) — Soit $\gamma(t, x)$ l'application géodésique orthonormale issue de H . On peut écrire $\gamma(t, x) = \exp_x(-t\nabla_x d(x, \partial H))$, où d est la distance signée à H (bien définie par l'orientation). La différentielle de $\gamma(t, x)$ dans la variable x s'identifie à une matrice $(n-1) \times (n-1)$ de champs de Jacobi (ou variations de géodésiques), notée $J(t)$ et vérifiant l'équation différentielle de Jacobi; c'est le même calcul que pour le déterminant jacobien d'une application de la forme $\exp_x(t\nabla\psi(x))$, sauf que l'on ne considère que des variations tangentes à H , donc orthogonales à la direction du mouvement géodésique. Le déterminant de $J(t)$, que je noterai \mathcal{J}^\perp (c'est le \mathcal{J}_\perp de [Vi1, Chapitre 14]), n'est autre que le déterminant jacobien de l'application exponentielle issue orthonormalement de H , et mesure la distortion « transversale au mouvement ». On prouve, au moyen de l'équation de Jacobi,

$$(10) \quad \frac{d^2}{dt^2} (\mathcal{J}^\perp)^{\frac{1}{n-1}} + \frac{K}{n-1} (\mathcal{J}^\perp)^{\frac{1}{n-1}} \leq 0,$$

avec égalité pour la sphère $S^{K,n}$. Par ailleurs, la courbure moyenne s'exprime (à un facteur de normalisation près) comme la dérivée initiale de ce déterminant jacobien :

$$(11) \quad \mathcal{J}^\perp(x, 0) = 1; \quad \eta = -\frac{1}{n-1} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{J}^\perp(x, t).$$

Pour conclure, il suffit de noter que l'inégalité différentielle $\ddot{f} + \Lambda f \leq 0$ vérifie un principe de comparaison :

$$\ddot{f} + \Lambda f \leq \ddot{g} + \Lambda g, \quad f(0) = g(0), \quad \dot{f}(0) = \dot{g}(0) \quad \implies f(t) \leq g(t)$$

tant que $g(t)$ reste positif. On peut donc comparer les quantités $(\mathcal{J}^\perp)^{\frac{1}{n-1}}$ sur H et sur ∂B_η , jusqu'à l'annulation de \mathcal{J}_η . Sur ∂B_η , le temps de coupure coïncide avec le premier temps où le déterminant jacobien s'annule, et c'est aussi le rayon de B_η . Ceci achève la preuve. \square

PREUVE DU LEMME 1.10 — On note $\mathcal{I} = \mathcal{I}_S$. Soient $R = (\pi/2)\sqrt{(N-1)/K}$ et $f(x) = \cos^{N-1}(\sqrt{K/(N-1)}x)/Z$, où $Z = Z(K, N)$ est choisi de sorte que $\int_{-R}^R f = 1$.

On pose $F(x) = \int_{-R}^x f(s) ds$: c'est le volume normalisé d'une calotte sphérique de rayon $x + R$ dans $S^{K,N}$, et la définition de \mathcal{I} implique $\mathcal{I}(F(x)) = f(x)$. En dérivant on obtient $\mathcal{I}'(F(x)) = f'(x)/f(x) = -\sqrt{K(N-1)} \tan(\sqrt{K/(N-1)} x)$, et en dérivant à nouveau, $\mathcal{I}''(F(x))f(x) = -K[1 + \tan^2(\sqrt{K/(N-1)} x)] = -K[1 + \mathcal{I}'(F(x))^2/(K(N-1))]$, ce qui établit l'équation souhaitée. On note que la même inégalité différentielle est vérifiée dans l'espace modèle $X^{K,N}$ de la Remarque 1.5. \square

2. THÉORIE SYNTHÉTIQUE DE LA COURBURE DE RICCI

À partir du milieu des années 2000, plusieurs théories se sont développées pour capturer les propriétés fondamentales de la courbure de Ricci dans un cadre non lisse. Au lieu d'utiliser des exponentielles riemanniennes de champs de vecteurs, ces méthodes reposaient sur le transport optimal entre mesures : une méthode « non lisse » pour engendrer des familles de géodésiques. On peut distinguer deux approches principales, étroitement liées :

(a) l'étude de l'évolution de la concentration le long du transport optimal, prenant la distance et le volume comme éléments de base ;

(b) l'étude du taux de contraction du flot de la chaleur en distance de transport optimal, prenant la distance et l'équation de diffusion comme éléments de base.

Dans un cadre lisse, l'article de Sturm et Von Renesse [SvR] présentait de nombreux critères relevant des catégories (a) ou (b). Par la suite c'est l'approche (a) qui a été la plus étudiée et je m'y limiterai ici ; je noterai seulement que pour les espaces métriques « riemanniens » l'équivalence entre les deux approches a été soigneusement établie [BGGK].

Dans cette section, je vais résumer à grands traits une décennie de recherche en la matière, renvoyant à l'article de synthèse [Vi2] pour un survol historique un peu plus large. Par simplicité, et parce que ce cadre suffira pour l'inégalité de Lévy–Gromov, je me limiterai, sauf mention expresse, à des espaces métriques compacts ; cependant la théorie peut se développer dans les espaces métriques localement compacts et σ -compacts [AGMR, LV, Vi1].

2.1. Principe et heuristique

Commençons par quelques définitions. Un espace géodésique (\mathcal{X}, d) est un espace métrique dans lequel deux points quelconques sont reliés par au moins une géodésique, c'est-à-dire une courbe lipschitzienne $\gamma : [0, 1] \rightarrow (\mathcal{X}, d)$ dont la longueur $L(\gamma)$ coïncide avec la distance $d(\gamma(0), \gamma(1))$. On rappelle que

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt, \quad |\dot{\gamma}(t)| := \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{d(\gamma(t), \gamma(t + \varepsilon))}{\varepsilon}.$$

On parle d'**espace géodésique mesuré** quand on adjoint à un espace géodésique (\mathcal{X}, d) une mesure de Borel finie sur les compacts. Un cas particulier est celui d'une

variété riemannienne complète que l'on munit de sa distance géodésique et de son volume riemannien.

Soit (\mathcal{X}, d, ν) un espace géodésique mesuré ; on note $P(\mathcal{X})$ l'espace des mesures de probabilité boréliennes sur (\mathcal{X}, d) , et $P^{\text{ac}}(\mathcal{X})$ le sous-espace fait des mesures absolument continues par rapport à ν . On introduit alors sur $P(\mathcal{X})$:

- une notion de concentration relative à ν : l'information de Boltzmann–Shannon,

$$H_\nu(\mu) = \int \rho \log \rho \, d\nu, \quad \rho = \frac{d\mu}{d\nu}$$

(on posera $H_\nu(\mu) = +\infty$ si μ n'est pas absolument continue) ;

- une notion de distance entre mesures :

$$(12) \quad W_p(\mu_0, \mu_1) = \left[\inf_{\pi \in \Pi(\mu_0, \mu_1)} \iint d(x_0, x_1)^p \pi(dx_0 dx_1) \right]^{1/p},$$

où $\Pi(\mu_0, \mu_1)$ est l'espace des $\pi \in P(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ dont les marginales (projections) sont μ_0 et μ_1 , et $p \in [1, \infty[$ est un paramètre. Aussi bien pour la théorie que pour les applications, ce sont les cas $p = 1$ et $p = 2$ qui ont, de très loin, retenu le plus d'attention. On notera $P_p(\mathcal{X}) = (P(\mathcal{X}), W_p)$; si (\mathcal{X}, d) est un espace géodésique il en va de même de $P_p(\mathcal{X})$ [Vi1, Chapitre 7].

Le problème de minimisation qui apparaît dans (12) est appelé **problème de Monge–Kantorovich**, ou problème de transport optimal ; on le notera (MK_p) . Pour le cas $p = 1$ il remonte à Monge [Mo]. Dans l'interprétation habituelle, il s'agit de transporter une distribution de masse μ_0 pour la faire coïncider avec une distribution prescrite μ_1 , et d'effectuer ce réarrangement au moindre coût total, sachant que le transport d'une unité de masse de x_0 vers x_1 coûte $d(x_0, x_1)^p$.

C'est à partir d'une note de Brenier [Br] que le transport optimal s'est développé spectaculairement en un sujet particulièrement multiforme de l'analyse, en lien avec le calcul des variations, la géométrie, les probabilités, les systèmes dynamiques, et les équations aux dérivées partielles [Sa, Vi1].

On peut voir le transport optimal sous l'angle de l'appariement (trouver π , la distribution jointe des couples (x_0, x_1)), ou sous l'angle de l'interpolation (trouver le chemin $(\mu_t)_{0 \leq t \leq 1}$ dans $P(\mathcal{X})$ qui permettra à la mesure μ_0 de se réarranger progressivement, sous l'action du transport optimal, en la mesure μ_1). Ce sont deux faces du même problème [Vi1, Chapitre 7] : pour passer de (μ_t) à π , ou vice-versa, on cherche un transport dynamique, c'est-à-dire une mesure $\Pi \in P(C([0, 1], \mathcal{X}))$, concentrée sur des courbes géodésiques, telle que $(e_t)_\# \Pi = \mu_t$, $(e_0, e_1)_\# \Pi = \pi$; ici e_t est la fonction évaluation au temps t , $e_t(\gamma) = \gamma(t)$. Si π est optimal au sens de (12) et que Π est porté par des courbes géodésiques, on parlera de **transport optimal dynamique** au sens (MK_p) . L'interpolation $(\mu_t)_{0 \leq t \leq 1}$ est alors une géodésique dans $P_p(\mathcal{X})$.

Nous pouvons maintenant introduire la notion de « courbure positive » dans les espaces métriques mesurés. La définition suivante est un cas particulier archétypal des notions plus générales à venir :

DÉFINITION 2.1 (critère $\text{CD}(0, \infty)$ métrique-mesuré). — On dit qu'un espace géodésique mesuré (\mathcal{X}, d, ν) vérifie $\text{CD}(0, \infty)$ si pour tous $\mu_0, \mu_1 \in P(\mathcal{X})$ il existe une géodésique $(\mu_t)_{0 \leq t \leq 1}$ dans $P_2(\mathcal{X})$ telle que

$$(13) \quad \forall t \in [0, 1] \quad H_\nu(\mu_t) \leq (1-t)H_\nu(\mu_0) + tH_\nu(\mu_1).$$

• Si cette inégalité a lieu pour toute géodésique $(\mu_t)_{0 \leq t \leq 1}$, on dit que (\mathcal{X}, d, ν) est fortement $\text{CD}(0, \infty)$; $H_\nu(\mu_t)$ est alors une fonction convexe de t .

• Si pour tout x_* cette inégalité a lieu dès que μ_0, μ_1 ont leur support dans un voisinage de x_* assez petit, alors on dit que (\mathcal{X}, d, ν) est localement $\text{CD}(0, \infty)$, ce que l'on note $\text{CD}_{\text{loc}}(0, \infty)$.

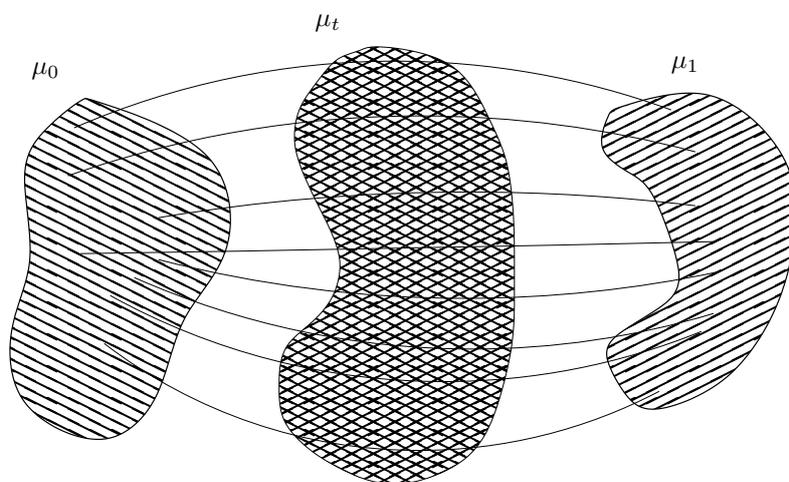


FIGURE 3. Transport (MK_2) en courbure positive : la mesure μ_t , qui interpole entre μ_0 et μ_1 , est plus « étalée » au sens de l'information de Boltzmann.

Remarque 2.2. — Le choix $p = 2$ ci-dessus (dans la définition de P_p) est réminiscent de la nature quadratique de la géométrie riemannienne.

Remarque 2.3. — Cette définition utilise l'information de Boltzmann pour mesurer la dispersion de la masse : si les géodésiques se rapprochent, la concentration augmente et H_ν aussi. En courbure positive, les géodésiques ont tendance à diverger avant de reconverger, ce que capture la définition au travers de l'inégalité de convexité pour H_ν .

Remarque 2.4. — Si (\mathcal{X}, d, ν) est une variété riemannienne munie de sa distance géodésique et d'une mesure $\nu(dx) = e^{-V(x)} \text{vol}(dx)$, alors la Définition 2.1 est équivalente au critère classique $\text{Ric} + \nabla^2 V \geq 0$ [Vi1, Chapitre 17].

Remarque 2.5. — La Définition 2.1 est « synthétique » en ce qu'elle ne nécessite pas le calcul de la courbure, ne demande pas de régularité, et n'utilise aucune structure au-delà de celles de distance géodésique et de mesure. Elle est stable par convergence de Gromov–Hausdorff mesurée [Vi1, Chapitre 29], une topologie très flexible sur les espaces métriques mesurés qui prend seulement en compte la convergence des distances

et des mesures [Gr2, Chapitre 3 $\frac{1}{2}$] [Vi1, Chapitre 27]. En fait, la Définition 2.1 est essentiellement la seule approche « intrinsèque » connue pour rendre compatibles la courbure de Ricci et la topologie de Gromov–Hausdorff mesurée.

2.2. Définitions générales

Pour généraliser la Définition 2.1, deux possibilités majeures se sont dégagées :

(a) *conserver la fonction H et modifier l'inégalité de convexité [EKS]* ; pour cela, on remplace l'interpolation linéaire $\Psi_t(h_0, h_1) = (1-t)h_0 + th_1$ par l'interpolation non linéaire

$$(14) \quad \Psi_t^{K,N}(h_0, h_1, \sigma) = h(t), \quad \ddot{h} - \frac{\dot{h}^2}{N} = K\sigma, \quad h(0) = h_0, \quad h(1) = h_1.$$

(Le paramètre σ sera égal au carré de la vitesse de la géodésique dans P_2 , c'est-à-dire au carré de la distance W_2 entre μ_0 et μ_1 .)

(b) *conserver l'inégalité de convexité et changer la fonction H [St]* ; pour cela on inclura dans la fonctionnelle une notion de dimension, à travers le choix de la non-linéarité, et une notion de courbure, par l'usage de « coefficients de distortion » $\beta_t(x, y) \geq 0$ qui comparent l'évolution du volume infinitésimal, au cours du trajet de x à y , à celle qui a lieu dans l'espace euclidien. Si U est une fonction convexe vérifiant $U(0) = 0$, $\pi \in P(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ et $\mu \in P(\mathcal{X})$, on définit donc

$$(15) \quad U_{\pi, \nu}^{\beta}(\mu) = \int U \left(\frac{\rho(x)}{\beta(x, y)} \right) \beta(x, y) \pi(dy|x) \nu(dx) + U'(\infty) \mu_s[\mathcal{X}], \quad \mu = \rho\nu + \mu_s,$$

où μ_s est la partie singulière de μ par rapport à ν . Pour U , le choix qui s'impose, en fonction de la dimension N , est $U_N(r) = Nr(1 - r^{-1/N})$ (noter que $U_N(r) \rightarrow r \log r$ quand $N \rightarrow \infty$). Le rôle particulier des fonctions U_N remonte à la thèse de McCann [McC1] : il y était démontré qu'elles correspondent à la non-linéarité limite compatible avec une évolution convexe le long du transport optimal dans \mathbb{E}^N . Pour ce qui est des coefficients β , on a deux choix naturels :

- soit les coefficients de distortion de l'espace de référence : par exemple, pour $K > 0$ et $N < \infty$, ce sera

$$(16) \quad \beta_t^{K,N}(x, y) = \left(\frac{\sin(t\alpha)}{t \sin \alpha} \right)^{N-1}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{K}{N-1}} d(x, y);$$

- soit les coefficients de distortion estimés à partir de l'inégalité (6) :

$$(17) \quad \beta_t^{*K,N}(x, y) = \left(\frac{\sin(t\alpha)}{t \sin \alpha} \right)^N, \quad \alpha = \sqrt{\frac{K}{N}} d(x, y).$$

Les coefficients β^* sont sous-optimaux, mais ont le bon goût d'être associés à l'équation différentielle linéaire (7). Plus précisément, dire que (7) est vérifié le long d'une géodésique γ de vitesse constante est équivalent à dire que pour toute sous-géodésique $\tilde{\gamma}$ (c'est-à-dire la reparamétrisation par $[0, 1]$ de la restriction de γ à un intervalle $[t_0, t_1] \subset [0, 1]$),

quitte à reparamétriser également $\mathcal{J}|_{[t_0, t_1]}$ par $[0, 1]$ on a

$$\forall t \in [0, 1], \quad \mathcal{J}(t)^{\frac{1}{N}} \geq (1-t) \left[\beta_{1-t}^{*K, N}(\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1) \mathcal{J}(0) \right]^{\frac{1}{N}} + t \left[\beta_t^{*K, N}(\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1) \mathcal{J}(1) \right]^{\frac{1}{N}}.$$

(Voir [Vi1, Théorème 14.28] pour une preuve dans un contexte lisse; le cas général peut se traiter par régularisation.) Dans la définition suivante on notera $\tilde{\pi} = S_{\#}\pi$, avec $S(x, y) = (y, x)$ (échange des variables); et on se limitera au cas délicat $N < \infty$.

DÉFINITION 2.6. — Soient $N \in [1, \infty[$ et $K \in \mathbb{R}$. On dit qu'un espace géodésique mesuré compact (\mathcal{X}, d, ν) vérifie la propriété $\text{CD}(K, N)$ (resp. $\text{CD}^*(K, N)$, $\text{CD}^e(K, N)$) si pour tous $\mu_0, \mu_1 \in P(\mathcal{X})$ il existe une géodésique $(\mu_t)_{0 \leq t \leq 1}$ dans $P_2(\mathcal{X})$, et un transport optimal π associé, tels que pour tout $t \in [0, 1]$,

- pour $\text{CD}(K, N)$: $U_N(\mu_t) \leq (1-t) U_{N, \tilde{\pi}, \nu}^{\beta_{1-t}^{*K, N}}(\mu_0) + t U_{N, \tilde{\pi}, \nu}^{\beta_t^{*K, N}}(\mu_1)$;
- pour $\text{CD}^*(K, N)$: $U_N(\mu_t) \leq (1-t) U_{N, \tilde{\pi}, \nu}^{\beta_{1-t}^{*K, N}}(\mu_0) + t U_{N, \tilde{\pi}, \nu}^{\beta_t^{*K, N}}(\mu_1)$;
- pour $\text{CD}^e(K, N)$: $H_\nu(\mu_t) \leq \Psi_t^{K, N}(H_\nu(\mu_0), H_\nu(\mu_1); W_2(\mu_0, \mu_1)^2)$.

Si l'inégalité a lieu pour toute géodésique (μ_t) , on dit que l'espace vérifie la propriété $\text{CD}(K, N)$ (resp. $\text{CD}^*(K, N)$, $\text{CD}^e(K, N)$) forte. En particulier, la propriété $\text{CD}^e(K, N)$ forte implique que $h(t) := H_\nu(\mu_t)$ vérifie l'inégalité différentielle

$$\ddot{h}(t) - \frac{(\dot{h})^2}{N} \geq K |\dot{h}(t)|^2 = K W_2(\mu_0, \mu_1)^2.$$

On introduit les versions locales CD_{loc} de ces inégalités comme dans la Définition 2.1.

PROPOSITION 2.7 (Compatibilité avec le cadre lisse, [BS, DS, EKS, LV, St, Vi1])

Les trois notions $\text{CD}(K, N)$, $\text{CD}^*(K, N)$ et $\text{CD}^e(K, N)$ coïncident avec la propriété classique $\text{CD}(K, N)$ si (\mathcal{X}, d, ν) est une variété riemannienne compacte munie d'une mesure de référence lisse. En outre, elles sont toutes trois stables par convergence de Gromov–Hausdorff mesurée.

Remarque 2.8. — On voit bien sur la formulation $\text{CD}^e(K, N)$ que le transport optimal fournit un moyen d'écrire, en termes métriques et sous une forme intégrée, l'inégalité fondamentale (6) qui sous-tend, implicitement ou explicitement, toute la théorie de la courbure de Ricci.

Remarque 2.9. — À ce niveau de généralité les trois définitions sont acceptables, et ont leurs avantages et leurs inconvénients. La propriété $\text{CD}(K, N)$ implique $\text{CD}^*(K, N)$; mais l'usage des coefficients sous-optimaux $\beta_{\cdot}^{*K, N}$ reste légitime, comme le prouve la Proposition 2.7. En fait, il y a pour les variétés riemanniennes une frappante propriété d'auto-amélioration des coefficients de distortion : en dimension N , si les coefficients de distortion sont minorés par $\beta_{\cdot}^{*K, N}$, alors ils sont automatiquement minorés par $\beta^{K, N}$.

Remarque 2.10. — On peut espérer que les trois propriétés sont équivalentes sous des hypothèses minimales de régularité, telles que le non-branchement des géodésiques ; des résultats partiels en la matière ont déjà été obtenus [DS, EKS] et le résultat complet vient tout juste d’être annoncé par Cavalletti & Milman [CaMi], sans toutefois que la preuve ait pu encore être validée.

Pour conclure cette section, notons que nombre de propriétés découlant classiquement des bornes de courbure-dimension s’adaptent au cadre de la Définition 2.6 : inégalités de Bishop–Gromov, Brunn–Minkowski, Sobolev, Sobolev logarithmique, Poincaré L^2 , Talagrand, etc. [LV, St, Vi1]. Cela tient à ce que toutes ces propriétés peuvent se reformuler, directement ou indirectement, en termes de transport optimal.

2.3. Compatibilité avec la théorie de Cartan–Alexandrov–Toponogov

La théorie de Cartan–Alexandrov–Toponogov (CAT) est utilisée au moins depuis les années 80 pour encoder des bornes sectionnelles supérieures ou inférieures, à partir de relations géométriques faisant intervenir des distances ou des angles. Par exemple, on dira qu’un espace est de courbure positive au sens CAT si, étant donné un triangle géodésique ABC , la longueur de la médiane issue de A est au moins égale à la longueur de la médiane issue de A_0 dans un triangle isométrique $A_0B_0C_0$ tracé dans le plan. Un critère équivalent consiste à imposer que la somme des angles d’un triangle géodésique soit toujours supérieure ou égale à π . Par comparaison avec des sphères ou des espaces hyperboliques, on peut définir des notions de courbure minorée par κ ou majorée par κ , pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$; il existe une vaste littérature sur ce sujet qui est très bien présenté par Burago, Burago & Ivanov [BBI]. On note que les propriétés des espaces à courbure minorée (souvent appelés espaces d’Alexandrov) sont très différentes des propriétés des espaces à courbure majorée.

Dans un cadre lisse, la notion de courbure minorée au sens CAT est identique à celle de courbure sectionnelle minorée ; et comme la courbure de Ricci est une somme de courbures sectionnelles, les espaces d’Alexandrov de dimension finie vérifient automatiquement, quand ils sont lisses, des critères de courbure-dimension. Il était donc souhaitable que la théorie synthétique de la courbure-dimension inclue les espaces d’Alexandrov. C’est ce qu’a démontré Petrunin :

THÉORÈME 2.11 ([Pe]). — *Si (\mathcal{X}, d) est un espace d’Alexandrov compact à courbure minorée par $\kappa \in \mathbb{R}$ et à dimension de Hausdorff égale à n , alors $(\mathcal{X}, d, \mathcal{H}^n)$ est un espace fortement $\text{CD}^e((n-1)\kappa, n)$, où \mathcal{H}^n est la mesure de Hausdorff.*

En fait l’énoncé ci-dessus est démontré dans [Pe] seulement dans le cas où $\kappa = 0$, mais la preuve s’adapte aux autres situations ; en outre Zhang–Zhu [ZZ, Appendice A] proposent une démonstration complète d’un énoncé plus précis.

2.4. Compatibilité avec l'analyse des espaces métriques

Une autre tradition d'analyse non lisse a été développée dans le cadre des espaces métriques mesurés, en particulier par les écoles nordique et italienne [AT]. Elle utilise deux inégalités fondamentales :

- l'inégalité de doublement de la mesure : il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{X}$ et pour tout $r > 0$,

$$\nu[B_{2r}(x)] \leq C \nu[B_r(x)];$$

- l'inégalité de Poincaré L^1 locale : il existe $C > 0$ tel que pour tout $x > 0$ et tout $r > 0$, pour toute fonction $f \in L^1(\mathcal{X}, d, \nu)$,

$$(18) \quad \int_{B_r(x)} |f - \langle f \rangle_{x,r}| d\nu \leq \frac{C}{r} \int_{B_{2r}(x)} |\nabla f| d\nu.$$

Ici $\langle u \rangle_{x,r} = \int_{B_r(x)} u = \nu[B_r(x)]^{-1} \int_{B_r(x)} u d\nu$ et $|\nabla f| = \limsup_{y \rightarrow x} |f(y) - f(x)|/d(x, y)$. (Dans le jargon du domaine, l'inégalité (18) est l'inégalité de Poincaré (1,1) faible.)

Ici encore, la compatibilité est garantie :

THÉORÈME 2.12. — *Soit (\mathcal{X}, d, ν) un espace géodésique mesuré compact vérifiant la propriété $\text{CD}(K, N)$ (ou $\text{CD}^*(K, N)$, ou $\text{CD}^e(K, N)$) avec $K \in \mathbb{R}$ et $N < \infty$; alors il vérifie aussi les inégalités de doublement et de Poincaré L^1 locale.*

La partie délicate dans cette preuve est l'inégalité de Poincaré, due à Rajala [Ra1].

2.5. Semigroupe de la chaleur

La courbure de Ricci est fondamentalement associée aux équations de diffusion ; par exemple, ce sont les bornes de type $\text{CD}(K, N)$ qui permettent des estimations ponctuelles du noyau de la chaleur sur une variété riemannienne (inégalités de Li–Yau) ou garantissent l'existence d'un semigroupe conservatif de la chaleur dans une variété non bornée. Cette propriété reste vraie dans les espaces métriques :

THÉORÈME 2.13 (diffusion dans les espaces métriques, [AGS2, G2, GMS])

Soit (\mathcal{X}, d, ν) un espace géodésique mesuré compact vérifiant $\text{CD}(K, N)$ avec $K \in \mathbb{R}$ et $N \in [1, \infty]$. Alors il existe un unique semigroupe de la chaleur sur $P(\mathcal{X})$, défini de façon équivalente

- en termes de mesures, comme flot gradient en métrique W_2 de l'information H_ν ;
- ou en termes de densités, comme flot gradient dans la norme $L^2(\nu)$ de la fonctionnelle de Cheeger $\text{Ch}_*(f) = \frac{1}{2} \int |\nabla f|^2 d\nu$.

En outre, ce semigroupe est stable par convergence de Gromov–Hausdorff mesurée.

Remarque 2.14. — Dans l'énoncé ci-dessus, la fonctionnelle de Cheeger doit être définie avec de grandes précautions, selon la construction mise au point par Cheeger [Ch] et Shanmugalingam [Sh]. On renvoie à [AGS2] pour la mise en œuvre dans ce contexte.

Remarque 2.15. — L'idée originale du Théorème 2.13 remonte à l'article de Jordan–Kinderlehrer–Otto [JKO] qui a eu une influence considérable [Vi1, Vi2]. La première étude systématique de la construction des flots gradients abstraits dans l'espace des mesures remonte à Ambrosio–Gigli–Savaré [AGS1], tandis que la première adaptation de cette théorie au contexte des espaces métriques est due à Gigli–Kuwada–Ohta [GKO].

Remarque 2.16. — À ce niveau de généralité, et même si \mathcal{X} est une variété lisse (non riemannienne), le semigroupe de la chaleur peut être non linéaire.

2.6. Non-branchement et localité

Le succès de la propriété de courbure de Ricci minorée tient en partie à la possibilité de passer d'inégalités locales à des inégalités globales. (Il en va de même pour les minorations ou majorations des courbures sectionnelles, mais pas pour les majorations de la courbure de Ricci.) Dans un cadre métrique, ce passage du local au global ne va pas de soi sans hypothèses supplémentaires. Les hypothèses de non-branchement sont les plus économiques que l'on ait trouvé : en interdisant les bifurcations, elles permettent de mettre en correspondance les points intermédiaires avec les géodésiques qui les atteignent.

DÉFINITION 2.17 (non-branchement). — Soit (\mathcal{X}, d) un espace géodésique.

- Soit Γ une famille de géodésiques $[0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$; on dit que Γ est non branchant s'il vérifie la propriété suivante : pour tous $\gamma, \tilde{\gamma}$ dans Γ , si γ et $\tilde{\gamma}$ coïncident sur un intervalle non trivial $[s_0, s_1]$, alors $\tilde{\gamma} = \gamma$.

- On dit que (\mathcal{X}, d) est non branchant si l'ensemble $\Gamma(\mathcal{X})$ de toutes les géodésiques $[0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$ est non branchant.

- On dit que (\mathcal{X}, d) est essentiellement non branchant si pour toutes mesures $\mu_0, \mu_1 \in P^{\text{ac}}(\mathcal{X}, \nu)$, tout $\Pi \in P(\Gamma(\mathcal{X}))$, transport optimal dynamique au sens (MK_2) joignant μ_0 et μ_1 , est concentré sur un ensemble non branchant de géodésiques.

Il résulte des travaux de divers auteurs [EKS, Ra1, RS, St, Vi1] :

THÉORÈME 2.18. — (i) Un espace géodésique mesuré compact (\mathcal{X}, d, ν) vérifie la propriété $\text{CD}(K, N)$ forte si et seulement si il est essentiellement non branchant et $\text{CD}(K, N)$ (de même avec les propriétés $\text{CD}^*(K, N)$ et $\text{CD}^e(K, N)$) ;

(ii) Pour un espace essentiellement non branchant, les trois propriétés suivantes sont équivalentes : $\text{CD}^e(K, N)$, $\text{CD}^*(K, N)$, et $\text{CD}_{\text{loc}}(K, N)$; en outre, ces propriétés sont équivalentes à l'une quelconque des inégalités différentielles suivantes sur la densité d'une interpolation géodésique absolument continue dans $P_2(\mathcal{X})$: avec la notation $\rho_t = d\mu_t/d\nu$, $\mu_t = (e_t)_\# \Pi$, pour Π -presque tout γ ,

$$(19) \quad \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{\rho_t(\gamma_t)^{1/N}} \right) + \frac{K |\dot{\gamma}_t|^2}{N} \left(\frac{1}{\rho_t(\gamma_t)^{1/N}} \right) \leq 0,$$

$$(20) \quad \ell(t) = \log \rho_t(\gamma_t) \implies \ddot{\ell}(t) \geq \frac{\dot{\ell}^2(t)}{N} + K |\dot{\gamma}_t|^2.$$

(iii) Dans un espace $CD^*(K, N)$ essentiellement non branchant, pour $\nu \otimes \nu$ -presque toute paire (x, y) , il existe une unique géodésique joignant x à y .

Remarque 2.19. — La propriété (ii) montre que les propriétés CD^* et CD^e se globalisent sous une hypothèse de non-branchement essentiel : il est équivalent de les imposer localement ou globalement. En revanche, sans hypothèse de non-branchement, cette propriété de globalisation peut être en défaut [Ra2].

Remarque 2.20. — Les inégalités (19) et (20) peuvent être comprises au sens des distributions (les dérivées d'ordre 1 sont continues), ou bien exprimées par comparaison avec des solutions explicites (Cf. [Vi1, Théorème 14.11]).

Remarque 2.21. — Cette propriété entraîne deux questions naturelles : (a) la version locale $CD_{\text{loc}}(K, N)$ de $CD(K, N)$ se globalise-t-elle sous une hypothèse de non-branchement ? (b) peut-on trouver des critères stables par topologie de Gromov–Hausdorff qui garantissent la propriété de non-branchement essentielle (dont on sait qu'elle n'est pas stable) ? Pour le (a), une réponse positive vient d'être annoncée par Cavalletti–Milman, dans un mémoire long et dense [CaMi] ; pour le (b), le principal critère est celui que l'on verra maintenant.

2.7. Propriété riemannienne

La théorie de la courbure-dimension dans les espaces géodésiques mesurés est suffisamment large pour englober trois grandes catégories de géométries non euclidiennes non lisses : les espaces d'Alexandrov [BBI, BGP], les limites de variétés riemanniennes [ChCo2] et les espaces de Finsler [Oh1, Oh3]. Elle couvre aussi de nombreux exemples construits par produit tordu [K1]. Cette généralité peut être vue comme un avantage, car elle propose une unification d'estimations variées, ou comme un inconvénient, car elle rend plus difficiles les théorèmes de rigidité ou de structure.

À cet égard, l'observation suivante apparaissait à la fois simple et dérangeante [Vi1, Conclusion] : tout espace normé $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|)$, muni de la mesure de Lebesgue λ_N , est $CD(0, N)$. En corollaire, on n'a pas en général de théorème de décomposition en courbure positive (*splitting theorem*) : ce théorème, d'usage crucial dans la construction d'espaces tangents en géométrie non lisse, énonce qu'un espace \mathcal{X} vérifiant $CD(0, N)$ et contenant une ligne géodésique infinie (minimisante pour tous temps) se factorise en un produit riemannien $\mathbb{R} \times \mathcal{X}'$, avec \mathcal{X}' vérifiant $CD(0, N - 1)$.

Les travaux de Gigli [G2], adaptant en dimension finie les notions introduites par Ambrosio–Gigli–Savaré [AGS3], ont permis de répondre à cette question : ils ont identifié, au sein des espaces métriques $CD(K, N)$, une sous-classe qui (a) vérifie le théorème de décomposition, (b) vérifie aussi la propriété de non-branchement essentiel, (c) est toujours stable par topologie de Gromov–Hausdorff. Faut-il se placer ou pas dans cette sous-classe, cela dépend du problème considéré.

DÉFINITION 2.22 (Propriété $\text{CD}(K, N)$ riemannienne, [AGS3, G2])

Un espace géodésique mesuré (\mathcal{X}, d, ν) de classe $\text{CD}(K, N)$ (resp. $\text{CD}^*(K, N)$, $\text{CD}^e(K, N)$) est dit $\text{RCD}(K, N)$ (resp. $\text{RCD}^*(K, N)$, $\text{RCD}^e(K, N)$) si la fonctionnelle de Cheeger dans \mathcal{X} est quadratique, ou de façon équivalente si le semigroupe de la chaleur est linéaire.

Remarque 2.23. — Une formulation équivalente consiste à dire que l'espace de Sobolev $W^{1,2}(\mathcal{X}, d, \nu)$ (fonctions dans $L^2(\nu)$ de « gradient » dans $L^2(\nu)$) est un espace de Hilbert.

Remarque 2.24. — La nature quadratique de la fonctionnelle $\text{Ch}_*(f) = (1/2) \int |\nabla f|^2 d\nu$ est bien sûr une formulation faible, intégrée, de la propriété riemannienne selon laquelle la métrique définit une forme quadratique sur les champs de vecteurs tangents. Cette définition peut donc sembler très naturelle, mais il ne faut pas s'y méprendre : seule, elle serait de peu d'intérêt car elle est instable pour la topologie de Gromov–Hausdorff. C'est seulement combinée au critère $\text{CD}(K, N)$ qu'elle devient stable. Voici une analogie commode : la convergence ponctuelle des fonctions continues n'implique pas la convergence des gradients, sauf si l'on se restreint par exemple à la classe des fonctions convexes.

En combinant la Définition 2.22, le Théorème 2.13, les résultats de non-branchement essentiel de [RS], et l'étude de l'inégalité de Bochner non lisse [AGS3, AGS4, AMS1, AMS2, EKS, GKO], on obtient le

THÉORÈME 2.25 ([AGS3, G5, LV, RS, St]). — (i) Les propriétés $\text{RCD}(K, N)$, $\text{RCD}^*(K, N)$ et $\text{RCD}^e(K, N)$ sont stables par convergence de Gromov–Hausdorff mesurée ;

(ii) La propriété $\text{RCD}^*(K, N)$ est équivalente à une inégalité de Bochner ; si elle est vraie localement, elle reste vraie globalement ;

(iii) Ces propriétés impliquent la propriété de non-branchement essentiel ;

(iv) Les conditions $\text{RCD}^*(K, N)$, $\text{RCD}^e(K, N)$ et $\text{RCD}_{\text{loc}}(K, N)$ sont équivalentes.

Si les résultats de [CaMi] sont confirmés, les trois conditions RCD^* , RCD^e et RCD sont finalement équivalentes. Quoi qu'il en soit, je parlerai dans la suite de la classe $\text{RCD}^*(K, N)$; comme on l'a déjà dit, elle contient toutes les limites de suites de variétés riemanniennes vérifiant une condition de courbure-dimension uniforme.

Les espaces $\text{RCD}^*(K, N)$ vérifient nombre de propriétés. Tout d'abord, on peut démontrer dans ce contexte trois grands théorèmes de rigidité en courbure positive :

- théorème de décomposition [G2, G4] : en présence d'une géodésique infinie, un espace de courbure positive s'écrit comme le produit métrique de \mathbb{R} par un autre espace ;
- théorème de diamètre maximal [K2] : en courbure strictement positive, si le diamètre de l'espace est égal au diamètre maximal autorisé par Bonnet–Myers, alors l'espace est une suspension sphérique ;

• théorème du cône volumique [DPG] : si autour d'un point donné le volume des boules augmente aussi vite que ce qui est autorisé par le théorème de Bishop–Gromov, alors l'espace est un cône métrique.

Tous ces théorèmes avaient d'abord été établis par Cheeger–Colding [ChCo1] dans le cadre *a priori* plus restreint des limites de variétés riemanniennes. Les espaces $\text{RCD}^*(K, N)$ vérifient en outre :

- la propriété de cône [K2] : \mathcal{X} est $\text{RCD}^*(N-1, N)$ si et seulement si le cône métrique sur \mathcal{X} est $\text{RCD}^*(0, N+1)$ (penser à la sphère \mathbb{S}^N dont le cône est l'espace euclidien \mathbb{E}^{N+1}) ;
- la possibilité de définir un opérateur laplacien et un calcul différentiel d'ordre 2 [G6], de manipuler l'inégalité de Bochner [EKS] et de mettre en œuvre un calcul de Bakry–Émery [AMS1, Sav] ;
- l'existence d'une notion d'exponentielle [GRS] ;
- des estimations ponctuelles du semi-groupe de la chaleur, à la Li–Yau [GaMo] ;
- des théorèmes de rectifiabilité, incluant l'existence de cartes où la mesure est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue [KM, MN, GP] ;
- des théorèmes topologiques concernant la structure du revêtement universel et du groupe fondamental [MW].

3. LE DILEMME DE LA DIMENSION EN TROP

Une difficulté imprègne la théorie de la courbure-dimension en dimension $N < \infty$: la courbure ne se ressent que dans les directions transversales au déplacement géodésique, soit $N-1$ directions au lieu de N ; mais cela est invisible sur les inégalités jacobiniennes naturelles comme (6) ou de façon équivalente sur la formule de Bochner (5). Pour établir des résultats optimaux, il faut trouver un moyen de « retrancher » cette dimension en trop, ce qui requiert une gymnastique bien connue des experts.

À titre d'exemple, considérons l'estimation de diamètre en courbure positive : si $K > 0$, l'inégalité (6), appliquée à une géodésique unitaire ($|\dot{\gamma}| = 1$), permet de majorer par $\pi\sqrt{N/K}$ la longueur de l'intervalle d'existence de ℓ : on en déduit

$$\text{diam}(\mathcal{X}) \leq \pi \sqrt{\frac{N}{K}}.$$

Mais la borne optimale (théorème de Bonnet–Myers) est en fait

$$\text{diam}(\mathcal{X}) \leq \pi \sqrt{\frac{N-1}{K}} \quad \dots!$$

Pour l'obtenir, on peut évaluer la contribution « transversale » du déterminant jacobien, en extrayant la sous-matrice jacobienne $(N-1) \times (N-1)$ qui correspond aux directions orthogonales à la vitesse (calcul bien connu rappelé dans [Vi1, Chapitre 14]) : en notant

\mathcal{J}^\perp le déterminant de cette sous-matrice, et $\ell^\perp = -\log \mathcal{J}^\perp$, on trouve (toujours pour une géodésique unitaire)

$$(21) \quad \ddot{\ell}^\perp \geq \frac{(\dot{\ell}^\perp)^2}{N-1} + K,$$

et la borne optimale s'ensuit.

Dans la preuve de la Section 1, ce passage aux constantes optimales s'est fait à travers la preuve du Lemme 1.9 : si l'on a pu obtenir l'inégalité (10), avec le paramètre $n-1$ plutôt que n , c'est parce que l'on s'est intéressé au déterminant jacobien d'une application définie sur une hypersurface (minimale) transverse au déplacement.

Ce besoin de regagner la direction du déplacement se retrouve dans tous les problèmes de constantes optimales en dimension finie. En particulier, les constantes optimales demandent le gain d'un facteur $(N-1)/N$ dans des inégalités fonctionnelles telles que Poincaré L^2 , Sobolev L^2 , Sobolev logarithmique, Talagrand, etc. Pour l'inégalité Poincaré L^2 optimale (théorème de Lichnérowicz), ce gain était mené à bien dans un cadre non lisse par [LV2], mais les autres inégalités restaient inaccessibles.

Pour contourner ce problème, on pourrait être tenté d'exploiter au maximum la définition $\text{CD}(K, N)$ basée sur les coefficients optimaux $\beta_t^{K, N}$; par exemple, cette définition implique facilement la borne optimale de Bonnet–Myers. Mais les difficultés sont majeures, car la propriété $\text{CD}(K, N)$ se prête très mal aux raisonnements locaux, et dès que l'on passe à la version différentielle des inégalités portant sur l'interpolation (MK_2) , on se heurte au même problème qu'auparavant.

La solution de ce dilemme fera intervenir la structure géométrique du transport optimal ; la prochaine section y sera consacrée.

4. GÉOMÉTRIE DU TRANSPORT OPTIMAL

4.1. Généralités

Soit (\mathcal{X}, d) un espace métrique compact. Pour $p \in [1, \infty[$ on considère le problème variationnel de Monge–Kantorovich

$$(22) \quad (\text{MK}_p) \quad \inf_{\pi \in \Pi(\mu_0, \mu_1)} \int d(x_0, x_1)^p \pi(dx_0 dx_1) =: C_p(\mu_0, \mu_1).$$

On note $c = d^p$ le coût de transport. L'objet de cette section est la structure des minimiseurs, en particulier pour $p = 1$ et $p = 2$. Les trois notions essentielles sont la dualité de Kantorovich, les fonctions c -convexes et les ensembles c -cycliquement monotones [Vi1, Chapitre 5].

THÉORÈME 4.1 (dualité de Kantorovich). — Avec les notations précédentes,

(i) Le problème de minimisation de Monge–Kantorovich équivaut à un problème dual de maximisation :

$$C_p(\mu_0, \mu_1) = \sup \left\{ \int \psi^c d\mu_1 - \int \psi d\mu_0; \quad \psi \text{ } c\text{-convexe} \right\},$$

où la paire (ψ, ψ^c) de fonctions $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ dans le membre de droite vérifie

$$\forall y \in \mathcal{X}, \quad \psi^c(y) = \inf_{x \in \mathcal{X}} [\psi(x) + d(x, y)^p];$$

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \psi(x) = \sup_{y \in \mathcal{X}} [\psi^c(y) - d(x, y)^p]$$

(la première condition est la définition de la c -transformée, la seconde est la propriété caractérisant les fonctions c -convexes). Pour le problème original comme pour son dual, l'optimum est atteint.

(ii) Si ψ est optimal dans le problème dual de maximisation, alors π est optimal dans le problème de minimisation si et seulement si il est supporté par le c -sous-différentiel $\partial_c \psi$ de ψ ,

$$\partial_c \psi = \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}; \quad \psi^c(y) - \psi(x) = d(x, y)^p\}.$$

(iii) π est optimal dans le problème de minimisation si et seulement si son support S est c -cycliquement monotone :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N) \in S, \quad \sum_i d(x_i, y_i)^p \leq \sum_i d(x_i, y_{i+1})^p,$$

avec la convention $y_{N+1} = y_1$.

Remarque 4.2. — Le lien entre les propriétés (ii) et (iii) se fait par le théorème de Rockafellar–Rüschendorf : un ensemble est c -cycliquement monotone si et seulement si il est inclus dans le c -sous-différentiel d'une fonction c -convexe.

Pour les preuves, on pourra se reporter à [Vi1, Chapitre 5]. Jusqu'ici, aucune hypothèse géométrique n'est nécessaire; mais des conditions de courbure et de non-branchement permettront d'en dire plus sur la structure du transport. On note qu'il n'y a pas de cercle vicieux : pour développer la théorie de la courbure-dimension il suffit d'avoir des informations générales sur le transport optimal, et ce n'est qu'ensuite que l'on déduit de la courbure-dimension des informations plus précises sur le transport.

4.2. Le cas $p = 2$

La structure du transport optimal avec coût quadratique a été explorée dans les années 80 par Brenier, Rachev, Rüschendorf dans \mathbb{E}^n , avant d’être adaptée au cadre riemannien par McCann [McC1]. Le résultat principal énonce que si μ_0 est absolument continue (ou plus généralement ne charge pas les ensembles de dimension $n - 1$) alors le transport optimal est concentré sur le graphe d’une application de transport T (de sorte que $T_{\#}\mu_0 = \mu_1$), caractérisée par l’identité $T = \exp(\nabla\psi)$, où ψ est c -convexe. Ce théorème et ses variantes sont discutés dans [Vi1, Chapitres 9-10].

Il est apparu bien plus récemment que ces résultats peuvent largement se généraliser dans les espaces $CD^*(K, N)$ essentiellement non branchants [G3, GRS, RS].

THÉORÈME 4.3 (Gigli, Rajala, Sturm). — *Soit (\mathcal{X}, d, ν) un espace $CD^*(K, N)$ compact essentiellement non branchant; soient $\mu_0 \in P^{\text{ac}}(\mathcal{X})$ et $\mu_1 \in P(\mathcal{X})$. Soit en outre ψ une application optimale dans le problème dual de maximisation. Alors il existe un unique transport optimal au sens de (MK_2) ; il est concentré sur le graphe d’une application T , caractérisée par la condition*

$$T(x) \in \partial_c \psi(x), \quad \text{pour } \mu_0\text{-presque tout } x \in \mathcal{X}.$$

Remarque 4.4. — Même si l’hypothèse de non-branchement essentiel concerne des mesures μ_0 et μ_1 qui sont *toutes deux* absolument continues, le Théorème 4.3 nécessite seulement l’absolue continuité de μ_0 .

PREUVE DU THÉORÈME 4.3 (ESQUISSE GROSSIÈRE) — Pour prouver l’unicité, il suffit de démontrer que π est concentrée sur un graphe; en effet, cela acquis, si l’on a deux minimiseurs π_1 et π_2 , l’un concentré sur le graphe de T_1 et l’autre sur le graphe de T_2 , on pourra construire un autre minimiseur, $\pi = (\pi_1 + \pi_2)/2$, qui ne sera pas porté par un graphe mais par une application multivaluée. La question cruciale est donc de prouver que presque tout point x_0 est transporté vers un unique point $x_1 = T(x_0)$; par le Théorème 4.1 cette image est nécessairement dans $\partial_c \psi(x_0)$.

L’estimation clé est la suivante : si ρ est une densité de probabilité, alors $-\int \rho^{1-1/N} d\nu \geq -\nu[\{\rho > 0\}]^{1/N}$ (appliquer l’inégalité de Jensen à la mesure de probabilité ν restreinte à $S = \{\rho > 0\}$, à la fonction intégrable ρ et à la fonction convexe $-r^{1-1/N}$). En combinant cela à la Définition 2.6, on montre que le long d’une interpolation $(\rho_t \nu)$ dans $P_2(\mathcal{X})$, si ρ_0 est proportionnelle à une fonction indicatrice, alors

$$\nu[\{\rho_0 > 0\}] \leq \liminf_{t \downarrow 0} \nu[\{\rho_t > 0\}].$$

Dans une situation typique de transport π multivalué, on trouvera un ensemble B de mesure strictement positive tel que pour chaque $x \in B$, il existera y^1 et y^2 distincts tels que (x, y^1) et (x, y^2) appartiennent au support de π . On peut ainsi définir des sous-transports, disons π^1 et π^2 , étrangers au sens de la théorie de la mesure, tels que $(\pi^1 + \pi^2)/2 \leq \pi$, et tous deux ont pour première marginale la restriction de ν à B . Les interpolations correspondantes sont deux chemins $(\rho_t^1 \nu)_{0 \leq t \leq 1}$ et $(\rho_t^2 \nu)_{0 \leq t \leq 1}$ tels que

$\rho_0^1 = \rho_0^2$ est la fonction indicatrice de B . Pour $t > 0$ petit, les ensembles $\{\rho_t^1 > 0\}$ et $\{\rho_t^2 > 0\}$ sont proches de B , et leur mesure n'est pas moindre, ou à peine ; il s'ensuit que ces deux ensembles s'intersectent sur une partie de mesure positive.

On construit alors un nouveau plan de transport en échangeant les géodésiques de π^1 et celles de π^2 en un temps t où elles se rencontrent. On vérifie que le nouveau transport est toujours optimal, ce qui impose qu'il est porté par des géodésiques ; autrement dit, si l'on suit une géodésique du premier plan de transport, jusqu'au temps t , et que l'on bifurque ensuite en suivant une géodésique du second plan de transport, on a toujours une géodésique... On en déduit finalement que $(\pi^1 + \pi^2)/2$, et donc π , est porté de manière significative par des géodésiques branchantes, ce qui contredit l'hypothèse de non-branchement essentiel.

La mise au point de cette preuve heuristique s'avère élémentaire mais fastidieuse, utilisant tous les outils de la théorie de la mesure abstraite (régularité, sélection mesurable, désintégration de la mesure...). \square

4.3. Le cas $p = 1$

Le cas $p = 1$ revêt une structure particulière, qui se manifeste déjà dans la caractérisation simple de la c -convexité quand $c(x, y) = d(x, y)$:

PROPOSITION 4.5. — *Si (\mathcal{X}, d) est un espace métrique, alors les fonctions d -convexes sont les fonctions 1-lipschitziennes, et elles vérifient $\varphi^d = \varphi$.*

La géométrie du transport optimal est également très spéciale pour $p = 1$. Monge lui-même, travaillant dans l'espace euclidien, avait noté une propriété fondamentale associée à ce coût de transport [Mo] : *les lignes de transport ne peuvent se croiser en leur intérieur*. En effet, si π est un optimum dans (MK_1) , et (x_1, y_1) , (x_2, y_2) appartiennent au support de π , alors $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \leq |x_1 - y_2| + |x_2 - y_1|$; mais supposant que les segments $[x_1, y_1]$ et $[x_2, y_2]$ se croisent en un point intérieur X , on aurait $|x_1 - y_2| + |x_2 - y_1| \leq |x_1 - X| + |X - y_2| + |x_2 - X| + |X - y_1| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$; cela impose égalité dans toutes les inégalités, et il s'ensuit facilement que x_1, x_2, y_1, y_2 sont alignés.

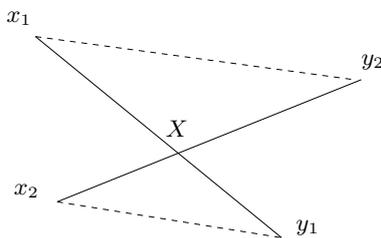


FIGURE 4. Comme l'a noté Monge, les rayons de transport (MK_1) dans l'espace euclidien ne peuvent se croiser — sinon on trouverait un transport plus efficace.

La description des minimiseurs de (MK_1) dans \mathbb{R}^n a fait l'objet de nombreux travaux à partir de la fin des années 90 ; on trouvera un survol, ainsi que des résultats s'appliquant

à toute norme de \mathbb{R}^n , dans [ChDP]. À partir des années 2000, des résultats de structure étaient obtenus sur des variétés riemanniennes [FMcC], puis sur des espaces géodésiques [BC]; enfin Cavalletti [C1] obtenait récemment des résultats précis pour des espaces satisfaisant des conditions de courbure-dimension et de non-branchement. Avant de les énoncer, je vais en expliquer informellement les éléments principaux.

On commence par résoudre le problème dual, ce qui fournit une fonction optimale φ ; par le Théorème 4.1 ses variations contraignent la géométrie d'un transport optimal. On définit ensuite R comme l'ensemble de toutes les paires de points que les valeurs de φ autorisent à être mis en relation par transport optimal. C'est un ensemble assez grand, qui contient en particulier la diagonale $\{(x, x)\}$ (correspondant à l'option de ne pas bouger de la position x). Puis on introduit \mathcal{T}_E , l'ensemble de tous les points x qui apparaissent dans R en association avec au moins un $y \neq x$; c'est-à-dire ceux qui ont la possibilité d'effectuer un déplacement strict. Sur \mathcal{T}_E , la relation R , bien que symétrique, n'est pas une relation d'équivalence : chaque fois que l'on a $(x, y) \in R$ et $(x, z) \in R$, avec $(y, z) \notin R$, cela correspond à l'existence d'un branchement au sein de \mathcal{T}_E , c'est-à-dire au croisement de deux géodésiques (soit en un point extrémal, soit en un point intérieur). On peut cependant éliminer tous ces branchements en retirant de \mathcal{T}_E un ensemble de mesure nulle bien choisi; l'ensemble \mathcal{T} ainsi obtenu est *partitionné* par des courbes géodésiques, et les rayons de transport qui passent par \mathcal{T} ne peuvent se rencontrer qu'en leurs extrémités. Le théorème qui suit formalise tout cela rigoureusement.

THÉORÈME 4.6 (Cavalletti). — *Soit (\mathcal{X}, d, ν) un espace géodésique compact mesuré, vérifiant $CD^*(K, N)$, $N < \infty$, essentiellement non branchant. Soient $\mu_0 \in P^{\text{ac}}(\mathcal{X})$ et $\mu_1 \in P(\mathcal{X})$. Soit en outre φ solution du problème de maximisation duale de Kantorovich (MK_1) . Alors*

(i) *φ est 1-lipschitzien, et tout transport optimal est concentré sur l'ensemble d -convexe*

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}; \varphi(y) - \varphi(x) = d(x, y)\}.$$

(ii) *À partir de Γ , on définit :*

- *R , l'ensemble des rayons de transport, comme l'ensemble de tous les couples de la forme (x, y) ou (y, x) , pour $(x, y) \in \Gamma$;*
- *\mathcal{T}_E , l'ensemble de transport avec extrémités, comme l'ensemble de tous les $x \in \mathcal{X}$ tels que $(x, y) \in R$ pour un $y \neq x$; \mathcal{T}_E est une union d'images de géodésiques;*
- *E , l'ensemble des extrémités, comme l'ensemble de tous les $x \in \mathcal{T}_E$ tels que $\forall y \neq x$, $(y, x) \notin \Gamma$ (extrémités initiales) ou $\forall y \neq x$, $(x, y) \notin \Gamma$ (extrémités finales);*

On peut alors définir un ensemble mesurable $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_E$, dit ensemble de transport sans branchement, tel que $\nu[\mathcal{T}_E \setminus \mathcal{T}] = 0$, avec la propriété suivante : pour tout $x \in \mathcal{T}$, soit l'ensemble $R(x) \subset \mathcal{X}$ des y tels que $(x, y) \in R$; c'est une géodésique, dite ligne de transport passant par x ; et pour tous x, y , on a soit $R(x) = R(y)$, soit $R(x) \cap R(y) \subset E$.

(iii) *Il existe un transport optimal porté par le graphe d'une application mesurable T , et tel que $T(x) \in R(x)$ pour μ_0 -presque tout $x \in \mathcal{X}$; en outre φ est une application linéairement croissante le long de la géodésique $R(x)$.*

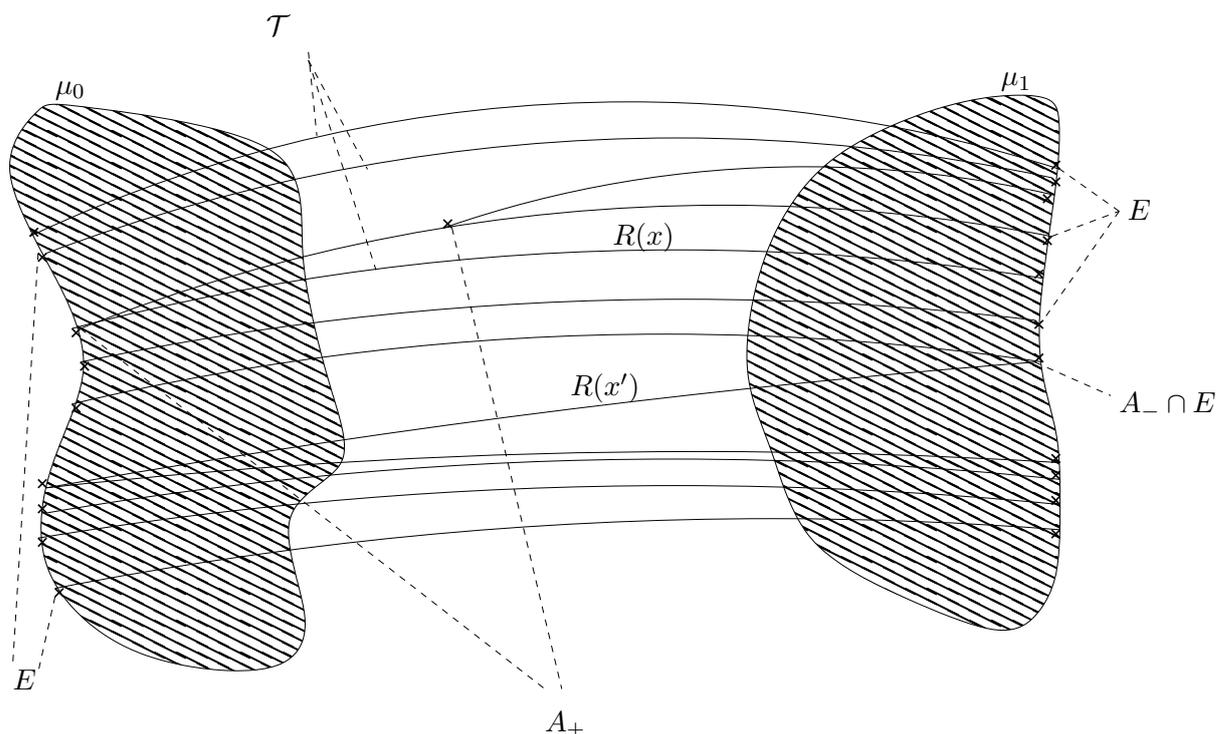


FIGURE 5. Transport (MK₁) : Quitte à éliminer des ensembles négligeables, les rayons R partitionnent l'ensemble de transport \mathcal{T} . On a représenté ici quelques exemples de rayons $R(x)$, de points extrémaux (E) et de points de branchement (A_+ branchement vers le futur, A_- vers le passé).

Remarque 4.7. — Le point (ii) est en fait un résultat général sur la structure des ensembles d -cycliquement monotones dans (\mathcal{X}, d, ν) . Ce point, comme l'ensemble du théorème, est démontré dans [C1], à un détail près : l'ensemble \mathcal{T} qui y est construit autorise $R(x) \cap R(y)$ à comprendre des points de branchement intérieurs. La construction plus précise de [CaMi] écarte cette dernière possibilité.

Remarque 4.8. — Il y a, en fonction de l'exposant p , une différence considérable dans la géométrie des ensembles c -convexes : un ensemble d^2 -convexe est plus ou moins un graphe, tandis qu'un ensemble d -convexe se présente plutôt comme une fibration. En conséquence, une différence majeure entre le cas $p = 2$ et le cas $p = 1$ est que dans ce dernier, la solution φ du problème dual ne détermine pas le transport optimal, mais seulement sa direction (en d'autres termes, les rayons). Une même fonction optimale φ peut donc être associée à différents plans de transport, selon les choix de μ_0 et μ_1 . Cette « dégénérescence » est une difficulté pour la théorie ; d'un autre côté, elle est exploitée adroitement dans [C1, CaMo1] par la construction de « mesures auxiliaires » pour lesquelles le transport optimal reste associé à φ .

Pour exploiter les hypothèses du Théorème 4.6, on se heurte tout de suite à une difficulté : la propriété de courbure-dimension et celle de non-branchement essentiel

font référence au transport (MK₂), donc aux ensembles d^2 -cycliquement monotones, alors que l'ensemble Γ est d -cycliquement monotone. Le passage d'une notion à l'autre se fait à l'aide du lemme suivant, aussi simple que crucial :

LEMME 4.9. — *Si Γ est inclus dans le d -sous-différentiel d'une fonction 1-lipschitzienne φ et tel que*

$$(23) \quad \forall (x, y), (x', y') \in \Gamma, \quad (\varphi(y) - \varphi(y'))(\varphi(x) - \varphi(x')) \geq 0,$$

alors Γ est d^2 -cycliquement monotone.

Ce lemme permettra en diverses occasions d'identifier, dans un transport optimal pour (MK₁), un sous-transport optimal pour (MK₂).

PREUVE — L'hypothèse (23) exprime la d^2 -monotonie cyclique de l'ensemble $\{(\varphi(x), \varphi(y)), (x, y) \in \Gamma\} \subset \mathbb{R}^2$: en effet, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tous $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ dans Γ ,

$$\begin{aligned} \sum_i (\varphi(y_{i+1}) - \varphi(x_i))^2 - \sum_i (\varphi(y_i) - \varphi(x_i))^2 &= 2 \sum_i \varphi(x_i) (\varphi(y_i) - \varphi(y_{i+1})) \\ &= \sum_i (\varphi(x_i) - \varphi(x_{i+1})) (\varphi(y_i) - \varphi(y_{i+1})) \geq 0. \end{aligned}$$

En conséquence, avec les mêmes notations, et en utilisant la propriété de d -sous-différentiel,

$$\sum_i d(x_i, y_i)^2 = \sum_i (\varphi(y_i) - \varphi(x_i))^2 \leq \sum_i (\varphi(y_{i+1}) - \varphi(x_i))^2 \leq \sum_i d(x_i, y_{i+1})^2,$$

ce qui est la propriété de d^2 -monotonie cyclique. \square

Le Théorème 4.6 repose encore sur tout l'arsenal de la théorie de la mesure. La stratégie globale est de décomposer le transport selon des rayons essentiellement disjoints, se ramenant ainsi à un problème en dimension 1 le long de chacun de ces rayons. En effet, la solution du transport optimal en dimension 1 est bien connue :

LEMME 4.10. — *Soient μ_0 et μ_1 deux mesures de probabilité sur \mathbb{R} ; on suppose que μ_0 n'a pas d'atome. Alors l'application croissante $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$T(x) = \inf \left\{ z; \mu_0[\{t \leq x\}] < \mu_1[\{s \leq z\}] \right\}$$

réalise un transport optimal de μ_0 vers μ_1 , au sens de Monge, c'est-à-dire que $T_{\#}\mu_0 = \mu_1$ et $\int d(x, T(x)) \mu_0(dx) = C_1(\mu_0, \mu_1)$.

Cette approche par décomposition avait été initiée par Sudakov [Su], qui n'avait cependant pas pu mener le raisonnement à bien du fait de la subtilité de l'opération de désintégration.

PREUVE DU THÉORÈME 4.6 (ESQUISSE GROSSIÈRE) — Le point (i) est obtenu simplement en combinant le Théorème 4.1 et la Proposition 4.5. La clé est maintenant l'étude de l'ensemble Γ . Dans cette esquisse on raisonne informellement, étant entendu

qu'une démonstration rigoureuse demande du soin dans le maniement de la sélection mesurable et de la désintégration.

Soit $(x, y) \in \Gamma$, et $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{X}$ une géodésique joignant x à y , alors pour tout $t \in [t_0, t_1]$ on a $(x, \gamma(t)), (\gamma(t), y) \in \Gamma$; en effet

$$\begin{aligned} d(x, y) = \varphi(y) - \varphi(x) &\leq |\varphi(y) - \varphi(\gamma(t))| + |\varphi(\gamma(t)) - \varphi(x)| \\ &\leq d(\gamma(t), y) + d(x, \gamma(t)) = d(x, y), \end{aligned}$$

ce qui impose l'égalité partout, et donc, par exemple, $\varphi(\gamma(t)) - \varphi(x) = d(x, \gamma(t))$.

Donc R est fait d'une union de géodésiques; en retirant la diagonale, on élimine les géodésiques de longueur nulle, et \mathcal{T}_E est ainsi une union de géodésiques de longueur non nulle. On vérifie par ailleurs la mesurabilité de R , \mathcal{T}_E et E .

Soit maintenant A_+ l'ensemble des points de \mathcal{T}_E qui mènent à un branchement vers le futur (les x tels que $(x, z) \in \Gamma$ et $(x, w) \in \Gamma$ avec z, x, w distincts); et similairement A_- l'ensemble de ceux qui mènent à un branchement vers le passé. Le problème est de montrer que $\nu[A_\pm] = 0$.

Raisonnons par l'absurde : si $\nu[A_+] > 0$, on peut sélectionner un sous-ensemble B de A_+ de mesure positive, tel que de chaque $x \in B$ sont issues deux géodésiques distinctes, disons $\gamma^{1,x}$ et $\gamma^{2,x}$, qui interviennent dans \mathcal{T}_E . Quitte à restreindre encore, et à interrompre ces géodésiques à un instant adéquat (après branchement), on peut supposer que leurs points extrémaux, disons $\theta^1(x)$ et $\theta^2(x)$, sont situés dans une ligne de niveau commune de φ . Notons $C^1 = \theta^1(B)$, $C^2 = \theta^2(B)$: on a donc par construction un transport branché issu de B et aboutissant en $C^1 \cup C^2$. Soient alors $\mu'_0 = \nu_B$ la mesure de probabilité portée par B , de densité uniforme $1/\nu[B]$; et $\mu'_1 = (1/2)(\theta^1_{\#}\mu'_0 + \theta^2_{\#}\mu'_0)$. On a ainsi construit un transport branché de la mesure absolument continue μ'_0 vers la mesure (peut-être singulière) μ'_1 ; et toujours par construction, ce transport est associé à un ensemble d -monotone $\Gamma' \subset \Gamma$, inclus dans le sous-différentiel de φ . Or φ est constante sur le support de μ'_1 , le critère du Lemme 4.9 est donc évidemment satisfait ($\varphi(y') - \varphi(y) = 0$ dans l'énoncé); il s'ensuit que le transport est optimal au sens (MK₂). Mais cela vient contredire le Théorème 4.3.

On en déduit que $\nu[A_+] = 0$, et de même $\nu[A_-] = 0$; on définit alors \mathcal{T} en retirant A_\pm de \mathcal{T}_E . Une fois éliminés les points de branchement, on montre facilement (en utilisant encore une fois $\mathcal{T} \subset \partial_d \varphi$) que R définit une relation d'équivalence sur \mathcal{T} , et que chaque classe d'équivalence $[x]$ constitue l'image d'une géodésique, éventuellement définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert. Quitte à ajouter un ou deux points extrémaux, on obtient ainsi le rayon $R(x)$; cela achève la preuve de (ii).

On choisit ensuite une section mesurable \mathcal{S} de la relation d'équivalence R sur \mathcal{T} , de sorte que \mathcal{T} est l'union des $[x]$, $x \in \mathcal{S}$; on paramètre la géodésique $R(x)$ de façon unitaire, dans le sens croissant de φ , en choisissant x comme origine : ainsi elle est définie sur un intervalle $[a(x), b(x)]$ contenant 0. Soit $g(x, t)$ l'application ainsi définie : à $x \in \mathcal{S}$ et $t \in [a(x), b(x)]$ elle associe le point de $R(x)$ dont la distance signée par rapport à x est égale à t .

Puis on désintègre ν , restreinte à \mathcal{T} , par rapport à la relation d'équivalence R , en identifiant à \mathcal{S} l'espace quotient :

$$\nu|_{\mathcal{T}} = \int_{\mathcal{S}} \nu_x q(dx),$$

où q est la mesure $(P_{\mathcal{S}})_{\#}\nu$ sur \mathcal{S} (avec $P_{\mathcal{S}}$ l'application de « projection » qui à y associe la première composante de $g^{-1}(y)$) et ν_x la mesure conditionnelle, concentrée sur le rayon $R(x)$.

L'étape clé maintenant consiste à prouver que (pour presque tout x) ν_x est absolument continue par rapport à $g(x, \cdot)_{\#}\mathcal{L}^1$, la mesure 1-dimensionnelle portée par $R(x)$. Cette estimation traduit l'idée que la famille des rayons ne varie pas de façon trop « sauvage », et n'a rien d'une formalité : on sait en effet construire « à la Besicovitch » une famille de segments disjoints dans \mathbb{R}^3 pour lesquels les milieux forment un ensemble M de mesure strictement positive ; dans ce cas, si ν est la mesure de Lebesgue portée par M , ses mesures conditionnelles par rapport à la famille de segments sont toutes singulières.

Pour prouver l'absolue continuité, on raisonne encore par l'absurde : si elle était en défaut, on trouverait un compact $C \subset \mathcal{T}$ tel que

$$(24) \quad \nu[C] > 0, \quad (q \otimes \mathcal{L}^1)(g^{-1}(C)) = 0.$$

(Dans l'exemple précédent, C pourrait être l'ensemble des milieux.) Quitte à restreindre, on peut aussi imposer que chaque rayon issu de C traverse une certaine courbe de niveau $\{\varphi = \delta\}$ dans le sens des temps croissants, et que $\varphi < \delta' < \delta$ sur C .

Soit $y \in C$: on lui associe une interpolation $\xi_t(y)$ qui progresse à vitesse constante le long de $R(y)$, telle que $\xi_0(y) = y$ et $\xi_1(y) \in \{\varphi = \delta\}$: en d'autres termes, $\varphi(\xi_t(y))$ est une interpolation linéaire entre $\varphi(y)$ et δ . La fonction ξ_t définit ainsi une interpolation entre l'ensemble C et un sous-ensemble de $\{\varphi = \delta\}$, portée par un ensemble de rayons.

Comme ce transport aboutit dans $\{\varphi = \delta\}$, le Lemme 4.9 s'applique à nouveau pour fournir un transport optimal (MK₂), et l'on peut utiliser la condition CD(K, N), encore une fois via $\int \rho_t^{1-1/N} d\nu \geq \nu[\rho_t > 0]^{1/N}$, pour obtenir une borne inférieure sur $\nu[C_t]$, faisant intervenir K et N , de la forme

$$\nu[C_t] \geq c(K, N, r) (1-t)^N \nu[C].$$

Ici $r > 0$ est une borne sur les distances en jeu, qui sont supposées suffisamment petites, quitte à localiser, et $c(K, N, r) > 0$; ainsi

$$(25) \quad \int_0^{1/2} \nu[C_t] dt > 0.$$

Mais cela est aussi, par réécriture et Fubini,

$$(26) \quad ((g_{\#}^{-1}\nu) \otimes \mathcal{L}^1) \left[\{(x, \tau, t) \in \mathcal{S} \times \mathbb{R} \times [0, 1/2]; (x, \tau) \in g^{-1}(C_t)\} \right] \\ = \int_{\mathcal{S} \times \mathbb{R}} \mathcal{L}^1 \left[\{t \in [0, 1/2]; (x, \tau) \in g^{-1}(C_t)\} \right] (g_{\#}^{-1}\nu)(dx d\tau).$$

Si $(x, \tau) \in g^{-1}(C_t)$, cela veut dire que $g(x, \tau) \in C_t$, et par la construction de C_t on a $\varphi(g(x, \tau)) = (1-t)\varphi(g(x, \tau')) + t\delta$, où $g(x, \tau') \in C$. En revenant aux définitions de g et de l'interpolation θ_t , et en se souvenant que $\varphi(g(y, t))$ varie comme t , on trouve

$$\varphi(x) + \tau = (1-t)[\varphi(y) + \tau'] + t[\varphi(y) + (\delta - \varphi(y))],$$

où $g(x, \tau') \in C$. De l'équation précédente on tire τ' en fonction de τ, t, δ et y , et on obtient finalement

$$g(x, \tau) \in C_t \iff g\left(x, \frac{\tau - t(\delta - \varphi(y))}{1-t}\right) \in C.$$

Pour chaque (x, τ) dans $g^{-1}(C_t)$, on a $\varphi(x) + \tau < \delta' < \delta$, et donc la fonction $t \mapsto s = (\tau - t(\delta - \varphi(y)))/(1-t)$ est uniformément bilipschitzienne pour $t \in [0, 1/2]$, de sorte que dt/ds est uniformément majoré par $J > 0$. Ainsi

$$\mathcal{L}^1\left[\left\{t \in [0, 1/2]; (x, \tau) \in g^{-1}(C_t)\right\}\right] \leq J \mathcal{L}^1\left[\left\{s \in \mathbb{R}; (x, s) \in g^{-1}(C)\right\}\right]$$

et l'intégrale de (26) est majorée par

$$J \int_{\mathcal{S} \times \mathbb{R}} \mathcal{L}^1\left[\left\{s \in \mathbb{R}; (x, s) \in g^{-1}(C)\right\}\right] (g_{\#}^{-1}\nu)(dy d\tau).$$

L'intégrande maintenant ne dépend plus de τ ; mais la première marginale de $g_{\#}^{-1}\nu$ est $(P_1 \circ g^{-1})_{\#}\nu$, où P_1 est la première projection; c'est-à-dire $(P_{\mathcal{S}})_{\#}\nu = q$. Finalement l'intégrale est majorée par

$$J \int_{\mathcal{S}} \mathcal{L}^1\left[\left\{s \in \mathbb{R}; (x, s) \in g^{-1}(C)\right\}\right] q(dx) = J(q \otimes \mathcal{L}^1)(g^{-1}(C)) = 0$$

par (24). Ceci contredit l'inégalité (25), et achève la preuve de la continuité de la désintégration.

Passons enfin à la construction du transport optimal. L'idée est de tout désintégrer selon les lignes du transport; mais comme μ_1 est peut-être singulière, nous allons devoir emprunter un bref détour.

Soit π un transport optimal quelconque; on sait que le support de π est inclus dans Γ . On partitionne $(\mathcal{T} \times X) \cap \Gamma$ selon la classe de la première composante: cela revient à écrire cet ensemble comme union disjointe des $[R(x) \cap \mathcal{T} \times X] \cap \Gamma$. On désintègre alors π par rapport à cette relation d'équivalence: cela revient à écrire π comme une intégrale $\int_{\mathcal{S}} \pi_y Q(dy)$, où chaque $\pi_y \in P(R(y) \times R(y))$. On note $\mu_{0,y}$ et $\mu_{1,y}$ les marginales de π_y : ce sont des mesures sur $R(y)$, et $\mu_{0,y}$ est absolument continue par rapport à $g(y, \cdot)_{\#}\mathcal{L}^1$.

Maintenant, pour chaque y , on construit aisément par application du Lemme 4.10 un transport optimal T_y , croissant le long de $R(y)$, tel que $(T_y)_{\#}\mu_{0,y} = \mu_{1,y}$. Bien sûr, π_y est optimal aussi (par d -monotonie cyclique), donc $\int d(x_0, x_1) \pi_y(dx_0 dx_1) = \int d(x, T_y(x)) \mu_{0,y}(dx)$; en intégrant les deux membres par rapport à Q on obtient $\int d(x_0, x_1) \pi(dx_0 dx_1) = \int d(x, T(x)) \mu_0(dx)$, où $T(x) = T_y(x)$ si $x \in R(y)$. On conclut que T est une application de transport optimal. \square

5. LOCALISATION EN AIGUILLES

En géométrie des convexes, la technique de localisation a été mise au point par Kannan, Lovász et Simonovits [KLS]. Elle est basée sur la décomposition de la mesure le long de segments disjoints, ou « aiguilles » ; on peut faire remonter l'idée à Payne–Weinberger [PW] et Gromov–Milman [GM]. Par exemple, la motivation de Payne–Weinberger était d'obtenir des inégalités de Poincaré optimales pour des fonctions de moyenne nulle dans un ouvert Ω convexe de \mathbb{E}^n : en découpant de façon répétée Ω selon des hyperplans, tout en préservant la condition de moyenne nulle dans chaque sous-domaine, on se ramène à prouver l'inégalité souhaitée sur des domaines de plus en plus petits, et finalement (à la limite) sur des droites.

Dans un travail récent, Klartag [Kl] montrait comment construire une telle décomposition en aiguilles dans un contexte riemannien, au moyen du problème de Monge–Kantorovich (MK_1), les aiguilles étant alors les rayons de transport optimal ; il en déduisait une nouvelle preuve de l'inégalité classique de Lévy–Gromov. Cavalletti–Mondino [CaMo1] adaptaient ensuite l'idée de Klartag à des espaces métriques, se débarrassant de toute hypothèse de régularité. Par la même occasion, ils obtenaient l'amélioration des inégalités de courbure-dimension le long des aiguilles. Ces contributions sont rassemblées dans le résultat suivant :

THÉORÈME 5.1 (Décomposition en aiguilles sous hypothèse de courbure-dimension, [CaMo1])

Soit (\mathcal{X}, d, ν) un espace géodésique mesuré compact, essentiellement non branchant, vérifiant la condition $CD^(K, N)$ pour $K \in \mathbb{R}$ et $1 < N < \infty$. Soit $f \in L^1(\mathcal{X})$ tel que $\int_{\mathcal{X}} f d\nu = 0$. Alors on peut décomposer \mathcal{X} en deux ensembles disjoints \mathcal{T} et Z , et on peut décomposer \mathcal{T} en une partition $(X_\gamma)_{\gamma \in Q}$, où chaque X_γ est la trajectoire d'une géodésique unitaire γ définie sur un intervalle I_γ de \mathbb{R} , et les γ sont indexés par un espace polonais Q . En outre on peut définir une mesure q sur Q , et une famille de mesures $(\nu_\gamma)_{\gamma \in Q}$ sur \mathcal{X} , de sorte que*

(i) *Pour tout ensemble mesurable $B \subset \mathcal{T}$, on a*

$$\nu[B] = \int_Q \nu_\gamma[B] q(d\gamma)$$

et chaque ν_γ (mesure conditionnelle à γ) est portée par X_γ ;

(ii) *Soit u_γ la densité de ν_γ par rapport à $\gamma_{\#}\mathcal{L}^1$, la mesure 1-dimensionnelle portée par X_γ : alors $h_\gamma = u_\gamma \circ \gamma$ vérifie, au sens des distributions sur I_γ , l'inégalité différentielle de courbure-dimension*

$$(27) \quad \frac{d^2}{dt^2} (h_\gamma^{\frac{1}{N-1}}) + \frac{K}{N-1} (h_\gamma^{\frac{1}{N-1}}) \leq 0;$$

(iii) Enfin,

$$\begin{cases} q(d\gamma)\text{-presque sûrement,} & \int f d\nu_\gamma = 0 \\ \nu(dz)\text{-presque partout,} & z \in Z \implies f(z) = 0. \end{cases}$$

Remarque 5.2. — On pourra retenir la décomposition de la mesure sous la forme

$$\nu|_{\mathcal{T}} = \int_Q (h_\gamma \circ \gamma^{-1}) \mathcal{H}^1|_{X_\gamma} q(d\gamma),$$

où \mathcal{H}^1 est la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle.

Remarque 5.3. — On peut inclure le cas $N = 1$ dans le Théorème 5.1 en imposant que h_γ reste constant le long de γ .

Remarque 5.4. — En pratique, f dans le Théorème 5.1 dépend de la propriété géométrique que l'on souhaite établir; l'énoncé (iii) permet de ramener l'étude globale (dans (\mathcal{X}, d, ν)) à l'étude « locale » sur un espace 1-dimensionnel $(X_\gamma, d, \nu_\gamma)$ (ou de façon équivalente sur l'intervalle mesuré $(I_\gamma, |\cdot|, h_\gamma \mathcal{L}^1)$); l'énoncé (ii) assure que cet espace vérifie l'inégalité (optimale) de courbure-dimension $CD^*(K, N)$.

PREUVE DU THÉORÈME 5.1 (ESQUISSE) — Par hypothèse $\int f d\nu = 0$, soit $\int f_+ d\nu = \int f_- d\nu$, où f_\pm sont les parties positive et négative de f . Si cette masse commune m est nulle, il n'y a rien à prouver. Si $m > 0$, on pose $\mu_0 = m^{-1}f_- \nu$, $\mu_1 = m^{-1}f_+ \nu$, et on peut considérer le problème de transport (MK_1) entre μ_0 et μ_1 dans (\mathcal{X}, d, ν) .

Le Théorème 4.6 fournit un transport optimal π , une fonction 1-lipschitzienne φ , optimale dans le problème dual (qui ici est simplement $\max\{\int \varphi f d\nu; \|\varphi\|_{\text{Lip}} \leq 1\}$); et π est supporté dans le d -sous-différentiel de φ . Ce théorème fournit aussi un ensemble de transport \mathcal{T} , partitionné par les rayons $R(x)$ ($\mathcal{T} \cap R(x)$ est une trajectoire géodésique éventuellement privée d'une ou de ses deux extrémités). En outre μ_0 et μ_1 sont étrangères, donc concentrées sur \mathcal{T} (aucune masse ne peut « rester en place » durant le transport); il s'ensuit que f_\pm valent 0, presque partout sur $Z = \mathcal{X} \setminus \mathcal{T}$.

Comme dans la preuve du Théorème 4.6, on désintègre ensuite la mesure ν par rapport à la relation d'équivalence R ; cela engendre une mesure quotient notée q , et des mesures conditionnelles ν_γ . Il sera commode d'introduire une section \mathcal{S} de cette relation d'équivalence R , contenant un élément de chaque X_γ , choisi mesurablement; on pourra ainsi, selon les cas, considérer l'espace quotient Q comme l'ensemble des géodésiques γ associées aux X_γ , ou comme l'ensemble \mathcal{S} .

En désintégrant un transport optimal dynamique Π par rapport à $(X_\gamma)_\# q$, on obtient, pour $q(d\gamma)$ -presque tout γ , un transport entre deux mesures $\mu_{0,\gamma}$ et $\mu_{1,\gamma}$, portées par X_γ , qui ne sont autres que $m^{-1}f_- \nu_\gamma$ et $m^{-1}f_+ \nu_\gamma$. En particulier, $\int f_- d\nu_\gamma = \int f_+ d\nu_\gamma$.

À ce stade, tout est démontré, sauf la partie (ii), un énoncé qu'il faut établir pour presque toute géodésique $\gamma \in Q$, ou de façon équivalente pour presque tout $x \in \mathcal{S}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que \mathcal{S} est inclus dans une famille dénombrable d'ensembles de niveau de φ ; on peut alors recouvrir \mathcal{T} , identifié à un sous-ensemble de

$\mathcal{S} \times \mathbb{R}$, par une famille dénombrable d'ensembles de la forme $\tilde{\mathcal{S}} \times [a, b]$, où $\varphi(\tilde{\mathcal{S}}) = c$ et $a < c < b$. On va travailler sur l'un de ces ensembles fixés, et démontrer l'inégalité souhaitée sur $]a, b[$. On note $g(y, \tau) = \gamma(s + \tau)$, où $\gamma(s) = y \in \tilde{\mathcal{S}}$, donc par hypothèse $\varphi(\gamma(s)) = c$, et $\varphi(g(y, \tau)) = \varphi(\gamma(s)) + \tau = c + \tau$.

Soient $A_0, A_1, L_0, L_1 > 0$ tels que $a < A_0 < A_0 + L_0 < c < A_1 < A_1 + L_1 < b$. (On se réserve bien sûr le droit d'imposer des conditions supplémentaires par la suite.) On définit deux nouvelles mesures de probabilité $\tilde{\mu}_0, \tilde{\mu}_1$ par

$$\tilde{\mu}_i = \frac{1_{[A_i, A_i + L_i]}(\tau)}{L_i} 1_{\tilde{\mathcal{S}}}(y) (\mathcal{L}^1 \otimes q)(d\tau dy).$$

En d'autres termes, sur chaque rayon, $\tilde{\mu}_i$ est la mesure uniforme $\mathcal{U}[A_i, A_i + L_i]$ portée par le segment $[A_i, A_i + L_i]$.

Le transport optimal croissant entre $\mathcal{U}[A_0, A_0 + L_0]$ et $\mathcal{U}[A_1, A_1 + L_1]$ est l'application affine croissante qui envoie $[A_0, A_0 + L_0]$ sur $[A_1, A_1 + L_1]$, autrement dit

$$\theta : \tau \longmapsto \left(\frac{L_1}{L_0} \right) \tau + \left(A_1 - \frac{L_1}{L_0} A_0 \right).$$

En introduisant ce transport sur chaque géodésique γ passant par $\tilde{\mathcal{S}}$, on définit un transport \tilde{T} entre $\tilde{\mu}_0$ et $\tilde{\mu}_1$, qui dans les variables (y, τ) se lit simplement $\tau \longmapsto \theta(\tau)$. En particulier (en notant $\varphi(y, \tau) = \varphi(g(y, \tau))$),

$$\varphi(\tilde{T}(y, \tau)) = c + \frac{L_1}{L_0} (\varphi(y, \tau) - c) + \left(A_1 - \frac{L_1}{L_0} A_0 \right)$$

est une *fonction affine croissante* de $\varphi(y, \tau)$, dont les paramètres sont déterminés uniquement par c, A_0, A_1, L_0, L_1 . On en déduit que $\{(x, \tilde{T}(x))\}$, sous-ensemble de Γ , vérifie les conditions du Lemme 4.9 et que c'est donc le transport optimal pour (MK_2) . L'interpolation au sens W_2 entre $\tilde{\mu}_0$ et $\tilde{\mu}_1$ consiste simplement à interpoler linéairement le paramètre τ sur chaque γ , soit

$$\tilde{\mu}_t = \frac{1_{[A_t, A_t + L_t]}(\tau)}{L_t} 1_{\tilde{\mathcal{S}}}(y) (q \otimes \mathcal{L}^1)(dy d\tau),$$

où $A_t = (1 - t) A_0 + t A_1$, $L_t = (1 - t) L_0 + t L_1$. On peut donc appliquer à $\tilde{\rho}_t = d\tilde{\mu}_t/d\nu$ l'inégalité (19) ou (20) pour $0 \leq t \leq 1$.

Le transport optimal est concentré sur des géodésiques $\tilde{\gamma}_t$ de la forme $(y, (1 - t)\tau_0 + t\tau_1)$, où $\tau_1 = \theta(\tau_0)$, de sorte que $|(\tilde{\gamma}_t)'| = \tau_1 - \tau_0$. Par construction et par définition de la densité h_γ ,

$$\tilde{\rho}_t(y, \tau) = \frac{1_{[A_t, A_t + L_t]}(\tau)}{L_t h_\gamma(\tau)}.$$

L'inégalité (20) s'écrit donc ici (en évaluant en $\tau(t) = (1 - t)\tau_0 + t\tau_1$)

$$(28) \quad \ddot{w}(t) - \frac{(\dot{w}(t))^2}{N} \geq K (\tau_1 - \tau_0)^2, \quad w(t) = \log \left[\frac{1_{[A_t, A_t + L_t]}((1 - t)\tau_0 + t\tau_1)}{L_t h_\gamma((1 - t)\tau_0 + t\tau_1)} \right].$$

Dans (28) on a le choix des paramètres τ_i, A_i, L_i . On choisit $\tau_i = A_i$, et on fait tendre les L_i vers 0 de sorte que $(L_1 - L_0)/L_0 \rightarrow \alpha > 0$ (α fixé, arbitraire). En notant $\ell_\gamma(t) = -\log h_\gamma((1-t)A_0 + tA_1)$, on trouve

$$w = \ell_\gamma - \log L_t, \quad \dot{w} = \dot{\ell}_\gamma - \frac{L_1 - L_0}{L_t}, \quad \ddot{w} = \ddot{\ell}_\gamma + \frac{(L_1 - L_0)^2}{L_t^2},$$

où toutes ces expressions sont évaluées en $(1-t)A_0 + tA_1$. En reportant dans (28) et en évaluant en $\tau_0 = A_0$, on trouve

$$(29) \quad (\ddot{\ell}_\gamma + \alpha^2) - \frac{(\dot{\ell}_\gamma - \alpha)^2}{N} \geq K.$$

Il reste à optimiser par rapport à α : on trouve que le meilleur choix est obtenu pour $\alpha = \dot{\ell}_\gamma/(N-1)$, et transforme (29) en

$$(30) \quad \ddot{\ell}_\gamma - \frac{(\dot{\ell}_\gamma)^2}{N-1} \geq K$$

...ce qui est exactement le but recherché (ii)! Ici on a établi l'inégalité au point A_0 , mais on ferait de même pour l'obtenir en A_1 , et finalement en n'importe quel point de l'intervalle $]a, b[$. On constate en particulier que c'est la liberté de choisir le rapport entre L_0 et L_1 qui a permis de gagner une dimension.

Pour conclure, on note que même si la fonction ℓ_γ , évaluée le long de la géodésique, n'est pas deux fois différentiable, elle est semi-convexe, ce qui permet de justifier le calcul. \square

Remarque 5.5. — Au lieu de raisonner sur l'inégalité différentielle comme ci-dessus, on peut, à l'instar de [CaMo1], utiliser les formulations intégrales de $CD(K, N)$ et $CD^*(K, N)$. Il est commode alors de passer par la formulation $CD_{\text{loc}}(K, N)$, et le gain d'une dimension se ramène à l'identité

$$\begin{aligned} \max_{L_0, L_1} \left\{ \frac{1}{2} \beta_{1/2}^{K, N}(\gamma_0, \gamma_1)^{\frac{1}{N}} \left[\left(\frac{2L_0}{L_0 + L_1} \right)^{\frac{1}{N}} h_0^{\frac{1}{N}} + \left(\frac{2L_1}{L_0 + L_1} \right)^{\frac{1}{N}} h_1^{\frac{1}{N}} \right] \right\} \\ = \left(\frac{1}{2} \beta_{1/2}^{*K, N-1}(\gamma_0, \gamma_1) [h_0^{\frac{1}{N-1}} + h_1^{\frac{1}{N-1}}] \right)^{\frac{N-1}{N}}. \end{aligned}$$

Ayant appliqué cela aux $h_i = 1/\rho(t_i)$, on peut utiliser la propriété de localisation associée aux coefficients β^* pour globaliser cette inégalité.

6. PREUVE SYNTHÉTIQUE DE L'INÉGALITÉ DE LÉVY–GROMOV

Après les préparatifs des sections précédentes, nous n'aurons aucune difficulté à démontrer le résultat principal de cet exposé. On rappelle que $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}$ est le profil isopérimétrique normalisé associé à l'espace \mathcal{X} (muni d'une métrique et d'une mesure de

référence), comme dans (2). On notera $\mathcal{I}_{K,N}$ le profil isopérimétrique de référence, défini comme la fonction isopérimétrique normalisée de $S^{K,N} = \mathbb{S}^N(\sqrt{(N-1)/K})$ si N est entier, ou plus généralement, pour toutes valeurs de $N > 1$, comme la fonction isopérimétrique de l'espace $X^{K,N}$ défini dans la Remarque 1.5.

THÉORÈME 6.1 (principe de comparaison de Lévy–Gromov dans les espaces métriques mesurés, [CaMo1])

Soit (\mathcal{X}, d, ν) un espace géodésique mesuré compact, essentiellement non branchant, vérifiant $\text{CD}^(K, N)$ pour $K > 0$ et $1 < N < \infty$. Alors $\mathcal{I}_{\mathcal{X}} \geq \mathcal{I}_{K,N}$.*

COROLLAIRE 6.2. — *L'inégalité isopérimétrique de Lévy–Gromov de dimension N et constante K est vérifiée par les trois classes d'espaces suivantes :*

- *les limites de Gromov–Hausdorff mesurées de variétés riemanniennes de dimension au plus N et courbure de Ricci minorée par K ;*
- *les espaces d'Alexandrov de courbures minorées par $K/(N-1)$ et de dimension au plus N ;*
- *les espaces finslériens vérifiant $\text{CD}^*(K, N)$ au sens de [Oh1].*

Remarque 6.3. — C'est par cohérence avec le reste de l'exposé que l'on impose la compacité dans le Théorème 6.1 ; en fait elle découle automatiquement de $\text{CD}^*(K, N)$, comme dans [LV].

Remarque 6.4. — Dans un espace de Finsler lisse de dimension n , équipé de normes $\|\cdot\|_x$, la condition $\text{CD}^*(K, N)$ signifie essentiellement que $n \leq N$ et $\text{Ric}_g \geq Kg$, où la métrique g est définie par $g_x(v) = (1/2)d_v^2\|v\|_x^2$. Une partie importante de la théorie classique de la courbure-dimension peut s'adapter aux espaces finslériens [Oh3]. Pour la décomposition en aiguilles dans ce cadre, et les inégalités isopérimétriques optimales, on pourra consulter [Oh2].

PREUVE DU THÉORÈME 6.1 — On souhaite établir l'inégalité $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(\alpha) \geq \mathcal{I}_{K,N}(\alpha)$ pour tout $\alpha \in [0, 1]$; il suffit de le faire pour $0 < \alpha < 1$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\nu[\mathcal{X}] = 1$.

Soit donc α fixé dans $]0, 1[$, et soit A une partie mesurable de \mathcal{X} telle que $\nu[A] = \alpha$. On pose $f(x) = 1_A(x) - \alpha$, de sorte que $\int f d\nu = 0$, et f ne s'annule jamais. Par le Théorème 5.1, on peut décomposer \mathcal{X} en une union disjointe, et ν en une famille de mesures conditionnelles :

$$\mathcal{X} = \left(\bigcup_{\gamma \in Q} X_\gamma \right) \cup Z, \quad \nu = \int_Q \nu_\gamma q(d\gamma),$$

de sorte que (a) $\nu[Z] = 0$; (b) chaque espace $(X_\gamma, d, \nu_\gamma)$ vérifie $\text{CD}^*(K, N)$; et (c) $\int f d\nu_\gamma = 0$ pour (presque) tout γ . Sachant que ν_γ est concentrée sur X_γ , cette dernière propriété s'écrit

$$\nu_\gamma[A \cap X_\gamma] = \alpha.$$

On va ainsi se ramener à un problème isopérimétrique, avec le même volume α , sur chaque aiguille géodésique $(X_\gamma, d, \nu_\gamma)$: cela fonctionnera grâce à la remarque évidente

$$\begin{aligned} A^\varepsilon \cap X_\gamma &= \{x \in X_\gamma; \exists y \in A; d(x, y) \leq \varepsilon\} \\ &\supset \{x \in X_\gamma; \exists y \in A \cap X_\gamma; d(x, y) \leq \varepsilon\} = (A \cap X_\gamma)^\varepsilon, \end{aligned}$$

où, dans la dernière expression, l'élargissement est pris dans l'aiguille (X_γ, d) .

Supposons un instant le théorème démontré dans chaque $(X_\gamma, d, \nu_\gamma)$: alors, avec la notation (3) (dans l'espace de référence $X^{K,N}$),

$$\nu_\gamma[(A \cap X_\gamma)^\varepsilon] \geq \Phi_{K,N}(\alpha; \varepsilon).$$

D'où

$$\begin{aligned} \nu[A^\varepsilon] &= \int_Q \nu_\gamma[A^\varepsilon \cap X_\gamma] q(d\gamma) \\ &\geq \int_Q \nu_\gamma[(A \cap X_\gamma)^\varepsilon] q(d\gamma) \\ &\geq \int_Q \Phi_{K,N}(\alpha; \varepsilon) q(d\gamma) = \Phi_{K,N}(\alpha; \varepsilon). \end{aligned}$$

Il ne reste donc qu'à démontrer le théorème pour chaque espace monodimensionnel $(X_\gamma, d, \nu_\gamma)$; pour cela il suffit de le faire pour un sous-espace mesuré de \mathbb{R} de la forme $(I, |\cdot|, h)$: un intervalle $I = [a, b]$ de \mathbb{R} , muni de la distance canonique, et d'une densité h (pour la mesure de Lebesgue) telle que

$$(31) \quad \frac{d^2}{dt^2} h^{\frac{1}{N-1}} + \left(\frac{K}{N-1} \right) h^{\frac{1}{N-1}} \leq 0.$$

Si h est lisse, la preuve du théorème dans ce cadre se fait par des arguments classiques [Mi, Théorème 1.2, Corollaire 3.2]. Sinon, on peut régulariser h par convolution, tout en préservant l'inégalité (31) : pour cela on introduira une approximation (ϕ_δ) de l'identité au sens de la convolution, c'est-à-dire $\phi_\delta(x) = \delta^{-1}\phi(x/\delta)$, où $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse, à support dans $[-1, 1]$, strictement positive dans $] - 1, 1[$, et d'intégrale 1 ; on posera alors $h_\delta = (h^{\frac{1}{N-1}} * \phi_\delta)^{N-1}$. La densité h_δ est lisse, et par les propriétés habituelles de la convolution, elle vérifie (31) dans l'intervalle $I_\delta =]a + \delta, b - \delta[$. On a donc le résultat dans (I_δ, h_δ) , et la conclusion pour (I, h) s'ensuit par passage à la limite selon un schéma classique [Mi, Théorème 6]. \square

Remarque 6.5. — La preuve s'adapte sans la moindre difficulté pour tenir compte de la contrainte de diamètre : si dans l'énoncé on sait en outre que $\text{diam}(\mathcal{X}) \leq D$, alors on prouve que $\mathcal{I}_\mathcal{X} \geq \mathcal{I}_{K,N,D}$, la fonction isopérimétrique de la famille d'espaces modèles définie par Milman [Mi] sous contraintes de courbure-dimension et de diamètre. Pour incorporer cette extension il suffit de remarquer que $\text{diam}(X_\gamma) \leq \text{diam}(\mathcal{X})$.

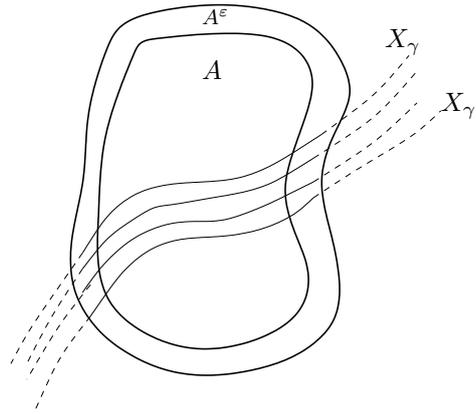


FIGURE 6. Réduction par les aiguilles X_γ à des problèmes isopérimétriques monodimensionnels; sur chaque aiguille, l'élargissement de A reste contenu dans A^ε .

Remarque 6.6. — La décomposition en aiguilles est ici basée sur un transport optimal entre la mesure uniforme portée par A , et celle qui est portée par $\mathcal{X} \setminus A$. En cela la démonstration s'inscrit dans la lignée de deux arguments « bien connus » :

- la méthode de Marton [Ma, OV] pour établir des inégalités de concentration, basée sur le transport optimal entre les mesures uniformes portées par A et $\mathcal{X} \setminus A^\varepsilon$;
- la méthode de Rajala [Ra1] pour établir des inégalités de Poincaré locales, basée sur un transport optimal entre $\{u < M\}$ et $\{u > M\}$, où M est une médiane de u (en supposant ici $\{u = M\}$ pour simplifier l'écriture).

Une surprise de taille, cependant, est la constatation que le transport en jeu est un transport (MK_1) , alors que dans presque toutes les études précédentes de la courbure-dimension, c'était le transport (MK_2) qui était à l'honneur. Cela a amené Cavalletti & Milman [CaMi] à suggérer une nouvelle notion de courbure-dimension basée sur le transport (MK_1) .

7. CAS D'OPTIMALITÉ

Les techniques de transport optimal, plutôt constructives, se prêtent si bien à l'étude de la rigidité des inégalités isopérimétriques, que c'est avec elles qu'ont été obtenus les résultats les plus fins pour la rigidité de l'inégalité isopérimétrique dans \mathbb{R}^n (non nécessairement euclidien), voir [FMP].

Pour discuter des cas d'optimalité associés au Théorème 6.1, on considérera l'hypothèse plus forte de condition de courbure-dimension « riemannienne » c'est-à-dire $RCD^*(K, N)$; on rappelle que cela implique automatiquement la propriété de non-branchement essentiel. Pour éviter des situations dégénérées, on supposera $N \geq 2$; et quitte à modifier la distance par un facteur constant, on supposera $K = N - 1$.

On rappelle quelques notions de géométrie métrique. Soient (S, d_S, ν_S) et (F, d_F, ν_F) deux espaces métriques mesurés : on pense à S (le « support ») comme à la base d'une fibration dont les fibres sont des répliques homothétiques de F . On travaillera sur le produit $S \times F$, et on se donnera une fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}_+$. Sur les chemins $\gamma : [0, 1] \rightarrow S \times F$ on définit la fonctionnelle de longueur

$$\mathcal{L}_f(\gamma) = \int_0^1 \left(|\dot{\alpha}|^2(t) + (f \circ \alpha)^2 |\dot{\beta}|^2(t) \right)^{1/2} dt$$

($|\dot{\alpha}|$ est le déplacement dans S , $|\dot{\beta}|$ le déplacement dans la fibre, dont le poids est modulé en fonction de la valeur dans S). De \mathcal{L}_f on tire une distance d_f par la formule habituelle

$$d_f((p, x), (q, y)) = \inf \{ \mathcal{L}_f(\gamma); \gamma(0) = (p, x), \gamma(1) = (q, y) \}.$$

Enfin on définit le produit tordu (*warped product*) de S par F , avec torsion f et exposant N , par

$$S \times_f^N F = \left(S \times F / d_f, d_f, f^N \nu_S \otimes \nu_F \right).$$

Les exemples les plus célèbres sont

- le cône $\text{Cone}(F)$ construit sur un espace F , défini seulement quand $\text{diam}(F) \leq \pi$; c'est le produit tordu obtenu en choisissant $S = \mathbb{R}_+$ et $f(t) = t$. Dans ce cas on peut explicitement calculer la distance :

$$d((s, x), (t, y)) = \sqrt{s^2 + t^2 - 2st \cos(d(x, y))}$$

(bien noter que la distance restreinte à S est la distance usuelle sur \mathbb{R}_+ , mais la distance restreinte à une fibre n'est pas la distance intrinsèque de la fibre, car cette dernière n'est pas géodésique dans le cône).

- la suspension sphérique construite sur F , obtenue par $S = [0, \pi]$ et $f(t) = \sin t$. Ces espaces sont connus pour intervenir dans les cas d'optimalité du théorème de Lévy–Gromov classique.

L'étude d'optimalité dans le Théorème 6.1 se fait sans douleur grâce à la nature assez constructive de la démonstration, et à l'aide de deux résultats auxiliaires :

- la monotonie stricte du profil isopérimétrique par rapport au diamètre : si, comme dans la Remarque 6.5, on note $\mathcal{I}_{N-1, N, D}$ la fonction isopérimétrique sous contrainte de diamètre au plus égal à D , alors pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $\mathcal{I}_{N-1, N, D}$ est une fonction strictement décroissante de $D \in]0, \pi[$ (ajouter des contraintes augmente strictement l'infimum isopérimétrique) [CaMo1, Lemme 6.5].

- le théorème de diamètre maximal, démontré dans ce cadre par Ketterer [K2] : si (\mathcal{X}, d, ν) vérifie $\text{RCD}^*(N-1, N)$ et $\text{diam}(\mathcal{X}) = \pi$, alors il existe un espace géodésique mesuré (\mathcal{X}', d', ν') tel que $(\mathcal{X}, d, \nu) \simeq [0, \pi] \times_{\sin}^{N-1} \mathcal{X}'$, et \mathcal{X}' vérifie $\text{RCD}^*(N-2, N-1)$. Ce théorème est à son tour obtenu en combinant la propriété de courbure-dimension du cône et le théorème de décomposition en courbure positive (dû à Gigli [G2] dans ce contexte) : en effet, la propriété de diamètre maximal implique que $C = \text{Cone}(\mathcal{X})$ contient une droite infinie, et par propriété de courbure-dimension il vérifie $\text{RCD}^*(0, N+1)$; on peut

donc le décomposer selon cette droite, et cela permet de décomposer \mathcal{X} à son tour en un produit tordu.

Après ces préliminaires, voici les deux théorèmes de rigidité démontrés par Cavalletti–Mondino [CaMo1]. Le premier montre que si le profil isopérimétrique de \mathcal{X} coïncide avec le profil de référence, *ne serait-ce qu'en une seule valeur*, alors l'espace est une suspension sphérique.

THÉORÈME 7.1. — *Soit (\mathcal{X}, d, ν) un espace géodésique mesuré compact vérifiant $\text{RCD}^*(N-1, N)$, $2 \leq N < \infty$. S'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(\alpha) = \mathcal{I}_{K,N}(\alpha)$, alors*

$$\mathcal{X} \simeq [0, \pi] \times_{\sin}^{N-1} \mathcal{Y},$$

où \mathcal{Y} est un espace géodésique mesuré vérifiant $\text{RCD}^*(N-2, N-1)$. En outre $\mathcal{I}_{\mathcal{X}} = \mathcal{I}_{K,N}$, et toute solution A du problème isopérimétrique dans \mathcal{X} vérifie $\overline{A} = [a, b] \times_{\sin}^{N-1} \mathcal{Y}$, avec $a = 0$ ou $b = \pi$.

Le second théorème est un résultat de stabilité en topologie de Gromov–Hausdorff mesurée; en un sens c'est une généralisation qualitative des estimations quantitatives obtenues par Bérard, Besson et Gallot [BeBG]. On notera d_{mGH} l'une quelconque des distances métrisant la topologie de Gromov–Hausdorff mesurée [St] [Vi1, Chapitre 27].

THÉORÈME 7.2. — *Pour tous $N > 1$, $\alpha \in]0, 1[$, $\varepsilon > 0$ il existe $\eta = \eta(N, \alpha, \varepsilon)$ tel que si (\mathcal{X}, d, ν) est $\text{RCD}^*(N-1-\delta, N+\delta)$ et*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(\alpha) \leq \mathcal{I}_{N-1,N}(\alpha) + \delta,$$

alors si $\delta \leq \eta$ il existe \mathcal{Y} un espace $\text{RCD}^*(N-2, N-1)$ tel que

$$d_{\text{mGH}}(\mathcal{X}, [0, \pi] \times_{\sin}^{N-1} \mathcal{Y}) \leq \varepsilon.$$

PREUVE DU THÉORÈME 7.1 (ÉBAUCHE) — Si $\text{diam}(\mathcal{X}) \leq \pi - \varepsilon_0 < \pi$, alors en combinant la Remarque 6.5 avec la propriété de monotonie du profil isopérimétrique, on a

$$\mathcal{I}_{N-1,N}(\alpha) = \mathcal{I}_{\mathcal{X}}(\alpha) \geq \mathcal{I}_{N-1,N,\pi-\varepsilon_0}(\alpha) > \mathcal{I}_{N-1,N}(\alpha),$$

ce qui est impossible. On en déduit que le diamètre de \mathcal{X} est égal à π , et le théorème de diamètre maximal permet d'écrire \mathcal{X} comme une suspension sphérique sur un espace \mathcal{Y} , l'espace $[0, \pi]$ s'identifiant à l'image d'une géodésique de longueur π . En utilisant la fonction φ , on identifie \mathcal{Y} à l'espace quotient Q , les rayons X_γ étant tous isométriques à $[0, \pi]$.

Ensuite, en considérant des minimiseurs de la forme $[a, b] \times \mathcal{Y}$, on prouve que $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(\alpha) = \mathcal{I}_{K,N}(\alpha)$ pour *tout* $\alpha \in [0, 1]$. Reste à montrer que toute solution compacte A du problème isopérimétrique est de la forme $[a, b] \times \mathcal{Y}$. Pour cela on retourne à la preuve du Théorème 6.1 : l'optimalité n'est possible que si $A \cap X_\gamma$ est optimal dans X_γ , soit, modulo identification, dans le segment $[0, \pi]$; on prouve alors que $A \cap X_\gamma$ est forcément de la forme $[a, b]$, où $a = 0$ ou $b = \pi$, cela pour presque tout $\gamma \in Q$. On montre enfin que l'optimalité de A implique un choix : soit $a = 0$ pour presque tout γ ; soit $b = \pi$ pour presque tout γ . On renvoie à [CaMo1] pour les détails. \square

PREUVE DU THÉORÈME 7.2 (ÉBAUCHE) — Ce résultat découle facilement du Théorème 7.1, de la propriété de diamètre maximal, de la continuité et de la monotonie de $\mathcal{I}_{K,N,D}$, et de la continuité de tous les objets considérés par rapport à la topologie de Gromov–Hausdorff mesurée (par exemple l’ensemble de tous les \mathcal{Y} qui vérifient $\text{RCD}^*(N-2, N-1)$ est compact, et par suite l’ensemble de tous les $[0, \pi] \times_{\sin}^{N-1} \mathcal{Y}$ est également compact). On renvoie encore à [CaMo1] pour les détails. \square

8. DÉVELOPPEMENTS

C’est une question naturelle de se demander si la preuve du Théorème 6.1 s’adapte au cas où $N = \infty$, traité pour des varités riemanniennes par Bakry–Ledoux [BL]. Cela ne va pas de soi, car le Théorème 4.6 sur la structure du transport optimal (MK_1) n’a pas de raison de s’appliquer quand $N = \infty$. Pour démontrer une comparaison isopérimétrique dans des espaces métriques de classe $\text{CD}(K, \infty)$, on se retrouve alors avec deux stratégies, dont chacune généralise le Théorème de Bakry–Ledoux dans une direction différente :

- Sur un espace vérifiant localement une inégalité de courbure-dimension, on peut reproduire l’argument de [CaMo1] dans de grandes boules, et passer à la limite pour obtenir l’inégalité souhaitée. Cette approche couvrira des espaces $\text{CD}^*(K, \infty)$ essentiellement non branchants qui sont « localement de dimension finie au sens de la courbure-dimension », c’est-à-dire dans lesquels chaque x est centre d’une boule où le critère de courbure $\text{CD}(K', N')$ sera vérifié pour des paramètres K', N' éventuellement dépendant de x ;

- Sur un espace $\text{RCD}(K, \infty)$, on peut adapter l’argument de Bakry–Ledoux, sur la base du calcul Γ_2 non lisse de Savaré [Sav] ; cette approche, menée à bien dans [AM], ne s’applique qu’aux espaces RCD , et pas aux espaces CD^* non branchants. Ce programme peut aussi être mené à bien dans les espaces finlésiens $\text{CD}(K, N)$ [Oh4].

Une autre question naturelle consiste à identifier d’autres problèmes que les idées de Klartag, Cavalletti et Mondino peuvent traiter. Comme le montraient Kannan, Lovász et Simonovits [KLS], la méthode de localisation en aiguilles peut en principe s’appliquer à toutes les inégalités de la forme $(\int g_1)^\alpha (\int g_2)^\beta \leq (\int g_3)^\alpha (\int g_4)^\beta$, pourvu que l’on sache construire des décompositions adaptées. L’apport principal de Klartag dans les géométries lisses, et de Cavalletti–Mondino dans les géométries non lisses, est de démontrer que le transport optimal (MK_1) fournit une telle décomposition, souple et générale. Pour la mettre en œuvre sur un problème donné, il convient donc d’introduire une fonction f adéquate, de moyenne nulle ; d’en déduire par le Théorème 5.1 une décomposition en aiguilles géodésiques ; de montrer que l’inégalité se localise sur ces aiguilles, et ainsi de se ramener à la dimension 1.

Armés de ce point de vue efficace, Cavalletti et Mondino [CaMo2] n’ont eu aucune difficulté à établir un certain nombre d’inégalités géométriques optimales dans les espaces

$CD^*(K, N)$ essentiellement non branchants, ainsi que les cas d'égalité correspondants dans les espaces $RCD^*(K, N)$:

- Pour l'inégalité optimale de Brunn–Minkowski entre deux ensembles compacts A_0 et A_1 , on choisit $f = 1_{A_0}/\nu[A_0] - 1_{A_1}/\nu[A_1]$; la localisation est possible parce que l'interpolation géodésique $[A_0, A_1]_t$ n'est pas moins grande que celle qui est effectuée selon la décomposition particulière induite par f .

- Pour l'inégalité de trou spectral L^2 , appliquée à une fonction u de moyenne nulle, on pose simplement $f = u$; la localisation est possible parce que $|\dot{u}| \leq |\nabla u|$, où $|\dot{u}|$ désigne la variation de u le long d'une géodésique. L'étude de l'optimalité permet de prouver une version non lisse du théorème de rigidité d'Obata; et cette approche fonctionne aussi pour l'inégalité de p -trou spectral, avec $f = u|u|^{p-2}$.

- Dans le cas où ν est une mesure de probabilité, pour l'inégalité de Sobolev logarithmique, appliquée à une densité de probabilité h , on pose simplement $f = h - 1$; encore une fois, c'est l'inégalité $|\dot{h}| \leq |\nabla h|$ qui permet de localiser.

- Pour l'inégalité de Sobolev (p, q) , appliquée à une fonction u , on pose $f = 1 - |u|^p / \|u\|_{L^p(\nu)}^p$; et à nouveau on utilise $|\dot{u}| \leq |\nabla u|$.

Dans ce dernier cas, on obtient ainsi l'inégalité optimale mentionnée par Ledoux [Le, formule (16)] comme un problème ouvert; plus généralement, presque tous les problèmes de constantes optimales dimensionnelles recensés dans [Vi1] se retrouvent résolus.

9. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Au cours des dix dernières années, la théorie de la courbure-dimension dans les espaces géodésiques mesurés s'est approprié de plus en plus de sujets, fournissant un cadre naturel même au niveau de la formulation des énoncés : par exemple, la propriété du cône s'y exprime naturellement (le cône n'est pas, sauf cas particulier, une variété riemannienne, mais c'est un espace RCD), et le théorème de précompacité de Gromov (sous contraintes de courbure-dimension et de diamètre) y devient un théorème de compacité.

Cavalletti–Mondino démontrent que cette théorie peut également couvrir des inégalités optimales en dimension finie, sans rien laisser à désirer par rapport au cadre lisse. Ils montrent en outre que cela peut se faire à partir de la condition en apparence sous-optimale CD^* . En fait, si les résultats annoncés dans [CaMi] sont confirmés, les conditions CD et CD^* sont en fait équivalentes, au moins sous une hypothèse de non-branchement; ce qui signifierait que le choix entre CD et CD^* (ou CD^e) est plus ou moins une question de goût. Mais comme CD^* a l'avantage d'être « naturellement » globalisable, on peut argumenter que CD^* émerge comme la condition naturelle de courbure-dimension quand $N/K < \infty$.

En fin de compte, on peut maintenant distinguer trois déclinaisons de la théorie, en fonction de la régularité considérée.

Le cadre le plus abouti est celui des espaces $\text{RCD}^*(K, N)$: il contient les limites de variétés riemanniennes et les espaces d’Alexandrov ; on y trouve maintenant des résultats très précis, et à peu près toute la théorie classique a pu y être adaptée. On peut définir un opérateur laplacien et faire le pont avec la théorie de Bakry–Émery [AGS4, EKS]. On a maintenant des inégalités optimales fines, avec rigidité [CaMo1, CaMo2] ; tout au plus les résultats de rectifiabilité [KM, GP, MN] laissent-ils peut-être de la place à amélioration. Se pose également la question de savoir si l’on trouve dans cette classe des espaces qui ne sont pas des limites de variétés riemanniennes. Enfin, on note que des résultats topologiques ont été récemment démontrés [MW], et que d’autres suivront probablement.

À un niveau plus général, viennent ensuite les espaces CD^* essentiellement non branchants. Ce cadre autorise les espaces finslériens, et l’on peut espérer qu’il permette, autant que possible, un traitement unifié des inégalités riemanniennes et finslériennes (à l’instar des inégalités optimales de Sobolev de [CNV, MaVi], qui sont indépendantes de la norme). Le travail de Cavalletti–Mondino plaide pour faire de cette catégorie d’espaces un cadre naturel ; cependant, plusieurs problèmes restent posés :

- enrichir la liste d’exemples : par exemple, a-t-on des conditions simples sur les bornes de courbure-dimension dans la sphère unité d’un espace normé uniformément convexe ? À partir de cette question, on peut espérer incorporer dans la théorie les estimations de concentration de [Al, GM] (en dimension finie ou infinie).

- trouver des sous-classes (autres que RCD^*) stables par topologie de Gromov–Hausdorff mesurée, car la classe de tous les espaces $\text{CD}^*(K, N)$ essentiellement non branchants ne l’est pas. On pourrait imaginer, par exemple, des classes définies par le degré d’uniforme convexité de l’espace $W^{1,2}(\mathcal{X})$? À ce sujet on peut noter que la preuve de la propriété de non-branchement essentiel dans la classe RCD^* est délicate et surprenamment indirecte.

- incorporer les géométries sous-riemanniennes, du style de l’espace de Heisenberg. Si Baudoin–Bonnet–Garofalo [BBG] ont proposé de gérer ces espaces par des familles d’inégalités fonctionnelles à la Bakry–Émery, en revanche Balogh–Krystály–Sipos [BKS] ont montré tout récemment que l’on pouvait les traiter par transport, de façon similaire aux espaces CD et CD^* , grâce à l’emploi de coefficients de distortion bien choisis, qui *ne se comparent pas* aux coefficients $\beta^{K,N}$ ou $\beta^{*K,N}$, et permettent d’obtenir des inégalités isopérimétriques optimales.

Un travail important de clarification reste à mener, mais on peut espérer ainsi une « grande unification » synthétique des bornes de courbure-dimension dans trois larges classes de géométries : riemanniennes, finslériennes, sous-riemanniennes.

Enfin reste le cas des espaces métriques branchants, pour lequel nous avons le choix entre les différentes notions présentées dans la Définition 2.6. Ici une question prioritaire consiste à trouver de nouveaux exemples d’intérêt, sachant que le branchement est souvent associé à la courbure négative : a-t-on aussi des exemples pertinents d’espaces métriques mesurés branchants en courbure positive ?

Pour conclure, on rappelle que les notions non lisses se prêtent par nature à des généralisations dans des contextes encore plus singuliers, en dehors des espaces géodésiques, et que l'on peut aussi attendre de nouveaux travaux dans ces directions.

RÉFÉRENCES

- [Al] S. ALESKER – *Localization technique on the sphere and the Gromov–Milman theorem on the concentration phenomenon on uniformly convex sphere*, in *Convex Geometric Analysis*, MSRI Publications **34**, 17–27, Cambridge University Press, 1998.
- [A] F. ALMGREN – *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints*, Mem. Amer. Math. Soc. **165**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1976.
- [AGMR] L. AMBROSIO, N. GIGLI, A. MONDINO & T. RAJALA – *Riemannian Ricci curvature lower bounds in metric measure spaces with σ -finite measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **367**, 7 (2015), 4661–4701.
- [AGS1] L. AMBROSIO, N. GIGLI & G. SAVARÉ – *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, Première édition, 2005 ; Seconde édition, 2008.
- [AGS2] L. AMBROSIO, N. GIGLI & G. SAVARÉ – *Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below*, Invent. Math. **195**, 2 (2014), 289–391.
- [AGS3] L. AMBROSIO, N. GIGLI & G. SAVARÉ – *Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below*, Duke Math. J. **163** (2014), 1405–1490.
- [AGS4] L. AMBROSIO, N. GIGLI & G. SAVARÉ – *Bakry–Émery curvature-dimension condition and Riemannian Ricci curvature bounds*, Ann. Probab. **43** (2015), 339–404.
- [AM] L. AMBROSIO & A. MONDINO – *Gaussian-type isoperimetric inequalities in $\text{RCD}(K, \infty)$ probability spaces for positive K* , Rend. Lincei Mat. Appl. **27**, (2016), 497–514.
- [AMS1] L. AMBROSIO, A. MONDINO & G. SAVARÉ – *On the Bakry–Émery condition, the gradient estimates and the local-to-global property of $\text{RCD}^*(K, N)$ metric measure spaces*. J. Geom. Anal. **26** (2016), 24–56.
- [AMS2] L. AMBROSIO, A. MONDINO & G. SAVARÉ – *Nonlinear diffusion equations and curvature conditions in metric measure spaces*, arxiv.org/abs/1509.07273
- [AT] L. AMBROSIO & L. TILLI – *Topics on analysis in metric spaces*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, Vol **25**, 2003.

- [BS] K. BACHER & K.-Th. STURM – *Localization and tensorization properties of the Curvature-Dimension condition for metric measure spaces*, J. Funct. Anal. **259** (2010), 28–56.
- [BGL] D. BAKRY, I. GENTIL & M. LEDOUX – *Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **348**, Springer, 2014.
- [BL] D. BAKRY & M. LEDOUX – *Lévy–Gromov’s isoperimetric inequality for an infinite-dimensional diffusion generator*, Invent. Math. **123**, 2 (1996), 259–281.
- [BKS] Z.M. BALOGH, A. KRISTÁLY & K. SIPOS – *Geometric inequalities on Heisenberg groups*, arxiv.org/abs/1605.06839
- [BBG] F. BAUDOIN, M. BONNEFONT & N. GAROFALO – *A sub-Riemannian curvature-dimension inequality, volume doubling property and the Poincaré inequality*, Math. Ann. **358**, 3-4 (2014), 833-860.
- [BeBG] P.H. BÉRARD, G. BESSON & S. GALLOT – *Sur une inégalité isopérimétrique qui généralise celle de Paul Lévy – Gromov*, Invent. Math. **80**, 2 (1985), 295–308.
- [BC] S. BIANCHINI & F. CAVALLETTI – *The Monge problem for distance cost in geodesic spaces*, Comm. Math. Phys. **318** (2013), 615–673.
- [BGGK] F. BOLLEY, I. GENTIL, A. GUILLIN & K. KUWADA – *Equivalence between dimensional contractions in Wasserstein distance and the curvature-dimension condition*, arxiv.org/abs/1510.07793
- [Br] Y. BRENIER – *Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **305**, 19 (1987), 805–808.
- [BBI] D. BURAGO, Y. BURAGO & S. IVANOV – *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **33**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Liste d’Errata disponible à www.pdmi.ras.ru/staff/burago.html
- [BGP] Y. BURAGO, M. GROMOV & G. PERELMAN – *A. D. Aleksandrov spaces with curvatures bounded below*, Uspekhi Mat. Nauk **47**, 2(284) (1992), 3–51, 222.
- [C1] F. CAVALLETTI – *Monge problem in metric-measure spaces with Riemannian curvature-dimension condition*, Nonlinear Anal. **99** (2014), 136–151.
- [C2] F. CAVALLETTI – *An overview of L^1 optimal transportation on metric measure spaces*, À paraître dans *Measure theory on non-smooth spaces*, De Gruyter.
- [CaMi] F. CAVALLETTI & E. MILMAN – *The Globalization Theorem for the Curvature Dimension condition*, Manuscrit, 2016.

- [CaMo1] F. CAVALLETTI & A. MONDINO – *Sharp and rigid isoperimetric inequalities in metric-measure spaces with lower Ricci curvature bounds*, À paraître dans *Invent. Math.*
- [CaMo2] F. CAVALLETTI & A. MONDINO – *Sharp geometric and functional inequalities in metric measure spaces with lower Ricci curvature bounds*, À paraître dans *Geometry & Topology*.
- [ChDP] Th. CHAMPION & L. De PASCALE – *The Monge Problem in \mathbb{R}^d* , *Duke Math. J.* **157**, 3 (2011), 551–572.
- [Ch] J. CHEEGER – *Differentiability of Lipschitz Functions on Metric Measure Spaces*, *Geom. Funct. Anal.* **9**, 3 (1999), 428–517.
- [ChCo1] J. CHEEGER & T.H. COLDING – *Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products*, *Ann. of Math.* **144** (1996), 189–237.
- [ChCo2] J. CHEEGER & T.H. COLDING – *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below*, *J. Differential Geom.* **46**, 3 (1997), 406–480 (Partie I), *J. Differential Geom.* **54**, 1 (2000), 13–35 (Partie II) et 37–74 (Partie III).
- [CEMS] D. CORDERO-ERAUSQUIN, R.J. McCANN & M. SCHMUCKENSCHLÄGER – *A Riemannian interpolation inequality à la Borell, Brascamp and Lieb*, *Invent. Math.* **146**, 2 (2001), 219–257.
- [CNV] D. CORDERO-ERAUSQUIN, B. NAZARET & C. VILLANI – *A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo–Nirenberg inequalities*, *Adv. Math.* **182**, 2 (2004), 307–332.
- [DPG] G. DE PHILIPPIS & N. GIGLI – *From volume cone to metric cone in the nonsmooth setting*, À paraître dans *Geom. And Funct. Anal.*
- [DS] Q. DENG & K.-Th. STURM – *Localization and tensorization properties of the curvature-dimension condition for metric measure spaces, II*, *J. Funct. Anal.* **260**, 12 (2011), 3718–3725.
- [EKS] M. ERBAR, K. KUWADA & K.-Th. STURM – *On the equivalence of the entropic curvature-dimension condition and Bochner’s inequality on metric measure spaces*, *Invent. Math.* **201** (2015), 993–1071.
- [FMcC] M. FELDMAN & R.J. McCANN – *Monge’s transport problem on a Riemannian manifold*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **354**, 4 (2001), 1667–1697.
- [FMP] A. FIGALLI, F. MAGGI & A. PRATELLI – *A mass transportation approach to quantitative isoperimetric inequalities*, *Invent. Math.* **182**, 1 (2010), 167–211.
- [KM] M. KELL & A. MONDINO – *On the volume measure of non-smooth spaces with Ricci curvature bounded below*, À paraître dans *Annali SNS*.
- [GaMo] N. GAROFALO & A. MONDINO – *Li–Yau and Harnack type inequalities in $\text{RCD}^*(K, N)$ metric measure spaces*, *Nonlinear Analysis TMA* **95** (2014), 721–734.

- [G1] N. GIGLI – *On the heat flow on metric measure spaces : existence, uniqueness and stability*, Calc. Var. Partial Differential Equations **39**, 1–2 (2010), 101–120.
- [G2] N. GIGLI – *The splitting theorem in non-smooth context*, 2013, arXiv:1302.5555v1
- [G3] N. GIGLI – *Optimal maps in non branching spaces with Ricci curvature bounded from below*, Geom. Funct. Anal. **22** (2012), 990–999.
- [G4] N. GIGLI – *An overview of the proof of the Splitting Theorem in spaces with non-negative Ricci curvature*, Analysis and Geometry in Metric Spaces **2** (2014), 169–213.
- [G5] N. GIGLI – *On the differential structure of metric measure spaces and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **236**, 1113, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
- [G6] N. GIGLI – *Nonsmooth differential geometry - An approach tailored for spaces with Ricci curvature bounded from below*, À paraître dans Mem. Amer. Math. Soc.
- [G7] N. GIGLI – communication personnelle (2017).
- [GKO] N. GIGLI, K. KUWADA & Sh.-I. OHTA – *Heat flow on Alexandrov spaces*, Comm Pure Appl. Math. **66**, 3 (2013), 307–331.
- [GMS] N. GIGLI, A. MONDINO & G. SAVARÉ – *Convergence of pointed non-compact metric measure spaces and stability of Ricci curvature bounds and heat flows*, Proc. Lond. Math. Soc. **111** (2015), 1071–1129.
- [GP] N. GIGLI & E. PASQUALETTO – *Behaviour of the reference measure on RCD spaces under charts*, arxiv.org/abs/1607.05188
- [GRS] N. GIGLI, T. RAJALA & K.-Th. STURM – *Optimal maps and exponentiation on finite dimensional spaces with Ricci curvature bounded from below*, J. Geom. Anal. **26**, 4 (2016), 2914–2929.
- [Gr1] M. GROMOV – *Paul Lévy’s isoperimetric inequality*, Prépublication IHES, 1980. Reproduit dans [Gr2, Appendice C].
- [Gr2] M. GROMOV – *Metric structures for Riemannian and non Riemannian spaces*, Modern Birkhäuser Classics, 2007.
- [GM] M. GROMOV & V. MILMAN – *Generalization of the spherical isoperimetric inequality to uniformly convex Banach spaces*, Compos. Math. **62** (1987), 262–282.
- [HK] E. HEINTZE & H. KARCHER – *A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds*, Ann. Ec. Norm. Sup. **11** (1978), 451–470.
- [HLMM] C. HOUDRÉ, M. LEDOUX, E. MILMAN & M. MILMAN – *Concentration, Functional Inequalities and Isoperimetry (Boca Raton, 2009)*, Contemp. Math. **545**, Amer. Math. Soc., 2011.

- [JKO] R. JORDAN, D. KINDERLEHRER & F. OTTO – *The variational formulation of the Fokker–Planck equation*, SIAM J. Math. Anal. **29**, 1 (1998), 1–17.
- [KLS] R. KANNAN, L. LOVÁSZ & M. SIMONOVITS – *Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma*, Discrete Comput. Geom. **13**, 3-4 (1995), 541–559.
- [K1] Ch. KETTERER – *Ricci curvature bounds for warped products*, J. Funct. Anal. **265**, 2 (2013), 266–299.
- [K2] Ch. KETTERER – *Cones over metric measure spaces and the maximal diameter theorem*, J. Math. Pures et Appl. **103**, 5 (2015), 1228–1275.
- [Kl] B. KLARTAG – *Needle decomposition in Riemannian geometry*, à paraître dans Mem. Amer. Math. Soc.
- [KK] B. KLOECKNER & G. KUPERBERG – *The Cartan–Hadamard Conjecture and the Little Prince*, arxiv.org/abs/1303.3115
- [Le] M. LEDOUX – *Géométrie des espaces métriques mesurés : Les travaux de Lott, Villani, Sturm*, Sémin. Bourbaki 2008/09, Exp. n° 990, Astérisque **326** (2009), 257–280.
- [Lev] P. LÉVY – *Leçons d’analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1922. Ré-édité en 1951 sous le titre *Problèmes concrets d’analyse fonctionnelle*.
- [LV] J. LOTT & C. VILLANI – *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, Annals of Math. **169** (2009), 903–991.
- [LV2] J. LOTT & C. VILLANI – *Weak curvature bounds and functional inequalities*, J. Funct. Anal. **245**, 1 (2007), 311–333.
- [MaVi] F. MAGGI & C. VILLANI – *Balls have the worst best Sobolev inequalities*, J. Geom. Anal. **15**, 1 (2005), 83–121.
- [Ma] K. MARTON – *A measure concentration inequality for contracting Markov chains*, Geom. Funct. Anal. **6** (1996), 556–571.
- [McC1] R.J. McCANN – *A convexity principle for interacting gases*, PhD Thesis, Princeton Univ., 1994, publié dans Adv. Math. **128**, 1 (1997), 153–179.
- [McC2] R.J. McCANN – *Polar factorization of maps on Riemannian manifolds*, Geom. Funct. Anal. **11**, 3 (2001), 589–608.
- [Mi] E. MILMAN – *Sharp isoperimetric inequalities and model spaces for Curvature-Dimension-Diameter condition*, J. Eur. Math. Soc. **17**, 5 (2015), 1041–1078
- [MN] A. MONDINO & A. NABER – *Structure Theory of Metric-Measure Spaces with Lower Ricci Curvature Bounds I*, arxiv.org/abs/1405.2222
- [MW] A. MONDINO & G. WEI – *On the universal cover and the fundamental group of an $\text{RCD}^*(K, N)$ -space*, À paraître dans J. Reine Angew. Math.
- [Mo] G. MONGE – *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, Histoire de l’Académie Royale des Sciences de Paris (1781), 666–704.

- [Oh1] Sh.-I. OHTA – *Optimal transport and Ricci curvature in Finsler geometry*, In Probabilistic Approach to Geometry, Adv. Stud. Pure Math. **57** (2010), 323–342.
- [Oh2] Sh.-I. OHTA – *Needle decompositions and isoperimetric inequalities in Finsler geometry*, à paraître dans J. Math. Soc. Japan.
- [Oh3] Sh.-I. OHTA – *Nonlinear geometric analysis on Finsler manifolds*, www.math.kyoto-u.ac.jp/~sohta
- [Oh4] Sh.-I. OHTA – *A semigroup approach to Finsler geometry : Bakry–Ledoux’s isoperimetric inequality*, www.math.kyoto-u.ac.jp/~sohta
- [OV] F. OTTO & C. VILLANI – *Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality*, J. Funct. Anal. **173**, 2 (2000), 361–400.
- [PW] L.E. PAYNE & H.F. WEINBERGER – *An optimal Poincaré inequality for convex domains*, Arch. Rational Mech. Anal. **5** (1960), 286–292.
- [Pe] A. PETRUNIN – *Alexandrov meets Lott–Villani–Sturm*, Münster J. Math. **4** (2011), 53–64.
- [Ra1] T. RAJALA – *Local Poincaré inequalities from stable curvature conditions on metric spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations **44** (2012), 477–494.
- [Ra2] T. RAJALA – *Failure of the local-to-global property for $CD(K, N)$ spaces*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. **16** (2016), 45–68.
- [RS] T. RAJALA & K.-Th. STURM – *Non-branching geodesics and optimal maps in strong $CD(K, \infty)$ spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations **50**, 3–4 (2014), 831–846.
- [Sa] F. SANTAMBROGIO – *Optimal transport for applied mathematicians – Calculus of variations, PDEs, and Modeling*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications **87**, Birkhäuser, 2015.
- [Sav] G. SAVARÉ – *Self-improvement of the Bakry–Émery condition and Wasserstein contraction of the heat flow in $RCD(K, \infty)$ metric measure spaces*, Disc. Cont. Dyn. Syst. A **34** (2014), 1641–1661.
- [Sh] N. SHANMUGALINGAM – *Newtonian spaces, An extension of Sobolev spaces to metric measure spaces*, Rev. Mat. Iberoamericana **16**, 2 (2000), 243–279.
- [St] K.-Th. STURM – *On the geometry of metric measure spaces*, Acta Math. **196**, 1 (2006), 65–131 (Part I), 133–177 (Part II).
- [SvR] K.-Th. STURM & M.-K. von RENESSE – *Transport inequalities, gradient estimates, entropy and Ricci curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **58**, 7 (2005), 923–940.
- [Su] V.N. SUDAKOV – *Geometric problems in the theory of infinite-dimensional probability distributions*, Proc. Steklov Inst. Math. **141** (1979), 1–178.

- [Vi1] C. VILLANI – *Optimal transport, old and new*, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* **338**, Springer, 2009.
- [Vi2] C. VILLANI – *Synthetic theory of Ricci curvature bounds*, *Japanese J. Math.* **11**, 2 (2016), 219–263.
- [ZZ] H.-Ch. ZHANG & X.-P. ZHU – *Ricci curvature on Alexandrov spaces and rigidity theorems*, *Comm. Anal. Geom.* **18** (2010), 503–554.

Cédric VILLANI

Institut Henri Poincaré (CNRS/UPMC)
& Université Claude Bernard Lyon 1
Université de Lyon

Institut Camille Jordan

UMR CNRS 5208

43, boulevard du 11 novembre 1918

F-69622 Villeurbanne cedex

E-mail : villani@math.univ-lyon1.fr

E-mail : villani@ihp.fr