Séminaire BOURBAKI Mars 2017
69ème année, 2016-2017, n$^{\text{o}}$ 1128

LE PROBLÈME DE RIEMANN-HILBERT DANS LE CAS IRRÉGULIER [d'après des travaux de D'Agnolo, Kashiwara, Mochizuki et Schapira]

par **Stéphane GUILLERMOU**

INTRODUCTION

Le nom « problème de Riemann-Hilbert » fait référence au vingt-et-unième problème proposé par Hilbert au Congrès international de Paris en 1900 : « Prouver qu'il existe toujours une équation différentielle linéaire de la classe de Fuchs avec des singularités et un groupe de monodromie donnés. » Il s'agissait d'équations différentielles linéaires sur $\mathbb{C}$ ou sur une surface de Riemann. On peut avoir en tête l'exemple très simple $x\partial_x - \alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{C}$, dont les zéros sont les multiples de x^α. Quand on parcourt un lacet simple autour de 0 et qu'on étend une solution par prolongement analytique, après un tour on retrouve la même solution multipliée par $\exp(2i\pi\alpha)$. Cet opérateur de multiplication par $\exp(2i\pi\alpha)$ s'appelle la *monodromie*. On peut regarder plus généralement une équation d'ordre n ou un système $y'(x) = A(x)y(x)$ où $A(x)$ est une fonction méromorphe à valeurs dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Là encore l'ensemble des solutions holomorphes forme un faisceau localement constant sur la surface privée des pôles de A, avec une monodromie à valeurs dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. La question est donc de trouver A à partir de ce faisceau. La classe de Fuchs correspond au cas où A n'a que des pôles simples (on utilise aussi l'expression « à singularités régulières »). Pour des détails sur cette question en dimension 1 nous renvoyons à [Be93].

Dans cet exposé nous allons voir que le problème de Riemann-Hilbert sur une variété analytique complexe X de dimension quelconque a une réponse positive, bien sûr après avoir précisé quel type (de systèmes) d'équations différentielles et quel type de solutions on considère. Nous verrons que la généralisation naturelle d'une équation différentielle ordinaire linéaire est donnée par la notion de *$\mathcal{D}_X$-module holonome.* Le cas à singularités régulières correspond aux $\mathcal{D}_X$-modules holonomes *réguliers.* Dans [Ka75] Kashiwara montre que les solutions holomorphes d'un $\mathcal{D}_X$-module holonome forment un faisceau $\mathbb{C}$-constructible. Il conjecture (voir [Ra78] p. 287) que le foncteur qui à un $\mathcal{D}_X$-module associe ses solutions holomorphes induit une équivalence entre $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hr}}(\mathcal{D}_X)$ et $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$, où $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hr}}(\mathcal{D}_X)$ désigne la catégorie dérivée bornée des complexes de $\mathcal{D}_X$-modules à cohomologie holonome régulière et $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$ la catégorie dérivée bornée des complexes de faisceaux à cohomologie $\mathbb{C}$-constructible. Dans [Ka80, Ka84] Kashiwara prouve cette équivalence en construisant un foncteur inverse au foncteur solution (voir aussi [Me84] pour une autre approche par Mebkhout).

Le cas des modules holonomes quelconques a été résolu récemment. La construction de l'inverse se généralise à des outils plus précis (faisceaux sous-analytiques de fonctions holomorphes tempérées) introduits par Kashiwara-Schapira [KS01] et utilisés par D'Agnolo-Kashiwara [DK16]. Le résultat de [DK16] dit que le foncteur qui envoie un module holonome sur ses solutions holomorphes *renforcées* est pleinement fidèle. Un article de Mochizuki [Mo16] décrit l'image de ce foncteur.

Nous introduisons ici les notions qui permettent d'énoncer les résultats de [DK16] et nous donnons très grossièrement le schéma de la preuve. Pour un exposé plus précis on peut consulter [Ka16b]. Pour un exposé beaucoup plus détaillé mais quand même assez court nous renvoyons au livre [KS16].

$\mathcal{D}$-modules – solutions. — Nous précisons maintenant ce qu'on entend par « système d'équations » ($\mathcal{D}$-module) et « solution holomorphe ». En dimension 1 on voit que la réponse au problème de Riemann-Hilbert dépend de la façon dont on veut représenter le système différentiel. La méthode la plus intrinsèque est probablement d'associer à un système d'EDP linéaires à coefficients holomorphes un $\mathcal{D}$-module. Nous expliquons rapidement ce que cela signifie. Par la suite nous ne considérerons plus que des $\mathcal{D}$-modules. Soit X une variété analytique complexe. Nous notons $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X et $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients holomorphes. C'est un faisceau d'anneaux (le produit est la composition). Un $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ est un faisceau de modules à gauche sur $\mathcal{D}_X$. Soit U un ouvert de X et P un système d'EDP linéaires holomorphes sur U à N_0 inconnues et N_1 équations. Autrement dit P est une matrice $N_0 \times N_1$ à coefficients dans $\mathcal{D}_X(U)$. On définit le $\mathcal{D}_U$-module $\mathcal{M} = \mathcal{D}_U^{N_0}/\mathcal{D}_U^{N_1} \cdot P$; on a donc la présentation finie

$$\mathcal{D}_U^{N_1} \xrightarrow{\cdot P} \mathcal{D}_U^{N_0} \to \mathcal{M} \to 0. \tag{1}$$

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau de fonctions sur lequel les opérateurs différentiels agissent, $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ ou $\mathcal{F} = \mathcal{C}_X^\infty$, le faisceau des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, etc., la donnée de N_0 fonctions inconnues dans $\mathcal{F}$ est la même chose que la donnée d'un morphisme $\mathcal{D}$-linéaire $\varphi\colon \mathcal{D}_U^{N_0} \to \mathcal{F}|_U$. Ces inconnues sont solutions de P si et seulement si φ se factorise par $\mathcal{M}$. Ainsi $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{M}, \mathcal{F}|_U)$ s'identifie aux solutions de P dans $\mathcal{F}$ au-dessus de U. Soient P' un autre système donné sur U et $\mathcal{M}'$ le $\mathcal{D}_U$-module correspondant, comme en (1). Si on a un isomorphisme de $\mathcal{D}_U$-modules $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}'$ on voit que P et P' ont des espaces de solutions isomorphes dans tout faisceau de fonctions $\mathcal{F}$ donné. Il est donc naturel de considérer des systèmes comme équivalents si les $\mathcal{D}$-modules associés sont isomorphes. Dans la suite nous ne considérons plus des systèmes mais seulement des $\mathcal{D}_X$-modules qui admettent une présentation du type (1) au voisinage de chaque point de X. De tels $\mathcal{D}$-modules sont dits *cohérents.*

Comme on vient de le voir l'ensemble des solutions holomorphes d'un $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ correspond au groupe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$. Il faut prendre garde que ce groupe ne vienne pas avec un plongement donné dans les fonctions holomorphes et qu'il n'ait pas d'autre structure que celle d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Pour en tirer une information de type monodromie, il faut considérer le faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{M}|_U, \mathcal{F}|_U)$. Dans ce cadre il est utile de pouvoir faire des dévissages sur $\mathcal{M}$ et on voit tout de suite apparaître les extensions. On définit donc plutôt les solutions en utilisant le faisceau $\mathcal{H}om$ interne dérivé :

$$\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M}) = \mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X). \tag{2}$$

Ainsi $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M})$ est un objet de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_X)$, la catégorie dérivée bornée des faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X. Le problème de Riemann-Hilbert devient alors (provisoirement) : quels sont les $F \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_X)$ qui sont du type $F = \mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M})$? Une question liée à celle-ci est de savoir si $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M})$ détermine $\mathcal{M}$? Avant de donner une formulation définitive du problème nous allons restreindre les classes de $\mathcal{D}$-modules et de faisceaux considérés.

Modules holonomes. — En dimension 1 le faisceau des solutions holomorphes d'un opérateur non nul a des germes de dimensions finies. En dimension plus grande ce n'est en général pas le cas mais il existe une classe de $\mathcal{D}$-modules qui ont cette propriété. Si un $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ correspond à un système avec beaucoup d'équations on peut s'attendre à ce qu'il ait peu de solutions. Ceci peut se voir sur la *variété caractéristique* $\mathrm{car}(\mathcal{M}) \subset T^*X$ (voir §1). C'est une sous-variété analytique complexe de T^*X. Un théorème de Kashiwara dit que, si $\mathcal{M} \neq 0$, alors $\mathrm{car}(\mathcal{M})$ est de dimension au moins $\dim X$. Un $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$ est dit *holonome* si $\mathcal{M} = 0$ ou $\mathrm{car}(\mathcal{M})$ est de dimension $\dim X$. Un autre résultat de Kashiwara dit que, si $\mathcal{M}$ est holonome, alors $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M})$ est un objet $\mathbb{C}$-constructible de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_X)$ dans le sens où il existe une stratification analytique complexe de X telle que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la restriction de $H^k(\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M}))$ à chaque strate est localement constante de rang fini. Plus précisément $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M})$ est un *faisceau pervers* à décalage près, en particulier $H^k(\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M}))$ a un support de dimension plus petite que $n - k$.

On peut déjà donner une réponse partielle au problème de Riemann-Hilbert. Notons $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$ la catégorie dérivée bornée des $\mathcal{D}_X$-modules et $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie des $\mathcal{M}$ tels que $H^i(\mathcal{M})$ est holonome pour tout $i \in \mathbb{Z}$. La définition (2) s'étend à $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$. Alors tout objet $\mathbb{C}$-constructible de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_X)$ est isomorphe à $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M})$ pour un certain $\mathcal{M} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)$. Cependant deux $\mathcal{D}_X$-modules holonomes peuvent avoir les mêmes solutions. Cette remarque vaut déjà en dimension 1 mais là on sait que les équations à singularités régulières sont déterminées par leur solutions.

Correspondance de Riemann-Hilbert – cas régulier. — Il y a une notion de $\mathcal{D}$-module holonome régulier en toute dimension étendant la notion d'opérateur à singularité régulière – voir la définition 3.2 ci-dessous. Notons $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hr}}(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$ des complexes de $\mathcal{D}_X$-modules à cohomologie holonome régulière. De même notons $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$ la sous-catégorie de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_X)$ des complexes à cohomologie $\mathbb{C}$-constructible. Alors la correspondance de Riemann-Hilbert dans le cas régulier s'énonce ainsi : le foncteur $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\cdot)$ induit une équivalence de catégories entre $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hr}}(\mathcal{D}_X)$ et $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$. Comme on l'a dit plus haut Kashiwara construit un foncteur inverse. Notons $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$ la catégorie des complexes à cohomologie constructible pour une stratification sous-analytique réelle. Kashiwara construit un foncteur contravariant « homomorphismes tempérés » $T\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{O}_X)\colon \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_X) \to \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$ et montre que sa restriction à $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$ arrive dans $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hr}}(\mathcal{D}_X)$ et fournit un inverse à la restriction de $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\cdot)$ à $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hr}}(\mathcal{D}_X)$.

De plus, par des résultats antérieurs de Kashiwara, on peut voir que cette correspondance identifie les faisceaux pervers, sous-catégorie abélienne de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$, aux $\mathcal{D}_X$-modules holonomes réguliers (vus comme complexes concentrés en degré 0).

Cas irrégulier. — Le résultat précédent nous dit donc que les systèmes holonomes réguliers sont déterminés par des données de type topologique (des faisceaux constructibles). Les travaux récents mentionnés auparavant permettent une description comparable des systèmes holonomes quelconques. L'exemple 2.5 nous dit qu'il ne suffit pas de regarder les solutions holomorphes. D'autre part il est connu que les solutions des systèmes réguliers ou irréguliers ont des propriétés de convergence ou de croissance différentes. Par exemple, très grossièrement, les solutions formelles d'un système régulier convergent. Une première idée, approfondie dans [KS96] et [KS01], est de considérer des solutions holomorphes avec conditions de croissance au bord. Le problème essentiel est qu'on veut faire cela en gardant les aspects faisceautiques. Ce problème est résolu dans [KS01], où Kashiwara et Schapira étudient la catégorie des *ind-faisceaux*, qui sont des ind-objets de la catégorie des faisceaux à support compact, et introduisent en particulier un ind-faisceau de « fonctions holomorphes tempérées ». Ils peuvent alors considérer le ind-faisceau $\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{t}}_X$ de solutions à valeurs dans ce ind-faisceau. Ceci permet de reformuler de façon élégante le foncteur homomorphismes tempérés déjà construit par Kashiwara. Nous rappelons ces résultats dans le paragraphe 4 en utilisant le langage des faisceaux sous-analytiques, qui suffit pour exposer les résultats. Ces faisceaux sous-analytiques sont aussi introduits dans [KS01] pour construire les ind-faisceaux de fonctions tempérées. Le foncteur solution tempéré $\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{t}}_X$ permet de distinguer plus de $\mathcal{D}$-modules holonomes que $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X$. Mais il manque encore une étape pour avoir la fidélité.

Il est possible de raffiner ces faisceaux de fonctions holomorphes tempérées en ajoutant une variable. Ceci est expliqué dans [DK16]. D'Agnolo et Kashiwara définissent une catégorie de ind-faisceaux *renforcés*, $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$, un ind-faisceau renforcé de fonctions holomorphes tempérées, $\mathcal{O}^{\mathrm{E}}_X$, et un foncteur solution correspondant, $\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{E}}_X$, qui va de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$ vers $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$. En utilisant des résultats de Mochizuki et Kedlaya sur la structure locale des connexions holomorphes intégrables ils montrent que ce dernier foncteur solution est pleinement fidèle. Plus précisément ils étendent la preuve de Kashiwara du cas régulier, reformulée dans le langage des ind-faisceaux, au cas général. L'analogue du foncteur homomorphismes tempérés devient $\mathcal{H}om^{\mathrm{E}}(\cdot, \mathcal{O}^{\mathrm{E}}_X)\colon \mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X) \to \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$. Ils montrent que si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module holonome, alors $\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om^{\mathrm{E}}(\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M}), \mathcal{O}^{\mathrm{E}}_X)$.

Il reste encore à décrire l'image de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)$ par $\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{E}}_X$ et en particulier l'image des complexes en degré 0. Dans [DK16] on trouve une notion d'objet constructible réel de

$\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$. Pour un $\mathcal{D}_X$-module holonome $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X^{\mathrm{E}}(\mathcal{M})$ est $\mathbb{R}$-constructible. Mais la sous-catégorie des $\mathbb{R}$-constructibles, $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$, est plus grande que l'image de $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X^{\mathrm{E}}$. Il n'y a pas de notion évidente d'objet $\mathbb{C}$-constructible. Néanmoins Mochizuki donne une caractérisation de l'image de $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X^{\mathrm{E}}$ dans [Mo16]. Il montre qu'un objet $F \in \mathsf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$ est de la forme $F \simeq \mathcal{S}\mathrm{ol}_X^{\mathrm{E}}(\mathcal{M})$ avec $\mathcal{M} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)$ si et seulement si c'est vrai pour $\mathrm{E}\varphi^{-1}(F)$, pour toute application holomorphe $\varphi\colon \Delta \to X$ du disque dans X (ici $\mathrm{E}\varphi^{-1}$ désigne l'image inverse pour les ind-faisceaux renforcés). On est ainsi ramené au cas de la dimension 1 où la situation est comprise ; on peut décrire les $\mathcal{D}_\Delta$-modules holonomes par les structures de Stokes et en déduire leurs solutions dans $\mathcal{O}^{\mathrm{E}}_\Delta$.

Pour comprendre l'image des $\mathcal{D}$-modules (les complexes en degré 0) D'Agnolo et Kashiwara introduisent dans [DK16b] une t-structure sur $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathrm{I}\mathbb{C}_X)$ qui généralise la t-structure de perversité sur les $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$ (Kashiwara donne dans [Ka16] une définition de t-structure très semblable à la définition usuelle, mais un peu plus générale, et équivalente à la notion de « slicing » introduite par Bridgeland dans [B07]). En combinant aux résultats de Mochizuki on obtient ainsi une catégorie analogue à celle des faisceaux pervers dans ce cadre.

1. QUELQUES RAPPELS SUR LES $\mathcal{D}$-MODULES

Si M est une variété analytique réelle, on note $\mathbb{C}_M$ le faisceau constant de groupe $\mathbb{C}$ et $\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_M)$ la catégorie des faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. On note $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_M)$ la catégorie dérivée bornée de $\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_M)$. Ses objets sont les complexes bornés d'objets de $\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_M)$ et les morphismes sont obtenus à partir des morphismes de complexes en inversant les quasi-isomorphismes, c'est-à-dire les morphismes qui induisent des isomorphismes en cohomologie. Pour un sous-ensemble localement fermé $Z \subset M$ on notera $\mathbb{C}_Z \in \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_M)$ le faisceau constant de groupe $\mathbb{C}$ sur Z. Ses germes vérifient $(\mathbb{C}_Z)_x \simeq \mathbb{C}$ si $x \in Z$ et $(\mathbb{C}_Z)_x = 0$ si $x \notin Z$.

Comme dans l'introduction on désigne par X une variété holomorphe. On note d_X sa dimension complexe et $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X. On note $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients holomorphes. Une section de $\mathcal{D}_X$ sur un ouvert de coordonnées s'écrit donc $P = \sum_{|\alpha|\leq d} a_\alpha(x)\partial_x^\alpha$, où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{d_X}) \in \mathbb{N}^{d_X}$, $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_{d_X}}^{\alpha_{d_X}}$ et les a_α sont des fonctions holomorphes. On note Θ_X le faisceau des champs de vecteurs holomorphes sur X. La multiplication par une fonction et l'action d'une section de Θ_X définissent des morphismes injectifs $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ et $\Theta_X \hookrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$. On peut aussi décrire $\mathcal{D}_X$ comme le sous-anneau de $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ engendré par $\mathcal{O}_X$ et Θ_X. On note $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$ la catégorie des faisceaux de modules à gauche sur $\mathcal{D}_X$. Dans ce texte le terme $\mathcal{D}_X$-module sans autre précision désigne un objet de $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$ (voir ci-dessous pour le lien entre modules à droite et à gauche). La catégorie $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$ est abélienne et on note $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$ sa catégorie dérivée bornée.

L'anneau $\mathcal{D}_X$ est filtré par le degré des opérateurs (le degré de ∂_x^α est la longueur totale $|\alpha|$). On note $\sigma_d\colon F_d\mathcal{D}_X \to \mathcal{O}_X[\xi]$ le symbole de degré d défini par $\sigma_d(\sum_{|\alpha|\leq d} a_\alpha(x)\partial_x^\alpha) = \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha(x)\xi^\alpha$. On peut voir que $\sigma_d(P)$ donne une fonction bien définie sur T^*X, le fibré cotangent de X. Plus exactement $\sigma_d(P)$ est une fonction holomorphe sur T^*X polynomiale homogène de degré d dans les fibres. Désignons par $\pi\colon T^*X \to X$ la projection. Les σ_d induisent un morphisme du gradué associé de $\mathcal{D}_X$ vers l'image directe de $\mathcal{O}_{T^*X}$

$$\sigma\colon \operatorname{gr}\mathcal{D}_X = \bigoplus_d F_d\mathcal{D}_X/F_{d-1}\mathcal{D}_X \to \pi_*\mathcal{O}_{T^*X}.$$

On voit que σ est injectif et que son image est les fonctions holomorphes sur T^*X polynomiales dans les fibres.

En utilisant ce morphisme σ on peut déduire certaines propriétés de $\mathcal{D}_X$ de celles de $\mathcal{O}_{T^*X}$. La première propriété importante est que $\mathcal{D}_X$ est cohérent. Cela signifie que la sous-catégorie de $\operatorname{Mod}(\mathcal{D}_X)$ faite des $\mathcal{D}_X$-modules localement de présentation finie est stable par sous-quotient et extension. Ces $\mathcal{D}_X$-modules sont aussi dits cohérents. On note $\operatorname{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules cohérents et $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$ à cohomologie cohérente.

On rappelle qu'un $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ est localement de présentation finie si chaque $x \in X$ a un voisinage U sur lequel on a une suite exacte $\mathcal{D}_U^{N_1} \xrightarrow{P} \mathcal{D}_U^{N_0} \to \mathcal{M}|_U \to 0$. Le morphisme $\mathcal{D}$-linéaire P est donné par une matrice $N_1 \times N_0$ à coefficients dans $\mathcal{D}_X(U)$ et on peut voir P comme un système d'EDP linéaires. Inversement un tel système donné sur un ouvert U définit un $\mathcal{D}_U$-module de présentation finie. Un $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$ est donc la donnée d'un système au voisinage de chaque point, mais a priori il n'y a pas un système défini globalement représentant $\mathcal{M}$. Comme on l'a vu dans l'introduction, si $\mathcal{M}$ est donné par un système P sur U, les solutions de P à valeur dans un faisceau de fonctions $\mathcal{F}$, ou plus généralement un autre $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{F}$, sont en bijection fonctorielle avec $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{M}|_U, \mathcal{F}|_U)$. On a aussi besoin des $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{M}|_U, \mathcal{F}|_U)$ et on pose d'emblée, pour $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ qui est le cas qui nous intéresse en premier,

$$\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M}) = \mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \qquad \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_X). \tag{3}$$

Exemple 1.1. — En coordonnées locales, on a $\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{D}_X/(\mathcal{D}_X\partial_{x_1} + \cdots + \mathcal{D}_X\partial_{x_{d_X}})$. On montre alors que $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{O}_X) \simeq \mathbb{C}_X$ (en dimension 1 on peut le voir directement ; en dimension quelconque on peut utiliser une résolution de type Koszul associée à $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{d_X}}$).

Le foncteur $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X$ est contravariant. Il est utile d'introduire un foncteur analogue mais covariant, le foncteur de de Rham. Soit Ω_X le faisceau des formes holomorphes de degré maximal. Les champs de vecteurs agissent sur Ω_X par la dérivée de Lie, notée $L_\theta(\omega)$ pour des sections θ de Θ_X et ω de Ω_X. L'action $\omega \cdot \theta = -L_\theta(\omega)$ et la structure de $\mathcal{O}_X$-module sur Ω_X s'étendent alors de façon unique en une action à droite de $\mathcal{D}_X$ sur Ω_X. Pour $\mathcal{M} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ on définit

$$\mathcal{DR}_X(\mathcal{M}) = \Omega_X \otimes^L_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M} \qquad \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_X). \tag{4}$$

En utilisant Ω_X on peut aussi obtenir une équivalence entre $\mathcal{D}_X$-modules à droite et à gauche. Pour un $\mathcal{D}_X$-module à droite $\mathcal{M}$ et un $\mathcal{D}_X$-module à gauche $\mathcal{N}$, $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$ a une structure de $\mathcal{O}_X$-module. Il a aussi une action à droite de l'algèbre de Lie Θ_X sur $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$ donnée par $(m \otimes n) \cdot \theta = (m \cdot \theta) \otimes n - m \otimes (\theta \cdot n)$. Les actions de $\mathcal{O}_X$ et Θ_X s'étendent en une action de $\mathcal{D}_X$ à droite. On peut voir de même que, si $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ sont deux $\mathcal{D}_X$-modules à droite, alors $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ a une structure de $\mathcal{D}_X$-module à gauche. Les deux foncteurs $\mathcal{M} \mapsto \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ et $\mathcal{N} \mapsto \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{N})$ donnent alors une équivalence entre les catégories de $\mathcal{D}_X$-modules à gauche et de $\mathcal{D}_X$-modules à droite.

Ceci est utile pour définir la dualité dans $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$. Si $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ alors $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X)$ est un $\mathcal{D}_X$-module à droite. Pour rester dans la catégorie des modules à gauche on pose, pour $\mathcal{M} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$,

$$\mathbb{D}_X(\mathcal{M}) = \mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X))[d_X]. \tag{5}$$

Ce décalage par d_X est justifié par un théorème disant que $\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X)$ est concentré en degré d_X si $\mathcal{M}$ est concentré en degré 0 et holonome. Alors $\mathbb{D}_X(\mathcal{M})$ est aussi concentré en degré 0 et holonome. On a par exemple $\mathbb{D}_X(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_X$. Pour $\mathcal{M} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ on a $\mathbb{D}_X(\mathbb{D}_X(\mathcal{M})) \simeq \mathcal{M}$. Les foncteurs solutions et de de Rham sont liés par la relation, pour tout $\mathcal{M} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$,

$$\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{DR}_X(\mathbb{D}_X(\mathcal{M}))[-d_X].$$

Avant de donner des énoncés généraux nous regardons des exemples simples pour lesquels $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M})$ suffit à distinguer différents $\mathcal{M}$.

Exemple 1.2. — Voici l'exemple de base d'un $\mathcal{D}$-module holonome régulier en dimension 1. On considère $X = \mathbb{C}$ avec la coordonnée x. On pose $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ on pose $P_\alpha = x\partial_x - \alpha$, $\mathcal{M}_\alpha = \mathcal{D}/\mathcal{D} \cdot P_\alpha$ et $F_\alpha = \mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M}_\alpha)$. Lorsqu'on a une résolution libre de $\mathcal{M}$ on peut représenter $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M})$ par le complexe obtenu en appliquant $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\cdot, \mathcal{O}_X)$ à la résolution. Ici on a donc

$$F_\alpha \simeq (0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{P_\alpha \cdot} \mathcal{O}_X \to 0).$$

Les solutions de P_α sont les multiples de $x \mapsto x^\alpha$. Pour $\alpha \in \mathbb{N}$ on a donc $H^0 F_\alpha \simeq \mathbb{C}_X$ le faisceau constant de groupe $\mathbb{C}$. Pour $\alpha \in \mathbb{Z}_{<0}$ on a $H^0 F_\alpha \simeq \mathbb{C}_U$ le faisceau constant sur U. Pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, les germes en 0 sont $(H^0 F_\alpha)_0 \simeq 0$ et $H^0 F_\alpha|_U$ est un faisceau localement constant de rang 1 sur U. Les faisceaux localement constants de germes un espace vectoriel fixé V sont donnés par les représentations du groupe fondamental dans V (leur *monodromie*). Ici, quand on parcourt un lacet simple autour de 0 et qu'on étend x^α par prolongement analytique, x^α est multiplié par $\exp(2i\pi\alpha)$. Autrement dit $H^0 F_\alpha$ est un faisceau localement constant de rang 1 sur U de monodromie $\exp(2i\pi\alpha)$.

On obtient donc $H^0 F_\alpha \simeq H^0 F_\beta$ si et seulement si (i) $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$ ou (ii) $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ ou (iii) $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{<0}$.

On peut voir que ceci suffit déjà à distinguer les $\mathcal{M}_\alpha$. En effet, en utilisant la relation $\partial_x x - x\partial_x = 1$, on peut définir $u_\alpha \colon \mathcal{M}_\alpha \to \mathcal{M}_{\alpha+1}$ par $[Q] \mapsto [Q\partial_x]$ et $v_\alpha \colon \mathcal{M}_{\alpha+1} \to \mathcal{M}_\alpha$

par $[Q] \mapsto [Q\,x]$, où on note $[P] \in \mathcal{M}_\beta$ l'image de $P \in \mathcal{D}_X$ dans $\mathcal{M}_\beta = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X \cdot P_\beta$. Alors $v_\alpha u_\alpha = (\alpha+1)\,\mathrm{id}_{\mathcal{M}_\alpha}$ et $u_\alpha v_\alpha = (\alpha+1)\,\mathrm{id}_{\mathcal{M}_{\alpha+1}}$. On en déduit que $H^0F_\alpha \simeq H^0F_\beta$ implique $\mathcal{M}_\alpha \simeq \mathcal{M}_\beta$ (la réciproque est évidente).

Exemple 1.3. — Voici d'autres exemples simples, toujours dans le cas $X = \mathbb{C}$.

Avec les notations de l'exemple 1.2 on voit que $H^0(\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M}_0)) \simeq H^0(\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{O}_X))$. Mais on peut aussi vérifier que $H^1(\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M}_\alpha)) \simeq \mathbb{C}_{\{0\}}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. Comme $H^1(\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{O}_X)) \simeq 0$ ceci montre que $\mathcal{M}_0 \not\simeq \mathcal{O}_X$.

Dans $X = \mathbb{C}$ on a aussi le $\mathcal{D}$-module de support $\{0\}$ noté $\mathcal{B}_{\{0\}|X} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X\,x$ (on peut voir que tout $\mathcal{D}_X$-module cohérent de support $\{0\}$ est du type $\mathcal{B}^N_{\{0\}|X}$). On trouve $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{B}_{\{0\}|X}) \simeq \mathbb{C}_{\{0\}}[-1]$, le faisceau gratte-ciel en 0 vu comme complexe concentré en degré de cohomologie 1. Si on pose $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{B}_{\{0\}|X}$, on a $H^0(\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M})) \simeq \mathbb{C}_X$ et $H^1(\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M})) \simeq \mathbb{C}_{\{0\}}$, comme pour $F_0 = \mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M}_0)$. Pourtant $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M}) \not\simeq F_0$ et a fortiori $\mathcal{M} \not\simeq \mathcal{M}_0$.

Pour voir que $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M}) \not\simeq F_0$ on utilise quelques prérequis sur les catégories dérivées. Rappelons le fait suivant (voir par exemple [KS06, Ex. 13.20, 13.21]). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et $A, B \in \mathcal{C}$. Les complexes $K \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{C})$ concentrés en degré 0 et 1 tels que $H^0K \simeq A$ et $H^1K \simeq B$ sont déterminés à isomorphisme près dans $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{C})$ (ou à quasi-isomorphisme près dans la catégorie des complexes) par une classe $c_K \in \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}}(B, A)/\mathrm{Aut}(A) \times \mathrm{Aut}(B)$ (grossièrement K représente c_K par une extension de Yoneda). Dans notre cas $\mathcal{C}$ est la catégorie des faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels et $\mathrm{Ext}^2(\mathbb{C}_{\{0\}}, \mathbb{C}_X) \simeq H^2_{\{0\}}(\mathbb{C}_X) \simeq \mathbb{C}$. Quand on quotiente par $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_{\{0\}})$ il ne reste que deux classes, la classe nulle qui correspond à $\mathbb{C}_X \oplus \mathbb{C}_{\{0\}}[-1]$, et une classe non triviale. Pour voir que $F_0 = (\mathcal{O}_X \xrightarrow{x\partial_x} \mathcal{O}_X)$ correspond à la classe non triviale il suffit de montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_X)}(\mathbb{C}_{\{0\}}[-1], F_0) \simeq 0$. Rappelons que $U = X \setminus \{0\}$. Comme $\mathrm{RHom}(\mathbb{C}_{\{0\}}, \mathcal{O}_X)$ est concentré en degré 1, avec $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{C}_{\{0\}}, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)/\mathcal{O}_X(X)$ (ce qu'on voit par une suite d'excision), on obtient

$$\mathrm{RHom}(\mathbb{C}_{\{0\}}[-1], F_0) \simeq \big(\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{x\partial_x} \mathcal{O}_X(U)/\mathcal{O}_X(X)\big) \simeq 0.$$

Ainsi le foncteur $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X$ fait encore la différence entre $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}$, mais cette fois il a fallu utiliser la classe d'isomorphisme des complexes dans $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_X)$, et pas seulement la cohomologie des complexes en question. (Bien sûr on peut voir directement que $\mathcal{M}_0 \not\simeq \mathcal{M}$, mais notre question est de savoir si un $\mathcal{D}$-module est déterminé par ses solutions.)

Dans cet exposé nous ne donnerons pas assez de détails pour avoir besoin des propriétés fonctorielles des $\mathcal{D}$-modules, mais elles sont absolument indispensables pour les démonstrations. Signalons simplement que, pour un morphisme $f\colon X \to Y$ entre variétés complexes, on a une notion d'image directe, notée $\mathcal{D}f_*$, et d'image inverse, notée $\mathcal{D}f^*$, entre $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$ et $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_Y)$. Nous donnerons les définitions au §6 quand nous les utiliserons. Nous renvoyons à [KS16] pour des énoncés sur la cohérence des images directes et inverses, la compatibilité avec la dualité ou avec les foncteurs $\mathcal{S}\mathrm{ol}$ et $\mathcal{DR}$, etc.

2. $\mathcal{D}$-MODULES HOLONOMES

Comme on l'a indiqué dans l'introduction on va s'intéresser à une classe de $\mathcal{D}$-modules correspondant à des systèmes avec « beaucoup d'équations ».

On définit tout d'abord la *variété caractéristique* d'un $\mathcal{D}_X$-module cohérent. Une *filtration* sur un $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ est la donnée d'une suite croissante de sous-$\mathcal{O}_X$-modules de $\mathcal{M}$, $F_0\mathcal{M} \subset F_1\mathcal{M} \subset \cdots \mathcal{M}$, telle que, pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on ait $(F_i\mathcal{D}_X) \cdot (F_j\mathcal{M}) \subset F_{i+j}\mathcal{M}$. La filtration est *bonne* si les $F_i\mathcal{M}$ sont $\mathcal{O}_X$-cohérents et, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x et $j_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$(F_i\mathcal{D}_U) \cdot (F_j\mathcal{M}|_U) = F_{i+j}\mathcal{M}|_U \qquad \text{pour tout } j \geq j_0 \text{ et pour tout } i \in \mathbb{N}.$$

Pour $\mathcal{M}$ cohérent on peut obtenir des bonnes filtrations sur $\mathcal{M}|_U$ sur tout ouvert U où $\mathcal{M}$ a une présentation libre finie $\mathcal{D}_U^{N_1} \xrightarrow{P} \mathcal{D}_U^{N_0} \to \mathcal{M}|_U \to 0$ en définissant $F_i\mathcal{M}|_U$ comme l'image de $(F_i\mathcal{D}_U)^{N_0}$. Si $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ est muni d'une filtration on pose $\mathrm{gr}\,\mathcal{M} = \bigoplus_i F_i\mathcal{D}_X/F_{i-1}\mathcal{D}_X$; c'est un $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X$-module. Si la filtration est bonne, alors $\mathrm{gr}\,\mathcal{M}$ est un $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X$-module cohérent. On a vu que $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X$ est un sous-anneau de $\pi_*(\mathcal{O}_{T^*X})$. On pose $\widetilde{\mathrm{gr}}\mathcal{M} = \mathcal{O}_{T^*X} \otimes_{\pi^{-1}\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X} \pi^{-1}\,\mathrm{gr}\,\mathcal{M}$. Alors $\widetilde{\mathrm{gr}}\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{T^*X}$-module cohérent. On peut montrer que son support est indépendant de la bonne filtration choisie. En particulier des choix de bonnes filtrations sur des ouverts U_i, $i \in I$, recouvrant X vont donner des sous-ensembles de T^*U_i qui coïncident sur $T^*(U_i \cap U_j)$ et définissent un sous-ensemble de T^*X, la variété caractéristique de $\mathcal{M}$, notée $\mathrm{car}\,\mathcal{M}$. C'est un ensemble analytique fermé stable par l'action de $\mathbb{C}^\times$ dans les fibres.

Par exemple, pour un idéal à gauche cohérent I de $\mathcal{D}_X$, on obtient

$$\mathrm{gr}(\mathcal{D}_X/I) = \{(x;\xi) \in T^*X;\ \sigma(P)(x;\xi) = 0 \text{ pour tout } P \in I\}. \tag{6}$$

Si $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ est une suite exacte de $\mathcal{D}_X$-modules cohérents on a

$$\mathrm{car}(\mathcal{M}) = \mathrm{car}(\mathcal{M}') \cup \mathrm{car}(\mathcal{M}''). \tag{7}$$

D'après [Ka70, Thm. 2.5.3] on sait que $\mathrm{car}\,\mathcal{M}$ est de dimension au moins d_X (la dimension de X) si $\mathcal{M} \neq 0$. En fait un théorème plus précis de [SKK73] dit que $\mathrm{car}(\mathcal{M})$ est coisotrope pour la structure symplectique canonique ω_X de T^*X : si p est un point lisse de $\mathrm{car}(\mathcal{M})$ et $v, w \in T_p(\mathrm{car}(\mathcal{M}))$, alors $\omega_{X,p}(v,w) = 0$ (voir aussi [Ga81] pour un énoncé très général).

Définition 2.1. — *Un $\mathcal{D}_X$-module cohérent est dit* holonome *si $\mathcal{M} = 0$ ou $\mathrm{car}\,\mathcal{M}$ est de dimension minimale c'est-à-dire la dimension de X. On note $\mathrm{Mod}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie de $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ faite des modules holonomes et $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$ des objets à cohomologie holonome.*

Exemple 2.2. — Le cas le plus simple de module holonome est celui où $\mathrm{car}\,\mathcal{M} = T^*_XX$, la section nulle de T^*X. On peut alors montrer que $\mathcal{M}$ est cohérent en tant que $\mathcal{O}_X$-module et même qu'il est localement libre sur $\mathcal{O}_X$. Autrement dit $\mathcal{M}$ est donné par un fibré vectoriel sur X. L'action de $\Theta_X \subset \mathcal{D}_X$ sur $\mathcal{M}$ définit une connexion holomorphe

$\nabla\colon \mathcal{M} \to \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$, où Ω^1_X désigne le faisceau des 1-formes holomorphes. Le fait que l'action de Θ_X s'étende à $\mathcal{D}_X$ est équivalent à l'annulation de la courbure (holomorphe) de ∇. Inversement tout fibré holomorphe sur X muni d'une connexion holomorphe plate définit un $\mathcal{D}_X$-module holonome de variété caractéristique $T^*_X X$.

Exemple 2.3. — Soit $Y \subset X$ une hypersurface complexe. On note $\mathcal{O}_X(\star Y)$ le faisceau des fonctions méromorphes sur X avec pôles sur Y. L'action naturelle de $\mathcal{D}_X$ sur $\mathcal{O}_X(\star Y)$ en fait un $\mathcal{D}_X$-module holonome.

Soit φ une section globale de $\mathcal{O}_X(\star Y)$. Le morphisme $\mathbb{C}$-linéaire $\nabla_\varphi\colon \mathcal{O}_X(\star Y) \to \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(\star Y)$, $\nabla_\varphi(u) = du + ud\varphi$, est une connexion plate (il vérifie l'identité de Leibniz et la courbure est nulle). L'action de Θ_X sur $\mathcal{O}_X(\star Y)$ définie par ∇_φ s'étend alors en une structure de $\mathcal{D}_X$-module. On note ce $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{E}^\varphi_{U|X}$, où $U = X \setminus Y$. C'est un $\mathcal{D}_X$-module holonome. On en donnera une autre définition au §4.

D'après (7) on remarque que $\mathrm{Mod}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)$ est abélienne et stable par sous-quotient et extension. Comme on le voit sur (6) pour $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/I$, plus l'idéal I contient d'équations, plus $\operatorname{car} \mathcal{M}$ est petit. On peut s'attendre à ce que les modules holonomes aient donc peu de solutions. C'est ce que dit le résultat suivant de Kashiwara. On rappelle qu'on note $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$ la sous-catégorie de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_X)$ des F tels que H^iF soit $\mathbb{C}$-constructible, pour chaque $i \in \mathbb{Z}$, ce qui signifie qu'il existe une stratification de X par des sous-ensembles analytiques complexes tels que la restriction de H^iF à chaque strate soit un faisceau localement constant de rang fini.

Théorème 2.4 (Thm 3.1 et §4 de [Ka75]). — *Soit $\mathcal{M} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)$. Alors $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M}) \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$. De plus, si $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)$, alors $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M})$ est un faisceau pervers (à décalage près par n), c'est-à-dire, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $\dim \operatorname{supp} H^i(\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M})) \le n - i$, et $\dim \operatorname{supp} H^i(\mathrm{D}'_X \,\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{M})) \le n - i$, où on note $\mathrm{D}'_X(F) = \mathrm{R}\mathcal{H}om(F, \mathbb{C}_X)$ pour $F \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_X)$.*

La correspondance de Riemann-Hilbert nous dit que tout objet de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$ est solution d'un objet de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)$. Mais, si on n'ajoute pas de condition (régularité), cet objet n'est pas unique. Voici un exemple d'une famille d'opérateurs avec les mêmes solutions.

Exemple 2.5. — En dimension 1, pour $X = \mathbb{C}$, considérons l'exemple le plus simple d'opérateur à singularité irrégulière $Q_\alpha = x^2\partial_x + \alpha$ et posons $\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{D}_\mathbb{C}/\mathcal{D}_\mathbb{C} Q_\alpha$. Le complexe $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{N}_\alpha)$ est donc le complexe à deux termes $0 \to \mathcal{O}_\mathbb{C} \xrightarrow{Q_\alpha \cdot} \mathcal{O}_\mathbb{C} \to 0$. On trouve $H^0(\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{N}_\alpha)) \simeq \mathbb{C}_U$ où $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{C}_U$ désigne le faisceau constant sur U (en effet $H^0(\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{N}_\alpha))$ correspond à la solution $\exp(\alpha/x)$ de Q_α). Pour $\alpha \neq 0$ on voit aussi que $H^1(\mathcal{S}\mathrm{ol}_X(\mathcal{N}_\alpha)) \simeq \mathbb{C}_{\{0\}}$, le faisceau gratte-ciel en 0. (On peut par ailleurs voir que $\mathcal{N}_\alpha \simeq \mathcal{E}^{\alpha/x}_{U|X}$ si $\alpha \neq 0$.)

Comme dans l'exemple 1.3 on peut montrer qu'il n'y a que deux objets $F \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_\mathbb{C})$, à isomorphisme près, tels que $H^0F \simeq \mathbb{C}_U$ et $H^1F \simeq \mathbb{C}_{\{0\}}$. Or les $\mathcal{N}_\alpha$ sont deux à deux non isomorphes et ne sont donc pas distingués par leurs faisceaux de solutions. Pour voir qu'ils sont distincts nous introduisons $\mathcal{O}_0^\alpha$ l'ensemble des germes de fonctions f définies et holomorphes sur $V\setminus\{0\}$, pour un voisinage V de 0, telles que $f(x)\exp(-\alpha/x)$ soit méromorphe. Alors $\mathcal{O}_0^\alpha$ est un $(\mathcal{D}_\mathbb{C})_0$-module. Les germes de solutions $\mathrm{Hom}_{(\mathcal{D}_\mathbb{C})_0}((\mathcal{N}_\alpha)_0, \mathcal{O}_0^\beta)$ sont nuls si $\alpha \neq \beta$ et valent $\mathbb{C}$ si $\alpha = \beta$. Ceci montre que les $\mathcal{N}_\alpha$ sont deux à deux non isomorphes. (En fait on peut aussi voir que $\mathcal{O}_0^\alpha \simeq (\mathcal{N}_\alpha)_0$ si $\alpha \neq 0$.)

3. CORRESPONDANCE DE RIEMANN-HILBERT – CAS RÉGULIER

Soit $P = \sum_{k\leq d} a_k(x)\partial_x^k \in (\mathcal{D}_\mathbb{C})_0$ un opérateur défini sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$. Notons par ν_k l'ordre d'annulation de a_k en 0, c'est-à-dire le plus grand entier tel que $a_k(x)/x^{\nu_k}$ soit holomorphe. On dit que P a une *singularité régulière* ou qu'il est *fuchsien* en 0 si $\nu_j - j \geq \nu_d - d$ pour $j = 0, \dots, d$. La régularité peut aussi se voir sur la croissance des solutions. La définition suivante nous servira sur des variétés quelconques.

DÉFINITION 3.1. — *Soient M une variété analytique réelle et $U \subset M$ un ouvert. Soit $f \in \mathcal{C}_M^\infty(U)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur U. Soit $p \in \partial U$. On dit que f est à* croissance polynomiale *en p s'il existe un voisinage V de p dans M et $N, C \geq 0$ tels que*

$$|f(x)| \leq C\, d(x, \partial U)^{-N},$$

où $d(x,\partial U)$ désigne la distance de x au bord de U pour une métrique induite par une carte quelconque autour de p. On dit que f est tempérée *en p si toutes ses dérivées sont à croissance polynomiale en p. On dit que f est tempérée si elle l'est en tout point de ∂U.*

Un résultat classique de la théorie des équations différentielles dans $\mathbb{C}$ dit que P est à singularité régulière en 0 si et seulement si ses solutions holomorphes dans tous les secteurs $U_{r_0}^{\theta_0,\varepsilon} = \{r\exp(i\theta)\,;\, r < r_0,\ |\theta - \theta_0| < \varepsilon\}$ sont tempérées en 0.

La notion d'opérateur à singularité régulière se généralise comme suit.

DÉFINITION 3.2. — *Soient X une variété complexe et $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}_\mathrm{h}(\mathcal{D}_X)$. Soit $I_{\mathrm{car}\,\mathcal{M}} \subset \mathcal{O}_{T^*X}$ l'idéal de définition de* $\mathrm{car}\,\mathcal{M}$. *On dit que $\mathcal{M}$ est* régulier *si, pour tout $x \in X$ il existe un voisinage U de x et une bonne filtration $F_\bullet\mathcal{M}|_U$ tels que $I_{\mathrm{car}\,\mathcal{M}} \cdot \widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{M} = 0$ (on rappelle que $\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{M} = \mathcal{O}_{T^*X} \otimes_{\pi^{-1}\mathrm{gr}\,\mathcal{D}_X} \pi^{-1}\mathrm{gr}\,\mathcal{M}$). On note $\mathrm{Mod}_\mathrm{hr}(\mathcal{D}_X)$ la catégorie des modules holonomes réguliers et $\mathsf{D}^\mathrm{b}_\mathrm{hr}(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie de $\mathsf{D}^\mathrm{b}(\mathcal{D}_X)$ à cohomologie holonome régulière.*

Contrairement à $\mathrm{car}\,\mathcal{M}$ qu'on peut définir à partir d'une bonne filtration quelconque de $\mathcal{M}$, la condition $I_{\mathrm{car}\,\mathcal{M}} \cdot \widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{M} = 0$ dépend du choix de la bonne filtration. Par exemple $\mathcal{M} = \mathcal{D}_\mathbb{C}/\mathcal{D}_\mathbb{C} \cdot \partial_x^2$ est isomorphe à $\mathcal{O}_\mathbb{C}^2$ via $[1] \mapsto (1,x)$. On en déduit deux filtrations naturelles sur $\mathcal{M}$. Celle induite par quotient de $\mathcal{D}_\mathbb{C}$ est $F_0^1\mathcal{M} = 0$, $F_1^1\mathcal{M} = [F_1\mathcal{D}_\mathbb{C}] \simeq \mathcal{O}_\mathbb{C}$ et $F_2^1\mathcal{M} = \mathcal{M}$. Elle donne $\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_{T^*\mathbb{C}}/\langle\xi^2\rangle$ dont l'annulateur n'est pas réduit. Celle induite par $\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_\mathbb{C}^2$ donne $F_0^2\mathcal{M} = 0$, $F_1^2\mathcal{M} = \mathcal{M}$ puis $\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{M} \simeq (\mathcal{O}_{T^*\mathbb{C}}/\langle\xi\rangle)^2$ qui vérifie bien la condition de régularité.

La catégorie $\mathrm{Mod}_{\mathrm{hr}}(\mathcal{D}_X)$ est abélienne et stable par sous-quotient et extension (voir [KK81, Prop. 1.1.17]).

On peut aussi montrer qu'un opérateur $P \in (\mathcal{D}_{\mathbb{C}})_0$ a une singularité régulière en 0 si et seulement si le $\mathcal{D}$-module associé $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}}/\mathcal{D}_{\mathbb{C}} \cdot P$ est régulier sur un voisinage de 0. En effet, en posant $\theta = x\partial_x$, on voit que P a une singularité régulière si et seulement si P s'écrit $P = a(x)x^k Q$ ou $P = a(x)\partial_x^l Q$ avec $a(x)$ holomorphe inversible et $Q = \theta^m + \sum_{i=0}^{m-1} b_i(x)\theta^i$. On peut aussi reformuler le fait qu'un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$-module holonome $\mathcal{N}$ soit régulier près de 0 en disant que $\mathcal{N}$ a un sous-$\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{N}_0$ stable par θ et qui engendre $\mathcal{N}$ comme $\mathcal{D}$-module. En effet si $\mathcal{N}$ a une filtration $F_\bullet\mathcal{N}$ vérifiant la condition de la définition 3.2, alors θ annule le gradué associé et envoie donc $F_i\mathcal{N}$ dans lui-même, pour tout $i \in \mathbb{N}$. On peut alors prendre $\mathcal{N}_0 = F_{i_0}\mathcal{N}$ pour i_0 tel que $F_{i_0}\mathcal{N}$ contient des générateurs de $\mathcal{N}$. Pour Q comme ci-dessus la filtration $F_k(\mathcal{D}_{\mathbb{C}}/\mathcal{D}_{\mathbb{C}} \cdot Q) = \sum_{i=0}^{m-1} F_k\mathcal{D}_{\mathbb{C}} \cdot [\theta^i]$ vérifie la condition de régularité. Inversement, si $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}}/\mathcal{D}_{\mathbb{C}} \cdot P$ a un sous-$\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{N}_0$ stable par θ et contenant [1], alors on peut trouver un polynôme $Q(\theta)$ annulant [1]. Dans ce cas P divise $Q(\theta)$ et on en déduit que P est régulier, par exemple par le critère de croissance des solutions.

On peut maintenant énoncer la correspondance de Riemann-Hilbert dans le cas régulier. Notons $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ la catégorie opposée d'une catégorie $\mathcal{C}$.

Théorème 3.3. — *Soit X une variété analytique complexe. Les foncteurs solutions $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X\colon \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hr}}(\mathcal{D}_X)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$ et de de Rham $\mathcal{DR}_X\colon \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hr}}(\mathcal{D}_X) \to \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$ sont des équivalences de catégories.*

La preuve est donnée dans [Ka84]. Un plan détaillé est exposé dans [Ka80]. Une approche différente est donnée dans [Me84]. La démonstration de Kashiwara donne en fait un inverse au foncteur $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X$. En oubliant la condition de cohérence un inverse naturel est $F \mapsto \mathrm{R}\mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X)[n]$. Par exemple, pour $X = \mathbb{C}$ et $F = \mathbb{C}_{\{0\}}$ on a $\mathrm{R}\mathcal{H}om(\mathbb{C}_{\{0\}}, \mathcal{O}_X) \simeq B_0[-1]$ où $B_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\setminus\{0\})/\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ est l'espace des hyperfonctions de support $\{0\}$. Dans ce cas on peut facilement trouver un sous-$\mathcal{D}$-module cohérent de B_0 qui est l'espace $(\mathcal{D}b_{\mathbb{C}})_0$ des distributions de support $\{0\}$, engendré par $\delta_0 = [1/x]$. On a $(\mathcal{D}b_{\mathbb{C}})_0 \simeq \mathcal{B}_{\{0\}|\mathbb{C}} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}}/\mathcal{D}_{\mathbb{C}} \cdot x$; c'est un module holonome régulier et $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X((\mathcal{D}b_{\mathbb{C}})_0) \simeq \mathbb{C}_{\{0\}}[-1]$.

Le point de départ de la preuve de Kashiwara est la définition suivante. Pour une variété analytique réelle M et $F \in \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_M)$ il définit le sous-faisceau $T\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_M)$ de $\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_M)$, où $\mathcal{D}b_M$ est le faisceau des distributions, de la façon suivante. Ses sections sur un ouvert U sont les morphismes $\varphi\colon F|_U \to \mathcal{D}b_M|_U$ tels que, pour tout ouvert sous-analytique relativement compact V de U on ait : pour tout $s \in F(V)$, $\varphi(s)$ est une distribution *tempérée*, c'est-à-dire qu'elle s'étend à M.

Il étend ensuite ce foncteur $T\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_M)$ aux complexes $F \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_M)$. Pour cela il montre que $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_M)$ est équivalente à $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Mod}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_M))$ et que $T\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{D}b_M)$ est exact. Ceci est assez long et utilise de façon essentielle plusieurs résultats sur les ensembles sous-analytiques.

Il peut alors définir le foncteur inverse de $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X$, noté $T\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{O}_X)$, en considérant le complexe de Dolbeault à coefficients dans $T\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{D}b_M)$. Pour voir que c'est un inverse à $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X$ il faut se ramener à des résultats de Deligne dans le cas des connexions méromorphes. Ceci utilise des dévissages et des images inverse et directe par des morphismes de résolutions des singularités. En particulier il faut auparavant étudier la fonctorialité de $T\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{D}b_M)$ et $T\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{O}_X)$. Il faut aussi utiliser des résultats de [KK81] sur le comportement des $\mathcal{D}$-modules holonomes réguliers par les mêmes opérations.

4. FAISCEAUX SOUS-ANALYTIQUES ET SOLUTIONS TEMPÉRÉES

Comme on l'a vu au paragraphe précédent le point de départ de la construction de l'inverse de $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X$ par Kashiwara est l'idée de considérer des conditions de croissance (distributions tempérées) sur les sections de $\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_M)$. Les conditions de croissance s'expriment sur le bord des ouverts où sont définies les sections et ne permettent pas de former un faisceau (si U est réunion croissante d'ouverts U_i avec $\overline{U_i} \subset U$, n'importe quelle distribution f donnée sur U vérifie « $f|_{U_i}$ est tempérée »). Dans [KS01] Kashiwara et Schapira introduisent les faisceaux sous-analytiques pour traiter avec la théorie des faisceaux ce genre de condition au bord. Par exemple ils définissent dans ce cadre un faisceau de distributions tempérées $\mathcal{D}b^{\mathrm{t}}_M$ qui vérifie $T\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_M) \simeq \rho^{-1}\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b^{\mathrm{t}}_M)$, où ρ^{-1} est le foncteur naturel des faisceaux sous-analytiques vers les faisceaux usuels. Ils définissent aussi un complexe $\mathcal{O}^{\mathrm{t}}_X$ de fonctions holomorphes tempérées qui permet de retrouver $T\mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_X)$.

Ceci permet de mieux comprendre la preuve de Kashiwara, mais surtout d'introduire un foncteur solutions tempérées $\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\cdot, \mathcal{O}^{\mathrm{t}}_X)$ qui contient plus d'information que $\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\cdot, \mathcal{O}_X)$ et permet de distinguer plus de $\mathcal{D}$-modules holonomes. Ce n'est pas encore assez pour obtenir la correspondance de Riemann-Hilbert générale mais c'est néanmoins une étape fondamentale.

Dans [KS01] les auteurs travaillent plutôt avec la catégorie des ind-faisceaux mais utilisent les faisceaux sous-analytiques pour construire des ind-faisceaux de fonctions avec conditions de croissance. Ils montrent que les faisceaux sous-analytiques se plongent dans les ind-faisceaux. Les faisceaux sous-analytiques sont suffisants pour exposer les résultats qui nous intéressent ici et nous ne discuterons pas des ind-faisceaux.

Les faisceaux sous-analytiques sur une variété analytique réelle M se définissent comme les faisceaux usuels mais en restreignant les ouverts aux ouverts sous-analytiques et en ne considérant que des recouvrements qui admettent un sous-recouvrement localement fini (le lecteur qui connaît les topologies de Grothendieck voit que ceci définit un site M_{sa}, le *site sous-analytique* associé à M, et que les faisceaux sous-analytiques sont les faisceaux sur M_{sa}). Voici une définition plus formelle (pour des faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, mais on pourrait prendre des coefficients arbitraires).

Définition 4.1. — *Notons* $\mathrm{Op}(M_{\mathrm{sa}})$ *l'ensemble des ouverts sous-analytiques de* M. *Un faisceau (de* $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels) sous-analytique* F *sur* M *est la donnée, pour chaque* $U \in \mathrm{Op}(M_{\mathrm{sa}})$*, d'un espace vectoriel* $F(U)$ *et, pour chaque inclusion* $V \subset U$ *dans* $\mathrm{Op}(M_{\mathrm{sa}})$*, d'un morphisme* $F(U) \to F(V)$*,* $s \mapsto s|_V$*. Ces données vérifient* $(s|_V)|_W = s|_W$ *pour* $W \subset V \subset U$ *et, pour tout recouvrement* localement fini $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ *dans* $\mathrm{Op}(M_{\mathrm{sa}})$*, pour toute famille* $s_i \in F(U_i)$ *vérifiant* $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$*, il existe un unique* $s \in F(U)$ *tel que* $s|_{U_i} = s_i$*. Ici « localement fini » signifie qu'un compact quelconque de* M *ne rencontre qu'un nombre fini de* U_i*. On note* $\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ *la catégorie des faisceaux sous-analytiques.*

La catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ est abélienne et on note $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ sa catégorie dérivée bornée. On a un couple de foncteurs adjoints $\rho_*\colon \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_M) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ et $\rho^{-1}\colon \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}}) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_M)$ (autrement dit un morphisme de sites $\rho\colon M \to M_{\mathrm{sa}}$). Ici $\rho_*(F)$ est défini de façon évidente en se restreignant aux ouverts de $\mathrm{Op}(M_{\mathrm{sa}})$. Son adjoint à gauche $\rho^{-1}(G)$ est le faisceau associé au préfaisceau $V \mapsto \varinjlim_{V\subset U\in \mathrm{Op}(M_{\mathrm{sa}})} F(U)$. On a $\rho^{-1}\circ\rho_* \simeq \mathrm{id}$ et le foncteur ρ_* est pleinement fidèle.

Un résultat de [KS01] dit que ρ^{-1} a aussi un adjoint à gauche $\rho_!\colon \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_M) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$. Le faisceau $\rho_!(F)$ est le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \varinjlim_{\overline{U}\subset V} F(V)$. Par exemple pour un point $x_0 \in M$ on a $\rho_!(\mathbb{C}_{\{x_0\}})(U) = \mathbb{C}^{\pi_0(U,x_0)}$ où $\pi_0(U,x_0) = \varinjlim_{x_0\in V} \pi_0(U\cap V)$. En particulier $\rho_!(\mathbb{C}_{\{x_0\}})(U) = \mathbb{C}$ si U est un ouvert à bord lisse et $x_0 \in \partial U$. On voit que ce faisceau n'est pas dans l'image de ρ_*. Le foncteur $\rho_!\colon \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_M) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ est exact et pleinement fidèle.

Dans [KS01] on trouve une construction des six opérations de Grothendieck pour les faisceaux sous-analytiques (l'image directe propre est un peu différente du cas usuel) et un analogue des formules usuelles (formule de projection, changement de base, etc.) ainsi que les liens avec ce nouveau foncteur $\rho_!$.

Voici deux exemples importants motivant l'introduction de $\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$. Soit $U \in \mathrm{Op}(M_{\mathrm{sa}})$. On note $\mathcal{C}^{\infty,\mathrm{t}}_M(U)$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty_M(U)$ qui sont tempérées en tout point de ∂U (voir la définition 3.1). On note aussi $\mathcal{D}b^{\mathrm{t}}_M(U)$ l'ensemble des distributions tempérées de $\mathcal{D}b_M(U)$ c'est-à-dire l'image de la restriction $\mathcal{D}b_M(M) \to \mathcal{D}b_M(U)$. Alors, d'après [KS01], les préfaisceaux $U \mapsto \mathcal{C}^{\infty,\mathrm{t}}_M(U)$ et $U \mapsto \mathcal{D}b^{\mathrm{t}}_M(U)$ définissent des faisceaux dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$, notés $\mathcal{C}^{\infty,\mathrm{t}}_M$ et $\mathcal{D}b^{\mathrm{t}}_M$.

Si X est une variété analytique complexe on peut alors définir $\mathcal{O}^{\mathrm{t}}_X \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{X_{\mathrm{sa}}})$ comme le complexe de Dolbeault à coefficients dans $\mathcal{D}b^{\mathrm{t}}_X$. On a donc

$$\mathcal{O}^{\mathrm{t}}_X = \big(0 \to \mathcal{D}b^{\mathrm{t}}_X \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{D}b^{\mathrm{t}(0,1)}_X \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{D}b^{\mathrm{t}(0,d_X)}_X \to 0\big), \tag{8}$$

où $\mathcal{D}b^{\mathrm{t}}_X$ est en degré 0. D'après [KS01] on peut aussi définir $\mathcal{O}^{\mathrm{t}}_X$ comme le complexe de Dolbeault à coefficients dans $\mathcal{C}^{\infty,\mathrm{t}}_X$. Un point notable est que $\mathcal{O}^{\mathrm{t}}_X$ n'est pas concentré en degré 0 si $\dim X > 1$ (sinon on pourrait résoudre $\overline{\partial}$ sur un ouvert U quitte à passer à un recouvrement fini, ce qui pourtant ne change pas beaucoup les problèmes au bord – pour les détails voir [KS01, Rem. 7.3.4]).

On rappelle qu'on dispose d'un foncteur exact $\rho_!\colon \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_{X_{\mathrm{sa}}})$ et on pose

$$\mathcal{D}_{X_{\mathrm{sa}}} = \rho_!(\mathcal{D}_X).$$

Alors $\mathcal{D}_{X_{\mathrm{sa}}}$ est un faisceau d'anneaux dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_{X_{\mathrm{sa}}})$ et on peut considérer la catégorie des $\mathcal{D}_{X_{\mathrm{sa}}}$-modules, notée $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_{X_{\mathrm{sa}}})$, et sa catégorie dérivée $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{X_{\mathrm{sa}}})$. Pour deux ouverts U, V tels que $\overline{U} \subset V$ les opérateurs de $\mathcal{D}_X(V)$ agissent sur $\mathcal{C}^{\infty,\mathrm{t}}_X(U)$ et $\mathcal{D}b^{\mathrm{t}}_X(U)$ (les conditions au bord sont respectées). Comme $\mathcal{D}_{X_{\mathrm{sa}}}$ est le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \varinjlim_{\overline{U}\subset V} \mathcal{D}_X(V)$, on en déduit que $\mathcal{C}^{\infty,\mathrm{t}}_X$ et $\mathcal{D}b^{\mathrm{t}}_X$ sont bien définis dans $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_{X_{\mathrm{sa}}})$, puis que $\mathcal{O}^{\mathrm{t}}_X$ détermine en fait un objet de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{X_{\mathrm{sa}}})$.

Définition 4.2. — *Pour $\mathcal{M} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ on pose*

$$\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{t}}_X(\mathcal{M}) = \mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_{\mathrm{sa}}}}(\rho_!(\mathcal{M}), \mathcal{O}^{\mathrm{t}}_X) \quad \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{X_{\mathrm{sa}}}).$$

Exemple 4.3. — Reprenons l'exemple 2.5 avec $X = \mathbb{C}$ et $\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{D}_{\mathbb{C}}/\mathcal{D}_{\mathbb{C}}Q_\alpha$, où $Q_\alpha = x^2\partial_x + \alpha$, $\alpha \neq 0$. Cet exemple est détaillé dans [KS16, §4.5] et [KS03]. En dimension 1 le complexe $\mathcal{O}^{\mathrm{t}}_X$ est concentré en degré 0 et, pour $V \in \mathrm{Op}(X_{\mathrm{sa}})$, $\mathcal{O}^{\mathrm{t}}_X(V)$ est l'espace des fonctions holomorphes sur V tempérées en tout point de ∂V. Ainsi $\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{t}}_X(\mathcal{N}_\alpha)$ est représenté par le complexe à deux termes $0 \to \mathcal{O}^{\mathrm{t}}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{Q_\alpha\cdot} \mathcal{O}^{\mathrm{t}}_{\mathbb{C}} \to 0$. Supposons V connexe. Alors $(H^0(\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{t}}_X(\mathcal{N}_\alpha)))(V) \neq 0$ si et seulement si $\exp(\alpha/x)$ est définie et tempérée sur V et dans ce cas $(H^0(\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{t}}_X(\mathcal{N}_\alpha)))(V) \simeq \mathbb{C}$. Ceci équivaut à $0 \notin V$ et $\mathrm{Re}(\alpha/x)$ est borné sur V. Nous obtenons donc, pour $\alpha \in \mathbb{C}$ donné et pour $V \in \mathrm{Op}(\mathbb{C}_{\mathrm{sa}})$ connexe : $(H^0(\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{t}}_X(\mathcal{N}_\alpha)))(V) \simeq \mathbb{C}$ s'il existe $c > 0$ tel que $V \subset \{\mathrm{Re}(\alpha/x) < c\}$ et $(H^0(\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{t}}_X(\mathcal{N}_\alpha)))(V) \simeq 0$ sinon.

On voit que $\{\mathrm{Re}(\alpha/x) < c\}$ est le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de la boule fermée de centre $\alpha/2c$ et de rayon $|\alpha|/2c$. On en déduit déjà que $\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{t}}_X(\mathcal{N}_\alpha) \not\simeq \mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{t}}_X(\mathcal{N}_{\alpha'})$ si α et α' ont des arguments distincts. Mais $\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{t}}_X$ ne suffit pas encore à distinguer tous les $\mathcal{N}_\alpha$; en fait $\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{t}}_X(\mathcal{N}_{r\alpha}) \simeq \mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{t}}_X(\mathcal{N}_\alpha)$ pour tout $r > 0$ (voir [KS16] et proposition 4.5 ci-dessous).

Nous allons préciser et généraliser l'exemple 4.3. Nous explicitons d'abord un peu les faisceaux sous-analytiques. Pour une variété analytique réelle M le foncteur $\rho_*\colon \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_M) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ n'est pas exact mais sa restriction à $\mathrm{Mod}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_M)$ l'est (voir [KS01]). Pour $F \in \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_M)$ on notera souvent $F \in \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ au lieu de $\rho_*(F)$.

Pour une famille filtrante I et un système inductif $\{F_i, f_{ji}\}_{i\in I}$ de faisceaux (dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_M)$) il existe des limites inductives $\varinjlim_{i\in I} F_i$ dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_M)$ et $\varinjlim_{i\in I} \rho_* F_i$ dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$. Mais ρ_* ne commute pas aux limites inductives et on a même le résultat suivant.

Théorème 4.4 (Thm. 6.3.5 de [KS01])). — *Tout objet $F \in \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ peut s'écrire $F \simeq \varinjlim_{i\in I} \rho_* F_i$ pour un système inductif filtrant de faisceaux usuels constructibles $F_i \in \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_M)$.*

Ainsi le faisceau $\rho_!(\mathbb{C}_{\{x_0\}})$, pour $x_0 \in M$, introduit auparavant, peut s'écrire $\rho_!(\mathbb{C}_{\{x_0\}}) \simeq \varinjlim_B \rho_* \mathbb{C}_B$, où B décrit l'ensemble des voisinages fermés de x_0. On peut aussi reprendre plus en détail l'exemple 4.3 et montrer que

$$H^0(\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{t}}_X(\mathcal{N}_\alpha)) \simeq \varinjlim_{c \to +\infty} \rho_*(\mathbb{C}_{\{\mathrm{Re}(\alpha/x)<c\}}).$$

$\mathcal{D}$-modules exponentiels

Ces $\mathcal{D}$-modules servent de modèles locaux aux modules holonomes (voir le théorème 6.3 ci-dessous). Ils généralisent l'exemple 4.3. Soit X une variété analytique complexe et $Y \subset X$ une hypersurface complexe. On note $\mathcal{O}_X(\star Y)$ le faisceau des fonctions méromorphes sur X avec pôles sur Y.

On a vu au §1 que, si $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{D}$-module à droite et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-module à gauche, alors $\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}$-module à droite. On peut montrer de même que, pour $\mathcal{M}$, $\mathcal{N} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$, le produit $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$ est naturellement un objet de $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$. On pose

$$\mathcal{M}(\star Y) = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(\star Y).$$

Soit $U = X \setminus Y$. Pour une section globale φ de $\mathcal{O}_X(\star Y)$ on note I_φ l'idéal annulateur de $\exp(\varphi)$ dans $\mathcal{D}_X$, $I_\varphi(V) = \{P \in \mathcal{D}_X(V)\,;\, (P|_{V\cap U})(\exp(\varphi)) = 0\}$. On définit enfin

$$\mathcal{D}_X e^\varphi = \mathcal{D}_X / I_\varphi, \qquad \mathcal{E}^\varphi_{U|X} = (\mathcal{D}_X e^\varphi)(\star Y). \tag{9}$$

Alors $\mathcal{D}_X e^\varphi$ et $\mathcal{E}^\varphi_{U|X}$ sont des $\mathcal{D}_X$-modules holonomes. En fait, en tant que $\mathcal{O}_X$-module, $\mathcal{E}^\varphi_{U|X}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X(\star Y)$ et on peut montrer qu'il est isomorphe en tant que $\mathcal{D}_X$-module au module $\mathcal{E}^\varphi_{U|X}$ de l'exemple 2.3.

À partir de la fonction φ on définit aussi les faisceaux sous-analytiques suivants :

$$\mathbb{C}_{\{\mathrm{Re}\,\varphi<\star\}} = \varinjlim_{c\to+\infty} \rho_* \mathbb{C}_{\{\mathrm{Re}\,\varphi<c\}} \qquad \in \mathrm{Mod}(\mathbb{C}_{X_{\mathrm{sa}}}), \tag{10}$$

$$E^\varphi_{U|X} = \mathrm{R}\mathcal{H}om(\rho_*\mathbb{C}_U, \mathbb{C}_{\{\mathrm{Re}\,\varphi<\star\}}) \quad \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{X_{\mathrm{sa}}}). \tag{11}$$

Proposition 4.5 (Prop. 6.2.2 de [DK16])). — *Il existe des isomorphismes dans* $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{X_{\mathrm{sa}}})$

$$\mathcal{DR}^{\mathrm{t}}_X(\mathcal{E}^\varphi_{U|X})[-d_X] \simeq \mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{t}}_X(\mathbb{D}_X(\mathcal{E}^\varphi_{U|X})) \simeq E^{-\varphi}_{U|X}.$$

5. FAISCEAUX RENFORCÉS

Comme on l'a remarqué dans l'exemple 4.3 le foncteur $\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{t}}_X$ ne distingue pas tous les $\mathcal{D}$-modules holonomes. Plus précisément il est clair sur la définition (11) que $E^\varphi_{U|X} \simeq E^{r\varphi}_{U|X}$ pour $r > 0$ alors que $\mathcal{E}^\varphi_{U|X} \not\simeq \mathcal{E}^{r\varphi}_{U|X}$ en général. On introduit ici la notion de *faisceaux renforcés stables* de [DK16] (définition 5.3 ci-dessous) puis les fonctions holomorphes renforcées, obtenues à partir de $\mathcal{O}^{\mathrm{t}}_X$ en ajoutant une variable et en imposant une croissance exponentielle à l'infini. On pourra ensuite définir un foncteur solution dont la restriction à $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)$ est pleinement fidèle.

Soient X, Y deux variétés analytiques complexes et $\mathcal{M} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$, $\mathcal{N} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_Y)$. On définit $\mathcal{M} \boxtimes^{\mathrm{D}} \mathcal{N} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{X\times Y})$ par

$$\mathcal{M} \boxtimes^{\mathrm{D}} \mathcal{N} = \mathcal{D}_{X\times Y} \otimes_{q_X^{-1}\mathcal{D}_X \otimes q_Y^{-1}\mathcal{D}_Y} (q_X^{-1}\mathcal{M} \otimes q_Y^{-1}\mathcal{N}),$$

où q_X, q_Y sont les projections de $X \times Y$ vers X, Y.

Dans la suite nous allons ajouter une variable auxiliaire et considérer le produit des variétés qui nous intéressent avec $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{P} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Notons τ la coordonnée sur $\mathbb{C}$. C'est aussi une fonction méromorphe sur $\mathbb{P} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ et nous pouvons appliquer la construction (9) qui nous donne le $\mathcal{D}_{\mathbb{P}}$-module $\mathcal{E}^{\tau}_{\mathbb{C}|\mathbb{P}}$. Avec les notations de (9) on a alors

$$\mathcal{E}^{\varphi}_{U|X} \boxtimes^{\mathrm{D}} \mathcal{E}^{-\tau}_{\mathbb{C}|\mathbb{P}} \simeq \mathcal{E}^{\varphi-\tau}_{U\times\mathbb{C}|X\times\mathbb{P}}. \tag{12}$$

Pour $\varphi(x) = \alpha/x$ comme dans l'exemple 4.3 les faisceaux $\mathbb{C}_{\{\mathrm{Re}(\alpha/x-\tau)<\star\}}$ de (10) sont distincts pour des α distincts. Il est donc intéressant de considérer le foncteur $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)^{\mathrm{op}} \to \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{(X\times\mathbb{P})_{\mathrm{sa}}})$, $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{S}\mathrm{ol}^t_{X\times\mathbb{P}}(\mathcal{M} \boxtimes^{\mathrm{D}} \mathcal{E}^{-\tau}_{\mathbb{C}|\mathbb{P}})$. On verra en effet qu'il suffit à distinguer les modules holonomes. Mais le résultat est plus précis. Les objets de la catégorie $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{(X\times\mathbb{P})_{\mathrm{sa}}})$ semblent difficiles à décrire (ce sont des limites de constructibles) et on va voir qu'on peut définir une sous-catégorie raisonnable de faisceaux *stables constructibles* qui ont une description locale en termes de faisceaux constructibles usuels. La correspondance de Riemann-Hilbert dit alors que $\mathcal{S}\mathrm{ol}^t_{X\times\mathbb{P}}$ envoie les holonomes dans les stables constructibles et qu'il induit une équivalence entre la catégorie des holonomes et son image. L'inverse de $\mathcal{S}\mathrm{ol}^t_{X\times\mathbb{P}}$ est un foncteur semblable à $T\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{O}_X)$. On verra aussi qu'on peut caractériser les stables constructibles qui sont dans l'image.

5.1. Définition des faisceaux renforcés

On veut travailler avec des faisceaux du type $E^{\varphi-\tau}_{U\times\mathbb{C}|X\times\mathbb{P}}$. Dans ce paragraphe on va définir une catégorie qui contient ces faisceaux et plus généralement qui sert d'arrivée au foncteur solutions, mais dont les objets ont aussi de bonnes propriétés de finitude. Les faisceaux $E^{\varphi-\tau}_{U\times\mathbb{C}|X\times\mathbb{P}}$ sont déterminés par leur restriction à $X \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. On peut aussi négliger les faisceaux de support $X \times \{\infty\}$. Ceci motive la définition suivante de [DK16].

Définition 5.1. — *Soient M une variété analytique réelle et $i\colon M \to M \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, $x \mapsto (x, \infty)$. Alors l'image directe par i, $\mathrm{R}i_*$, donne une équivalence entre $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ et son image. On pose*

$$\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}\times\mathbb{R}_\infty}) = \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{(M\times\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))_{\mathrm{sa}}})/\mathrm{R}i_*(\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})).$$

Notons qu'avec des faisceaux usuels le quotient $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M\times\mathbb{P}^1(\mathbb{R})})/\mathrm{R}i_*(\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_M))$ est équivalent à $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M\times\mathbb{R}})$. Mais il existe des faisceaux sous-analytiques de support $M \times \{\infty\}$ qui ne sont pas dans l'image de $\mathrm{R}i_*$; un exemple typique est $\rho_!(\mathbb{C}_{M\times\{\infty\}})$.

Remarque 5.2. — D'Agnolo et Kashiwara introduisent cette définition dans le cadre des ind-faisceaux. Il n'y a alors pas besoin que M soit analytique. Si M est analytique, les catégories des ind-faisceaux et des faisceaux sous-analytiques ne sont pas équivalentes, mais comme nous l'avons déjà dit le cadre des faisceaux sous-analytiques suffit pour exposer les résultats et cette remarque s'applique encore aux définitions suivantes.

On va maintenant définir des objets *stables* dans $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}\times\mathbb{R}_\infty})$, ce qui veut dire ici très grossièrement stable par translation dans la direction $\mathbb{R}$. Pour cela on utilise une construction de Tamarkin dans un contexte très différent. Dans [Ta08] Tamarkin considère des faisceaux sur $M\times\mathbb{R}$ dont le microsupport est contenu dans $T^*M\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^-)$, où on note $\mathbb{R}^-=\,]-\infty,0]$ et on identifie $T^*\mathbb{R}$ avec $\mathbb{R}^2$, la première coordonnée étant la base, la deuxième la fibre. (Pour le microsupport des faisceaux nous renvoyons à [KS90].) Tamarkin s'intéresse au quotient de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M\times\mathbb{R}})$ par la sous-catégorie de faisceaux vérifiant cette condition de microsupport et utilise le fait qu'il y a des projecteurs dans $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M\times\mathbb{R}})$ sur la sous-catégorie orthogonale. Plus précisément, notons $p_1,p_2,s\colon M\times\mathbb{R}^2\to M\times\mathbb{R}$ les applications $p_1(x,t_1,t_2)=(x,t_1)$, $s(x,t_1,t_2)=(x,t_1+t_2)$ et $p_2(x,t_1,t_2)=(x,t_2)$. Pour $F,G\in\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M\times\mathbb{R}})$ on définit la convolution

$$F\overset{+}{\otimes}G=\mathrm{R}s_!(p_1^{-1}(F)\otimes p_2^{-1}(G))\quad\in\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M\times\mathbb{R}}).\tag{13}$$

Alors $F\mapsto\mathbb{C}_{M\times\mathbb{R}^+}\overset{+}{\otimes}F$, où on note $\mathbb{R}^+=[0,+\infty[$, est le projecteur mentionné ci-dessus. On a un morphisme naturel $\mathbb{C}_{M\times\mathbb{R}^+}\overset{+}{\otimes}F\to\mathbb{C}_{\{0\}}\overset{+}{\otimes}F\simeq F$ et les objets dans l'image du projecteur sont caractérisés par $\mathbb{C}_{M\times\mathbb{R}^+}\overset{+}{\otimes}F\xrightarrow{\sim}F$. Pour F dans l'image on a de plus, pour tout $a\in\mathbb{R}$,

$$\mathbb{C}_{M\times[a,+\infty[}\overset{+}{\otimes}F\xrightarrow{\sim}T_{a*}(F)\qquad\text{où } T_a(x,t)=(x,t+a)\text{ est la translation.}\tag{14}$$

Dans [DK16] les opérations usuelles pour les faisceaux sont adaptées aux catégories $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}\times\mathbb{R}_\infty})$ et la construction de Tamarkin garde un sens. Dans $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}\times\mathbb{R}_\infty})$ on peut faire tendre a vers l'infini dans la formule (14). Les objets $E^{\varphi-\tau}_{U\times\mathbb{C}|X\times\mathbb{P}}$ sont essentiellement de ce type, aux faisceaux constants selon la direction $\mathbb{R}$ près. En effet on a le triangle distingué $\mathbb{C}_{]-\infty,a[}\to\mathbb{C}_{\mathbb{R}}\to\mathbb{C}_{[a,+\infty[}\to\mathbb{C}_{]-\infty,a[}[1]$ et si on quotiente par les faisceaux constants on identifie $\mathbb{C}_{[a,+\infty[}$ et $\mathbb{C}_{]-\infty,a[}[1]$. Notons $\pi\colon M\times\mathbb{P}^1(\mathbb{R})\to M$ la projection. Alors les faisceaux constants sur les fibres de π sont les faisceaux du type $\pi^{-1}(F)$. Là encore on peut définir les opérations de Grothendieck après quotient par ces faisceaux. On formalise ces remarques par la définition suivante.

Définition 5.3. — *On définit la catégorie des faisceaux* renforcés *sur M par $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})=\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}\times\mathbb{R}_\infty})/\pi^{-1}(\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}}))$ où $\pi\colon M\times\mathbb{P}^1(\mathbb{R})\to M$ est la projection. On pose*

$$\mathbb{C}^{\mathrm{E}}_M=\varinjlim_{a\to+\infty}\rho_*(\mathbb{C}_{M\times[a,+\infty[})\qquad\in\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}}),$$

où $[a,+\infty[$ est vu comme sous-ensemble de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Un objet $K\in\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ est dit stable *s'il existe un isomorphisme $K\simeq\mathbb{C}^{\mathrm{E}}_M\overset{+}{\otimes}K$.*

On a un foncteur pleinement fidèle

$$\varepsilon_M\colon\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})\to\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}}),\quad F\mapsto\mathbb{C}_{M\times[0,+\infty[}\otimes\pi^{-1}(F).\tag{15}$$

Notons que $K \in \mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ est stable dès que $K \simeq \mathbb{C}_M^{\mathrm{E}} \overset{+}{\otimes} L$ pour un certain $L \in \mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$. Les faisceaux $E^{\varphi-\tau}_{U\times\mathbb{C}|X\times\mathbb{P}}$ définissent des objets stables de $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{X_{\mathrm{sa}}})$, après restriction à $X \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ et passage au quotient.

DÉFINITION 5.4. — *Un objet $K \in \mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ est dit* $\mathbb{R}$-constructible *si, pour tout ouvert relativement compact $U \in \mathrm{Op}(M_{\mathrm{sa}})$, il existe $F \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_{U\times\mathbb{R}})$ tel que $\mathrm{R}j_!(F) \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_{U\times\mathbb{P}^1(\mathbb{R})})$ où $j\colon U \times \mathbb{R} \to U \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est l'inclusion, et*

$$K|_{U\times\mathbb{P}^1(\mathbb{R})} \simeq \mathbb{C}_U^{\mathrm{E}} \overset{+}{\otimes} \rho_*(\mathrm{R}j_!(F)) \qquad \textit{dans } \mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_U).$$

On note $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ la sous-catégorie pleine de $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ formée par les objets $\mathbb{R}$-constructibles.

En particulier les objets $\mathbb{R}$-constructibles sont stables. Dans [DK16] il est montré que $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ est une sous-catégorie triangulée de $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$, stable par image inverse, image inverse extraordinaire, image directe propre, produit tensoriel et $\mathcal{H}om$ interne. On a aussi une notion de dualité $K \mapsto \mathrm{D}_M^{\mathrm{E}}(K)$ dans $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$. La sous-catégorie $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ est stable par dualité et on a

$$K \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_M^{\mathrm{E}}\,\mathrm{D}_M^{\mathrm{E}}(K) \qquad \text{pour tout } K \in \mathsf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}}).$$

Les objets des catégories $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ ou $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ sont donnés en général par des limites de faisceaux usuels et a priori difficiles à appréhender. Comme on le voit dans la définition 5.4 les objets de $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ sont localement déterminés par des faisceaux $\mathbb{R}$-constructibles usuels sur $M \times \mathbb{R}$. En voici une description un peu plus précise (voir Prop. 4.9.9 de *loc. cit.*) : un objet K de $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ est $\mathbb{R}$-constructible si et seulement si il existe

- une famille localement finie $\{Z_i\}_{i\in I}$ de sous-ensembles localement fermés sous-analytiques de M,
- des ensembles finis A_i, pour chaque $i \in I$,
- des fonctions continues sous-analytiques $\varphi_{i,a}\colon Z_i \to \mathbb{R}$ et $\psi_{i,a}\colon Z_i \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, pour $i \in I$, $a \in A_i$, telles que $\varphi_{i,a}(x) < \psi_{i,a}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}_i$,
- des entiers $m_{i,a} \in \mathbb{Z}$ pour $i \in I$, $a \in A_i$,

tels que $M = \bigsqcup_{i\in I} Z_i$ et, pour chaque $i \in I$,

$$\pi^{-1}\mathbb{C}_{Z_i} \otimes K \simeq \bigoplus_{a\in A_i} \mathbb{C}_M^{\mathrm{E}} \overset{+}{\otimes} \rho_*(\mathrm{R}j_!(\mathbb{C}_{W_{i,a}}))[m_{i,a}],$$

où $W_{i,a} = \{(x,t) \in Z_i \times \mathbb{R}\,;\, \varphi_{i,a}(x) \leq t < \psi_{i,a}(x)\}$.

5.2. Solutions renforcées

On peut maintenant traduire le foncteur $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{S}\mathrm{ol}^t_{X\times\mathbb{P}}(\mathcal{M} \boxtimes^{\mathrm{D}} \mathcal{E}^{-\tau}_{\mathbb{C}|\mathbb{P}})$ introduit après la formule (12) dans la catégorie $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{X_{\mathrm{sa}}})$. Comme pour $\mathcal{O}_X^{\mathrm{t}}$ on définit d'abord le faisceau renforcé de distributions tempérées, $\mathcal{D}b_M^{\mathrm{T}} \in \mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ pour une variété analytique réelle M, puis $\mathcal{O}_X^{\mathrm{E}}$ comme le complexe de Dolbeault à coefficients dans $\mathcal{D}b_X^{\mathrm{T}}$:

$$\mathcal{D}b_M^{\mathrm{T}} = \big(0 \to \mathcal{D}b^{\mathrm{t}}_{M\times\mathbb{P}^1(\mathbb{R})} \xrightarrow{\partial_t - 1} \mathcal{D}b^{\mathrm{t}}_{M\times\mathbb{P}^1(\mathbb{R})} \to 0\big) \qquad \in \mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}}),$$
$$\mathcal{O}_X^{\mathrm{E}} = \big(0 \to \mathcal{D}b_X^{\mathrm{T}} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{D}b_X^{\mathrm{T}(0,1)} \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{D}b_X^{\mathrm{T}(0,d_X)} \to 0\big) \qquad \in \mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{X_{\mathrm{sa}}}),$$

où les termes non nuls du complexe $\mathcal{D}b_M^{\mathrm{T}}$ sont dans les degrés -1 et 0. En fait on peut voir que $\mathcal{D}b_M^{\mathrm{T}}$ est concentré en degré -1. Si on se restreint à $M\times\mathbb{R}$, les solutions de $\partial_t - 1$ sont les distributions de la forme $f(x)\exp(t)$. En particulier $\mathcal{D}b_M^{\mathrm{T}}|_{M\times\mathbb{R}} \simeq \pi^{-1}(\mathcal{D}b_M^{\mathrm{t}})[1]$ où π est la projection $M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De plus $\mathcal{D}b_M^{\mathrm{T}}$ et $\mathcal{O}_X^{\mathrm{E}}$ sont des objets stables de $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ et $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{X_{\mathrm{sa}}})$.

En partant du faisceau d'anneaux $\pi^{-1}(\mathcal{D}_{X_{\mathrm{sa}}})$ sur $X \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ on peut aussi définir une catégorie $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{X_{\mathrm{sa}}})$ de $\mathcal{D}$-modules renforcés. Le foncteur ε_M défini dans (15) a un analogue $\varepsilon_X\colon \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{X_{\mathrm{sa}}}) \to \mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{X_{\mathrm{sa}}})$.

Enfin le produit $\overset{+}{\otimes}$ de $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ a un adjoint à droite, noté $\mathcal{H}om^{+}(\cdot,\cdot)$. On a de même un foncteur $\mathcal{H}om^{+}_{\mathcal{D}_{X_{\mathrm{sa}}}}(\cdot,\cdot)$. On définit le foncteur solution dans ce cadre :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\mathrm{ol}_X^{\mathrm{E}}\colon \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)^{\mathrm{op}} &\to \mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{X_{\mathrm{sa}}}) \\ \mathcal{M} &\mapsto \mathcal{H}om^{+}_{\mathcal{D}_{X_{\mathrm{sa}}}}(\varepsilon_X \rho_!(\mathcal{M}), \mathcal{O}_X^{\mathrm{E}}) \end{aligned} \tag{16}$$

et on peut aussi définir un foncteur de de Rham renforcé $\mathcal{DR}_X^{\mathrm{E}}$. On trouve par exemple $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X^{\mathrm{E}}(\mathbb{D}_X(\mathcal{E}^{\varphi}_{U|X})) \simeq \mathbb{C}_X^{\mathrm{E}} \overset{+}{\otimes} \mathrm{R}\mathcal{H}om(\rho_*\mathbb{C}_{U\times\mathbb{R}}, \rho_*\mathbb{C}_{\{t=\operatorname{Re}\varphi\}})[d_X]$, où $U\times\mathbb{R}$ et $\{t = \operatorname{Re}\varphi\}$ sont vus comme sous-ensembles de $X \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ par l'inclusion $\mathbb{R} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, en utilisant la proposition 4.5 et les formules (10), (11) et (12). Voici une formule semblable mais plus concise (Cor 9.4.12 de [DK16])

$$\mathcal{S}\mathrm{ol}_X^{\mathrm{E}}(\mathcal{E}^{\varphi}_{U|X}) \simeq \mathbb{C}_X^{\mathrm{E}} \overset{+}{\otimes} \rho_*\mathbb{C}_{\{t=-\operatorname{Re}\varphi\}}. \tag{17}$$

6. LA CORRESPONDANCE DE RIEMANN-HILBERT

On introduit maintenant l'analogue du foncteur $T\mathcal{H}om(\cdot,\mathcal{O}_X)$ dans le cadre des faisceaux renforcés. Notons $\pi\colon M \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to M$ la projection. Le foncteur $F \mapsto \mathrm{R}\pi_*\mathrm{R}\mathcal{H}om(\mathbb{C}_{M\times\mathbb{R}}, F)$ de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{(M\times\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))_{\mathrm{sa}}})$ vers $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ annule les objets de $\mathrm{R}i_*(\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}}))$ où i est l'inclusion $i(x) = (x,\infty)$. Il induit donc un foncteur $\mathrm{R}\pi_*\colon \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}\times\mathbb{R}_\infty}) \to \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$. Le quotient $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}\times\mathbb{R}_\infty}) \to \mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$ possède des adjoints à droite et à gauche, disons R^{E} et L^{E}. Pour $K_1, K_2 \in \mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}})$, on définit maintenant $\mathcal{H}om^{\mathrm{E}}(K_1,K_2) \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_M)$ par

$$\mathcal{H}om^{\mathrm{E}}(K_1,K_2) = \rho^{-1}\mathrm{R}\pi_*\mathrm{R}\mathcal{H}om(L^{\mathrm{E}}(K_1), R^{\mathrm{E}}(K_2)),$$

où ρ^{-1} est le foncteur naturel $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{M_{\mathrm{sa}}}) \to \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_M)$. Là encore on peut considérer des foncteurs analogues pour les $\mathcal{D}$-modules. Si X est une variété analytique complexe, on obtient en particulier un foncteur

$$\mathcal{H}om^{\mathrm{E}}(\cdot,\mathcal{O}_X^{\mathrm{E}})\colon \mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{X_{\mathrm{sa}}}) \to \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X), \qquad K \mapsto \mathcal{H}om^{\mathrm{E}}(K,\mathcal{O}_X^{\mathrm{E}}).$$

Il existe un morphisme fonctoriel en $\mathcal{M} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$

$$\mathcal{M} \to \mathcal{H}om^{\mathrm{E}}(\mathcal{S}\mathrm{ol}_X^{\mathrm{E}}(\mathcal{M}), \mathcal{O}_X^{\mathrm{E}}). \tag{18}$$

Théorème 6.1 (Thm 9.3.2, 9.5.3 et 9.6.1 de [DK16]). — *Soit X une variété analytique complexe.*
(i) Pour tout $\mathcal{M} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)$ on a $\mathcal{DR}_X^{\mathrm{E}}(\mathcal{M})$, $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X^{\mathrm{E}}(\mathcal{M}) \in \mathsf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-}\mathrm{c}}(\mathbb{C}_{X_{\mathrm{sa}}})$.
(ii) Pour tout $\mathcal{M} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)$ le morphisme (18) *est un isomorphisme.*
(iii) Le foncteur $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X^{\mathrm{E}} \colon (\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X))^{\mathrm{op}} \to \mathsf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-}\mathrm{c}}(\mathbb{C}_{X_{\mathrm{sa}}})$ est pleinement fidèle.

Voici quelques indications sur la preuve de ce résultat. Un point sur lequel nous n'avons pas beaucoup insisté mais qui est essentiel est que toutes les catégories de faisceaux introduites jusqu'ici viennent avec les opérations de Grothendieck : pour un morphisme $f \colon X \to Y$ on a des opérations analogues aux images directes $\mathrm{R}f_*$, $\mathrm{R}f_!$ et leurs adjoints f^{-1}, $f^!$ ainsi qu'un produit tensoriel et $\mathcal{H}om$ interne.

Comme nous en avons besoin pour les énoncés suivants, nous rappelons l'image inverse et directe des $\mathcal{D}$-modules. Pour un morphisme $f \colon X \to Y$ de variétés complexes on note $\mathcal{D}_{X\to Y} = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y$ le *module de transfert*. Il a une structure évidente de $f^{-1}\mathcal{D}_Y$-module à droite et une structure de $\mathcal{D}_X$-module à gauche induite par l'action des champs de vecteurs $\theta \cdot (f \otimes P) = \theta(f) \otimes P + \sum_i f_i f \otimes \theta_i P$, où $\theta \in \Theta_X$ est un champ sur X et $\sum_i f_i \theta_i \in \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\Theta_Y$ son image par df. L'image inverse de $\mathcal{N} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_Y)$ est alors

$$\mathcal{D}f^*(\mathcal{N}) = \mathcal{D}_{X\to Y} \otimes^L_{f^{-1}\mathcal{D}_Y} f^{-1}\mathcal{N} \qquad \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X).$$

Notons que le $\mathcal{O}_X$-module sous-jacent à $\mathcal{D}f^*(\mathcal{N})$ est l'image inverse de $\mathcal{N}$ au sens des $\mathcal{O}$-modules. L'image directe de $\mathcal{M} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$ est

$$\mathcal{D}f_*(\mathcal{M}) = \mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\Omega_Y, \mathrm{R}f_*((\Omega_X \otimes^L_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}) \otimes^L_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\to Y})) \qquad \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_Y),$$

où on a utilisé les formes de degré maximal pour échanger les structures de $\mathcal{D}$-modules à droite et à gauche.

En utilisant ces outils fonctoriels on peut, grâce à des résultats fondamentaux de Mochizuki [Mo09, Mo11] et Kedlaya [Ke10, Ke11] sur la structure locale des connexions méromorphes intégrables, ramener le problème au cas où $\mathcal{M}$ a une *forme normale* (voir ci-dessous). Plus précisément on trouve dans [DK16] le principe suivant (en fait implicitement utilisé dans [Ka84] dans le cas régulier) : un énoncé $P_X(\mathcal{M})$ relatif à une variété complexe X et un objet $\mathcal{M} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)$ est vrai pour tous $X, \mathcal{M}$ si :

$$
(19) \qquad \begin{cases}
\text{(i) la vérité de } P_X(\mathcal{M}) \text{ peut se tester localement sur } X,\\
\text{(ii) } P_X(0) \text{ est vrai,}\\
\text{(iii) } P_X(\mathcal{M}') \text{ et } P_X(\mathcal{M}'') \text{ impliquent } P_X(\mathcal{M}) \text{ s'il existe un triangle dis-}\\
\quad \text{tingué } \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \xrightarrow{+1},\\
\text{(iv) } P_X(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}') \text{ implique } P_X(\mathcal{M}) \text{ et } P_X(\mathcal{M}'),\\
\text{(v) si } f\colon X \to Y \text{ est un morphisme projectif, } P_X(\mathcal{M}) \text{ est vrai et } \mathcal{M} \in\\
\quad \mathrm{Mod}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X) \text{ est « good », alors } P_Y(\mathcal{D}f_*(\mathcal{M})) \text{ est vrai,}\\
\text{(vi) si } \mathcal{M} \in \mathrm{Mod}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X) \text{ a une forme normale le long d'un diviseur à}\\
\quad \text{croisements normaux, alors } P_X(\mathcal{M}) \text{ est vrai.}
\end{cases}
$$

Ici « good » signifie que $\mathcal{M}$ peut être muni d'une bonne filtration au-dessus de tout ouvert relativement compact.

Pour définir ce qu'est une forme normale nous introduisons quelques notations. Soit X une variété analytique complexe et $D \subset X$ un diviseur à croisements normaux. On définit l'éclaté réel de X le long de D comme une variété analytique réelle à bord munie d'un morphisme $\varpi\colon \widetilde{X} \to X$ qui est un isomorphisme au-dessus de $X \setminus D$ et qui a la description suivante en coordonnées locales près d'un point de D : si $D = \{z_1 \cdots z_k = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ alors $\widetilde{X} = (\mathbb{R}^+ \times S^1)^k \times \mathbb{C}^{n-k}$, où S^1 est le cercle unité de $\mathbb{C}$, et $\varpi((r_1, w_1), \dots, (r_k, w_k), z_{k+1}, \dots, z_n) = (r_1 w_1, \dots, r_k w_k, z_{k+1}, \dots, z_n)$.

On pose $\widetilde{X}^{>0} = \varpi^{-1}(X \setminus D)$ et on note $j\colon \widetilde{X}^{>0} \to \widetilde{X}$ l'inclusion. On définit un faisceau de fonctions $\mathcal{A}_{\widetilde{X}}$ sur $\widetilde{X}$ comme le sous-faisceau de $j_* j^{-1} \varpi^{-1} \mathcal{O}_X$ formé des fonctions tempérées près de chaque point de $\varpi^{-1}(D)$. Notons que les points où on considère la condition de croissance ne dépendent pas de l'ouvert où sont définies les fonctions et $\mathcal{A}_{\widetilde{X}}$ est un faisceau usuel. On peut aussi définir les opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathcal{A}_{\widetilde{X}}$:

$$\mathcal{D}^{\mathcal{A}}_{\widetilde{X}} = \mathcal{A}_{\widetilde{X}} \otimes_{\varpi^{-1}\mathcal{O}_X} \varpi^{-1}\mathcal{D}_X$$

et, pour $\mathcal{M} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$, on pose $\mathcal{M}^{\mathcal{A}} = \mathcal{D}^{\mathcal{A}}_{\widetilde{X}} \otimes_{\varpi^{-1}\mathcal{D}_X} \varpi^{-1}\mathcal{M} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}^{\mathcal{A}}_{\widetilde{X}})$.

Pour un $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$ on note $\mathrm{SingSupp}(\mathcal{M})$ la projection sur X de $\mathrm{car}(\mathcal{M})$ privée de la section nulle.

Définition 6.2. — *Soient X une variété analytique complexe et $D \subset X$ un diviseur à croisements normaux. On dit que $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)$ a une forme normale le long de D si $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}(\star D)$, $\mathrm{SingSupp}(\mathcal{M}) \subset D$ et, pour tout $x \in \varpi^{-1}(D)$, il existe un voisinage U de $\varpi(x)$ dans X, un voisinage V de x dans $\varpi^{-1}(U)$, une famille finie de fonctions méromorphes $\varphi_i \in (\mathcal{O}_X(\star D))(U)$, $i \in I$, et des entiers positifs $n_i \in \mathbb{N}$, $i \in I$, tels que*

$$(\mathcal{M}^{\mathcal{A}})|_V \simeq \left(\bigoplus_{i \in I} ((\mathcal{E}^{\varphi_i}_{U \setminus D|U})^{n_i})^{\mathcal{A}} \right) \Bigg|_V . \tag{20}$$

On dit que $\mathcal{M}$ a une forme quasi-normale le long de D si $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}(\star D)$, $\mathrm{SingSupp}(\mathcal{M}) \subset D$ et, pour tout $x \in D$, il existe un voisinage U de x et une ramification $p\colon U' \to U$ telle que l'image inverse de $\mathcal{M}|_U$ par p ait une forme normale le *long de $p^{-1}(D)$. Ici une ramification est un morphisme fini qui s'écrit en coordonnées locales $p(z') = (z_1'^{m_1}, \ldots, z_k'^{m_k}, z'_{k+1}, \ldots, z'_n)$ si $D = \{z_1 \cdots z_k = 0\}$, pour des entiers non nuls $m_i \in \mathbb{N}$.*

Les travaux de Mochizuki et Kedlaya mentionnés ci-dessus décrivent la structure locale des connexions méromorphes intégrables. Ceci généralise en toute dimension des résultats de Levelt-Turrittin et Hukuhara-Turrittin pour les courbes complexes ainsi que des travaux préliminaires de Sabbah [Sa00] en dimension 2. Une conséquence de ces résultats de Mochizuki et Kedlaya est reformulée de la façon suivante dans le théorème 7.3.6 de [DK16] :

Théorème 6.3. — *Soient X une variété complexe et $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)$. Alors, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x, une hypersurface Y de U et un morphisme projectif $f\colon U' \to U$ tels que*

(i) $\mathrm{SingSupp}(\mathcal{M}|_U) \subset Y$,

(ii) $D = f^{-1}(Y)$ est un diviseur à croisements normaux,

(iii) f induit un isomorphisme $U' \setminus D \xrightarrow{\sim} U \setminus Y$,

(iv) $(\mathcal{D}f^*\mathcal{M})(\star D)$ a une forme quasi-normale le long de D.

Par exemple nous pouvons indiquer comment on démontre la constructibilité dans (i) du théorème 6.1. Pour utiliser l'éclaté réel il faut introduire le foncteur de de Rham correspondant. On définit $\mathcal{O}^{\mathrm{E}}_{\widetilde{X}}$ de la même façon que $\mathcal{O}^{\mathrm{E}}_X$, puis $\Omega^{\mathrm{E}}_{\widetilde{X}} = \varpi^{-1}(\Omega_X) \otimes_{\varpi^{-1}(\mathcal{O}_X)} \mathcal{O}^{\mathrm{E}}_{\widetilde{X}}$. Pour $\mathcal{N} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}^{\mathcal{A}}_{\widetilde{X}})$ on pose $\mathcal{DR}^{\mathrm{E}}_{\widetilde{X}}(\mathcal{N}) = \Omega^{\mathrm{E}}_{\widetilde{X}} \otimes^{L}_{\mathcal{D}^{\mathcal{A}}_{\widetilde{X}}} \mathcal{N}$. On peut montrer

$$\mathcal{DR}^{\mathrm{E}}_{\widetilde{X}}(\mathcal{M}^{\mathcal{A}}) \simeq \varpi^! \, \mathcal{DR}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M}(\star D)) \quad \text{dans } \mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{\widetilde{X}_{\mathrm{sa}}}), \tag{21}$$

$$\mathrm{R}\varpi_*(\mathcal{DR}^{\mathrm{E}}_{\widetilde{X}}(\mathcal{M}^{\mathcal{A}})) \simeq \mathcal{DR}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M}(\star D)) \quad \text{dans } \mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{X_{\mathrm{sa}}}). \tag{22}$$

Il s'agit maintenant de vérifier (19) pour l'énoncé « $\mathcal{DR}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M}) \in \mathsf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_{X_{\mathrm{sa}}})$ ». Les points (i)-(iv) de (19) découlent de propriétés générales de $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_{X_{\mathrm{sa}}})$. Le point (v) utilise un résultat de constructibilité de l'image directe propre et un résultat de compatibilité du foncteur $\mathcal{DR}^{\mathrm{E}}$ avec l'image directe. Le point (vi) découle du théorème 6.3 et des formules (21)-(22) et (17).

La démonstration de (ii) du théorème 6.1 se fait selon les mêmes lignes.

Remarque 6.4. — Puisque la preuve de la correspondance de Riemann-Hilbert passe par les faisceaux renforcés il est naturel de se demander si l'isomorphisme (18) ne vient pas d'un isomorphisme entre faisceaux renforcés. Dans [KS16] on trouve un énoncé plus fort que (ii) du théorème 6.1 :

$$\varepsilon_X \rho_!(\mathcal{M}) \otimes_{\varepsilon_X \rho_!(\mathcal{O}_X)} \mathcal{O}^{\mathrm{E}}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om^+(\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M}), \mathcal{O}^{\mathrm{E}}_X),$$

où $\varepsilon_X \rho_!(\mathcal{M})$ est l'image de $\mathcal{M}$ dans $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{X_{\mathrm{sa}}})$ (voir (16)). Cet énoncé plus précis est utilisé dans *loc. cit.* pour étudier les transformations intégrales à noyau irrégulier, du type Fourier et Laplace.

7. DESCRIPTION DE L'IMAGE

Le théorème 6.1 n'est pas aussi précis que le cas régulier donné dans le théorème 3.3. Il donne la constructibilité des solutions et un foncteur inverse mais il ne décrit pas l'image du foncteur solution, c'est-à-dire un analogue des complexes $\mathbb{C}$-constructibles, ni l'image des modules holonomes (concentrés en degré 0), c'est-à-dire un analogue des faisceaux pervers. Ci-dessous nous expliquons très succinctement les résultats d'un autre article de D'Agnolo-Kashiwara qui décrit une t-structure de perversité sur $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_{X_{\mathrm{sa}}})$ et d'un article de Mochizuki qui décrit l'image de $\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{E}}_X$.

Dans le cas régulier l'image de $\mathrm{Mod}_{\mathrm{hr}}(\mathcal{D}_X)$ par $\mathcal{S}\mathrm{ol}_X$ est formée des faisceaux pervers et elle est décrite comme le cœur d'une t-structure sur $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$. Dans [DK16b] D'Agnolo et Kashiwara définissent une t-structure *généralisée* sur $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$, notée $({}^{1/2}\mathsf{E}^{\leq c}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_X), {}^{1/2}\mathsf{E}^{\geq c}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_X))_{c\in\mathbb{R}}$, telle que $\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{E}}_X$ soit t-exact. Nous expliquons rapidement ce qu'est une t-structure généralisée sur une catégorie triangulée $\mathcal{T}$. Il s'agit de la donnée de paires de sous-catégories pleines strictes (c'est-à-dire saturées par isomorphismes dans $\mathcal{T}$) $(\mathcal{T}^{\leq c}, \mathcal{T}^{\geq c})_{c\in\mathbb{R}}$ vérifiant, en notant $\mathcal{T}^{<c} = \bigcup_{c'<c}\mathcal{T}^{\leq c'}$ et $\mathcal{T}^{>c} = \bigcup_{c'>c}\mathcal{T}^{\geq c'}$:

- $\mathcal{T}^{\leq c} = \bigcap_{c'>c}\mathcal{T}^{\leq c'}$, $\mathcal{T}^{\geq c} = \bigcap_{c'<c}\mathcal{T}^{\geq c'}$, $\mathcal{T}^{\leq c+1} = \mathcal{T}^{\leq c}[-1]$, $\mathcal{T}^{\geq c+1} = \mathcal{T}^{\geq c}[-1]$,
- $\mathrm{Hom}(\mathcal{T}^{<c}, \mathcal{T}^{>c}) = 0$,
- pour tout $X \in \mathcal{T}$ il existe des triangles distingués $X_{\leq c} \to X \to X_{>c} \xrightarrow{+1}$ et $X_{<c} \to X \to X_{\geq c} \xrightarrow{+1}$, avec $X_* \in \mathcal{T}^*$.

Cette notion est due à Kashiwara. Elle est équivalente à une structure introduite par Bridgeland dans [B07]. Contrairement au cas des t-structures usuelles, $\mathcal{T}^0 = \mathcal{T}^{\leq 0}\cap\mathcal{T}^{\geq 0}$ est en général seulement quasi-abélienne.

Nous n'allons pas décrire ici la t-structure de perversité sur $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$ mais nous faisons remarquer que, déjà dans le cas de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$, on peut définir une t-structure généralisée pour la perversité moitié avec la même définition que pour les faisceaux pervers usuels. Simplement cette définition a un sens avec les t-structures généralisées alors qu'avec les t-structures usuelles la perversité moitié ne convient que dans le cas de stratifications par des strates de dimension réelle paire, par exemple pour $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{C}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$.

En notant $\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{E}}_X(A) \subset \mathsf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$ la sous-catégorie des objets qui sont isomorphes à $\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M})$ pour un certain $\mathcal{M} \in A$ avec $A = \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)$ ou $A = \mathrm{Mod}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)$, on a donc

$$\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{E}}_X(\mathrm{Mod}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)) = \mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{E}}_X(\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)) \cap {}^{1/2}\mathsf{E}^{0}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_X).$$

L'article [Mo16] de Mochizuki donne le critère suivant pour qu'un objet de $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_{X_{\mathrm{sa}}})$ soit dans l'image de $\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{E}}_X$. Notons Δ le disque unité de $\mathbb{C}$. On rappelle que l'image inverse dans $\mathsf{E}^{\mathrm{b}}(\mathbb{C}_{X_{\mathrm{sa}}})$ par un morphisme φ se note $\mathrm{E}\varphi^{-1}$.

Théorème 7.1 (Thm 1.1 de [Mo16]). — *Soient X une variété complexe et $K \in \mathsf{E}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_{X_{\mathrm{sa}}})$. Il existe $\mathcal{M} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)$ tel que $K \simeq \mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M})$ si et seulement si, pour toute application holomorphe $\varphi\colon \Delta \to X$, il existe $\mathcal{M}_\varphi \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_\Delta)$ tel que $\mathrm{E}\varphi^{-1}(K) \simeq \mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{E}}_X(\mathcal{M}_\varphi)$.*

En combinant avec le résultat de [DK16b] on voit donc que $\mathrm{Mod}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X)$ est équivalente à la sous-catégorie de ${}^{1/2}\mathsf{E}^0_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$ des objets qui vérifient le critère du théorème 7.1.

Le théorème 7.1 ramène le problème de la description de $\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{E}}_X(\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{h}}(\mathcal{D}_X))$ à la dimension 1 où les $\mathcal{D}$-modules holonomes, et donc leurs solutions, sont complètement décrits par les structures de Stokes. Expliquons succinctement le cas non ramifié, pour les $\mathcal{D}_\Delta$-modules holonomes $\mathcal{M}$ tels que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}(\star\{0\})$ et $\mathrm{SingSupp}(\mathcal{M}) \subset \{0\}$. Soit $\varphi_i \in \mathcal{O}_\Delta(\star\{0\})$, $i \in I$, une famille finie de fonctions méromorphes avec pôle en 0 donnant la décomposition formelle de $\mathcal{M}$. On peut supposer que $\varphi_i - \varphi_j \notin \mathcal{O}_\Delta$ si $i \neq j$. On définit alors les droites de Stokes D_a, $a \in A$, comme les demi-droites en 0 tangentes aux lignes $\mathrm{Re}(\varphi_i - \varphi_j) = 0$. On a des isomorphismes (20) sur des ouverts $V \subset \widetilde{\Delta}$ assez petits, qu'on peut identifier à des secteurs de sommet 0 dans Δ. On peut choisir de tels ouverts V_a, pour $a \in A$, autour de chaque D_a de façon que $\{0\} \cup \bigcup_a V_a$ soit un voisinage de 0. En notant u_a un isomorphisme tel que (20) au-dessus de V_a, le module $\mathcal{M}$ est déterminé par les composés $(u_a|_{V_a \cap V_b}) \circ (u_b^{-1}|_{V_a \cap V_b})$ pour les secteurs consécutifs V_a, V_b ; ce sont les *matrices de Stokes* du système. De plus, pour chaque direction θ on a la *filtration de Stokes* sur l'espace des solutions de $\mathcal{M}$ sur un petit secteur contenant la direction θ. Cette filtration est liée à la vitesse de croissance quand on tend vers 0 dans le secteur. Pour plus de détails voir par exemple [Ma91, §IV.2], [KS16, §7.4] ou [Ka16b, §1.5].

Ces structures de Stokes sont réinterprétées par Kontsevich [Ko16] comme la donnée d'un faisceau constructible G sur Δ avec les propriétés suivantes. La projection sur Δ du microsupport de G privé de la section nulle est une courbe immergée $C \subset \Delta$, construite à partir de la famille $\{\mathrm{Re}\,\varphi_i\}_{i\in I}$, ne passant pas par 0, et transverse à chaque rayon $R_\theta = \{r\exp(i\theta)\,;\, r > 0\}$. Le microsupport de G hors section nulle est la moitié du conormal à C dans Δ qui n'est pas dirigée vers 0. Enfin, $G_0 \simeq 0$ et $G \simeq \mathcal{S}\mathrm{ol}_\Delta(\mathcal{M})$ au voisinage de $\partial\Delta$. En particulier, pour chaque direction θ les sections globales de $G|_{R_\theta}$ coïncident avec celles de $\mathcal{S}\mathrm{ol}_\Delta(\mathcal{M})|_{R_\theta}$, et sont filtrées par les sous-espaces $\Gamma_{I_r}(R_\theta; G|_{R_\theta})$, $r > 0$, où $I_r = \{r'\exp(i\theta)\,;\, r' \geq r\}$.

Les structures de Stokes peuvent aussi se lire sur $\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{E}}_\Delta(\mathcal{M})$ comme expliqué sur un exemple dans [DK16, §9.8] puis dans [Ka16b, §8]. On peut représenter $\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{E}}_\Delta(\mathcal{M})$ dans un voisinage épointé $U\backslash\{0\} \subset \Delta$ de 0 par $\pi^{-1}\mathbb{C}_{U\backslash\{0\}} \otimes \mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{E}}_\Delta(\mathcal{M}) \simeq \mathbb{C}^{\mathrm{E}}_\Delta \overset{+}{\otimes} \rho_*(\mathrm{R}j_!(F))[1]$, avec $F \in \mathrm{Mod}_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_{\Delta\times\mathbb{R}})$ comme dans la définition (5.4). Soit T_ε le cylindre $S^1_\varepsilon \times \mathbb{R}$, où S^1_ε est le cercle de rayon ε dans Δ. Comme me l'a signalé D'Agnolo, on peut trouver F comme ci-dessus, ε assez petit et un difféomorphisme $f\colon T_\varepsilon \xrightarrow{\sim} \Delta\backslash\{0\}$ tels que $F|_{T_\varepsilon} \simeq f^{-1}(G|_{\Delta\backslash\{0\}})$ où G est le faisceau construit par Kontsevich mentionné auparavant.

De cette façon le théorème 7.1 et la description en dimension 1 donnent en principe une caractérisation de l'image du foncteur $\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathrm{E}}_X$.

RÉFÉRENCES

[Be93] A. Beauville – *Monodromie des systèmes différentiels linéaires à pôles simples sur la sphère de Riemann (d'après A. Bolibruch)*, Séminaire Bourbaki, Volume 1992/93, Astérisque, Soc. Math. Fr. **216** (1993), 103–119.

[B07] T. Bridgeland – *Stability conditions on triangulated categories*, Ann. Math. (2) **166** (2007), 317–345.

[DK16] A. D'Agnolo et M. Kashiwara – *Riemann-Hilbert correspondence for holonomic $\mathcal{D}$-modules*, Publ. Math. I.H.É.S. **123** (2016), 69–197.

[DK16b] A. D'Agnolo et M. Kashiwara – *Enhanced perversities*, J. Reine Angew. Math., ahead of print (2016), pp. 57, doi :10.1515/crelle-2016-0062

[De70] P. Deligne – *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, Lect. Notes Math. **163** Springer, Berlin (1970).

[Ga81] O. Gabber – *The integrability of the characteristic variety,* Amer. J. Math. **103** (1981), 445–468.

[Ka70] M. Kashiwara – *Algebraic study of systems of partial differential equations*, Thèse, Univ. Tokyo (1970), Mém. Soc. Math. Fr. **63** (1995).

[Ka75] M. Kashiwara – *On the maximally overdetermined system of linear differential equations. I*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. **10** (1975), 563–579.

[Ka80] M. Kashiwara – *Faisceaux constructibles et systèmes holonomes d'équations aux dérivées partielles linéaires à points singuliers réguliers*, Sém. Goulaouic-Schwartz 1979-1980, Exposé No.19 (1980).

[Ka84] M. Kashiwara – *The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), 319–36.

[Ka16] M. Kashiwara – *Self-dual T-structure*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. **52** (2016), 271–295.

[Ka16b] M. Kashiwara – *Riemann-Hilbert correspondence for irregular holonomic $\mathcal{D}$-modules*, Japan. J. Math. (3) **11** (2016), 113–149.

[KK81] M. Kashiwara et T. Kawai – *On holonomic systems of microdifferential equations. III : Systems with regular singularities*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **17** (1981), 813–979.

[KS90] M. Kashiwara et P. Schapira – *Sheaves on Manifolds,* Grundl. Math. Wiss. **292**, Springer-Verlag (1990).

[KS96] M. Kashiwara et P. Schapira – *Moderate and formal cohomology associated with constructible sheaves*, Mém. Soc. Math. Fr. **64** (1996).

[KS01] M. Kashiwara et P. Schapira – *Ind-sheaves*, Astérisque, Soc. Math. Fr. **271** (2001).

[KS03] M. Kashiwara et P. Schapira – *Microlocal study of ind-sheaves. I : Micro-support and regularity*, Astérisque, Soc. Math. Fr. **284** (2003), 143–164.

[KS06] M. Kashiwara et P. Schapira – *Categories and Sheaves,* Grundl. Math. Wiss. **332** Springer-Verlag (2006).

[KS16] M. Kashiwara et P. Schapira – *Regular and irregular holonomic $\mathcal{D}$-modules*, London Math. Soc. Lecture Note Series **433** (2016).

[Ke10] K. Kedlaya – *Good formal structures for flat meromorphic connections. I : Surfaces*, Duke Math. J. **154** (2010), 343–418.

[Ke11] K. Kedlaya – *Good formal structures for flat meromorphic connections. II : Excellent schemes*, J. Am. Math. Soc. **24** (2011), 183–229.

[Ko16] M. Kontsevich – *Riemann-Hilbert correspondence in dimension* 1, exposé en avril 2016, programme thématique "Modern Interactions between Algebra, Geometry and Physics" Tohoku Univ. (2016).
http ://www.tfc.tohoku.ac.jp/seminar/4099.html

[Ma91] B. Malgrange – *Équations différentielles à coefficients polynomiaux*, Progress in Mathematics **96**, Birkhäuser (1991).

[Me84] Z. Mebkhout – *Une équivalence de catégories. Une autre équivalence de catégories*, Compos. Math. **51** (1984), 51–62, 63–88.

[Mo09] T. Mochizuki – *Good formal structure for meromorphic flat connections on smooth projective surfaces*, Algebraic Analysis and Around, Adv. Stud. Pure Math. **54**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 223–253 (2009).

[Mo11] T. Mochizuki – *Wild harmonic bundles and wild pure twistor $\mathcal{D}$-modules*, Astérisque, Soc. Math. Fr. **340** (2011).

[Mo16] T. Mochizuki – *Curve test for enhanced ind-sheaves and holonomic $\mathcal{D}$-modules*, `arXiv:1610.08572`.

[Ra78] J.-P. Ramis – *Additif II à "Variations sur le thème GAGA"*, Sémin. Pierre Lelong - Henri Skoda (Anal.), Année 1976/77, Lect. Notes Math. **694** (1978), 280–289.

[Sa00] C. Sabbah – *Équations différentielles à points singuliers irréguliers et phénomène de Stokes en dimension 2*, Astérisque, Soc. Math. Fr. **263** (2000).

[SKK73] M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara – *Microfunctions and pseudo-differential equations,* in Komatsu (ed.), *Hyperfunctions and pseudo-differential equations.* Proceedings Katata 1971, Lecture Notes in Math. **287** (1973), 265–529.

[Ta08] D. Tamarkin – *Microlocal conditions for non-displaceability*, `arXiv:0809.1584`.

Stéphane GUILLERMOU

Université Grenoble Alpes
Institut Fourier
UMR CNRS 5582
CS 40700
F–38058 Grenoble cedex 9
E-mail : `Stephane.Guillermou@ujf-grenoble.fr`