

## AVANCÉES CONCERNANT LES R-MATRICES ET LEURS APPLICATIONS

[d'après Maulik-Okounkov, Kang-Kashiwara-Kim-Oh...]

par David HERNANDEZ

### INTRODUCTION

Les R-matrices sont les solutions de l'équation de Yang-Baxter. A l'origine de la théorie des groupes quantiques, elles peuvent être interprétées comme des opérateurs d'entrelacement. Très récemment, des avancées ont été réalisées indépendamment dans différentes directions. Maulik-Okounkov ont donné une approche géométrique des R-matrices avec de nouveaux outils de géométrie symplectique, les enveloppes stables. Kang-Kashiwara-Kim-Oh ont prouvé une conjecture de catégorification des algèbres amassées en s'appuyant de manière cruciale sur des R-matrices. Enfin, une meilleure compréhension de l'action des matrices de transfert issues de R-matrices a permis de démontrer plusieurs conjectures sur les systèmes intégrables quantiques associés.

L'équation de Yang-Baxter

$$\mathcal{R}_{12}(z)\mathcal{R}_{13}(zw)\mathcal{R}_{23}(w) = \mathcal{R}_{23}(w)\mathcal{R}_{13}(zw)\mathcal{R}_{12}(z)$$

porte sur une série de Laurent

$$\mathcal{R}(z) \in (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})((z))$$

à coefficients dans le carré tensoriel d'une algèbre  $\mathcal{A}$  qu'on supposera complexe. Ici on utilise la notation standard

$$\mathcal{R}_{12}(z) = \mathcal{R}(z) \otimes 1, \mathcal{R}_{23}(z) = 1 \otimes \mathcal{R}(z), \mathcal{R}_{13}(z) = (P \otimes \text{Id})(\mathcal{R}_{23}(z)),$$

avec  $P$  l'opérateur de symétrie tel que

$$P(x \otimes y) = y \otimes x.$$

Les termes de l'équation de Yang-Baxter sont ainsi des éléments de  $(\mathcal{A}^{\otimes 3})((z, w))$ . Une solution est appelée R-matrice, ou R-matrice affine dans la mesure où elle dépend d'un paramètre  $z$ , appelé lui-même paramètre spectral (ou affine).

---

Soutenu partiellement par le Conseil Européen de la Recherche dans le cadre du programme de l'Union Européenne H2020 avec la Grant ERC 647353 QAffine.

Cette équation a pour origine la théorie des systèmes intégrables (quantiques). Elle a aussi été considérablement étudiée dans divers domaines, notamment en théorie des représentations et en topologie (on pourra se reporter aux exposés [Ros, STS]). La théorie des groupes quantiques a été conçue pour apporter une réponse au problème de la construction de telles  $R$ -matrices.

## 1. CONSTRUCTION ALGÈBRIQUE

### 1.1. Exemple fondamental

Commençons par l'exemple fondamental suivant pour l'algèbre  $\mathcal{A} = \text{End}(V)$  avec  $V$  espace vectoriel complexe de dimension 2 de base  $\mathcal{B}$ . Pour  $q \in \mathbb{C}^*$ , on a la  $R$ -matrice écrite dans la base de  $V \otimes V$  naturellement associée à  $\mathcal{B}$  :

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q^{-1}(z-1)}{z-q^{-2}} & \frac{1-q^{-2}}{z-q^{-2}} & 0 \\ 0 & \frac{z(1-q^{-2})}{z-q^{-2}} & \frac{q^{-1}(z-1)}{z-q^{-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in (\text{End}(V^{\otimes 2}))((z)) \simeq (\mathcal{A}^{\otimes 2})((z)).$$

En considérant la matrice extraite (après avoir supprimé les premières et dernières lignes et colonnes), en posant  $z = e^u$ ,  $q = e^{h/2}$  et en prenant  $u$  et  $h$  proches de 0, on obtient la fameuse «  $R$ -matrice de Yang » :

$$(2) \quad \frac{1}{u+h} \begin{pmatrix} u & h \\ h & u \end{pmatrix}.$$

La  $R$ -matrice (1) est apparue historiquement en physique statistique dans le cadre de l'étude du modèle à 6 sommets introduit par Pauling (1935), qui permet notamment de décrire le cristal de la glace. L'étude de ce modèle est étroitement liée à celle d'un autre modèle, en physique statistique quantique, appelé modèle  $XXZ$  de Spin 1/2, dit de Heisenberg quantique (1928). Il modélise des chaînes de spins magnétiques quantiques ayant deux états classiques, haut ou bas.

Ces deux modèles, modèle à 6 sommets et modèle  $XXZ$ , figurent parmi les plus étudiés en physique statistique et quantique. Les structures mathématiques qui les sous-tendent sont très proches et font intervenir l'algèbre affine quantique  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$  associée à l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ . Cette algèbre possède une famille de représentations simples  $V$  de dimension 2 dites « représentations fondamentales ». La  $R$ -matrice (1) est obtenue à partir de telles représentations. Mais la théorie des groupes quantiques en produit beaucoup d'autres, selon qu'on change l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  ou la représentation  $V$ . Elles correspondent à autant de systèmes quantiques.

## 1.2. $R$ -matrices universelles

L'exemple présenté ci-dessus se généralise avec la procédure suivante pour construire de grandes familles de  $R$ -matrices. On suppose dans la suite que  $q \in \mathbb{C}^*$  n'est pas une racine de 1. À une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie  $\mathfrak{g}$  sont associées :

- d'une part l'algèbre de Kac-Moody affine  $\hat{\mathfrak{g}} = \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}c$  (voir l'exposé [F, Section 3.1]) définie comme l'extension centrale universelle de l'algèbre des lacets

$$\mathcal{L}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$$

- d'autre part l'algèbre quantique  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$  (le groupe quantique au sens de Drinfeld et Jimbo, voir l'exposé [Ros]) qui est une algèbre de Hopf et une  $q$ -déformation de l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ .

Lorsqu'on considère simultanément ces deux types de généralisations des algèbres de Lie, on obtient l'algèbre affine quantique  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ . Il s'agit d'une algèbre de Hopf, elle est notamment munie d'un coproduit, un morphisme d'algèbre

$$\Delta : \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \rightarrow \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$$

qui permet de définir une structure de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ -module sur le produit tensoriel de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ -modules.

Drinfeld [Dr] a démontré (preuve précisée par la suite par Beck [Be] et Damiani [Dam]) que  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  peut non seulement être obtenue comme quantification de  $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$ , mais également, par un autre procédé, comme affinisiation du groupe quantique  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ . Il s'agit de la réalisation de Drinfeld des algèbres affines quantiques. Ceci peut être vu de manière informelle sous la forme du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & \hat{\mathfrak{g}} & \\
 \text{Affinisiation} \nearrow & & \searrow \text{Quantification} \\
 \mathfrak{g} & & \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \\
 \text{Quantification} \searrow & & \nearrow \text{Affinisiation quantique} \\
 & \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) & 
 \end{array}$$

On dispose ainsi de deux présentations distinctes définissant des algèbres isomorphes (la présentation originelle de Drinfeld-Jimbo et la présentation de Drinfeld). Il s'agit d'un analogue quantique d'un théorème classique de Kac et Moody pour les algèbres de Kac-Moody affines (voir [Kac, Chapitre 7]).

La réalisation de Drinfeld permet de munir l'algèbre  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  d'une  $\mathbb{Z}$ -graduation naturelle. A cette graduation correspondent des automorphismes  $\tau_a$  de l'algèbre  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  pour  $a \in \mathbb{C}^*$ , ainsi qu'un automorphisme  $\tau_z$  de l'algèbre  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})(z)$  pour  $z$  une indéterminée, tels que pour  $g \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  homogène de degré  $m \in \mathbb{Z}$  on a :

$$\tau_a(g) = a^m g \text{ et } \tau_z(g) = z^m g.$$

THÉORÈME 1.1 (Drinfeld). — *L’algèbre  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  possède une  $R$ -matrice universelle, c’est-à-dire une solution non triviale de l’équation de Yang-Baxter dans le produit tensoriel complété*

$$\mathcal{R}(z) \in [\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \hat{\otimes} \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})][[z]].$$

*De plus pour  $V$  et  $W$  représentations de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ , l’image*

$$(\rho_V \otimes \rho_W)(\mathcal{R}(z)) = \mathcal{R}_{V,W}(z) \in (\text{End}(V) \otimes \text{End}(W))[[z]]$$

*par les morphismes de représentation  $\rho_V$  et  $\rho_W$  est bien définie et*

$$P \circ \mathcal{R}_{V,W}(z) : (V \otimes W)[[z]] \rightarrow (W \otimes V)[[z]]$$

*est un morphisme de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ -module ( $P$  est l’opérateur de symétrie comme ci-dessus et l’action sur  $V$  est tordue par l’automorphisme  $\tau_z$ ).*

*Enfin on a les relations*

$$(3) \quad (\text{Id} \otimes \Delta)(\mathcal{R}(z)) = \mathcal{R}_{13}(z)\mathcal{R}_{12}(z) \text{ et } (\Delta \otimes \text{Id})(\mathcal{R}(z)) = \mathcal{R}_{13}(z)\mathcal{R}_{23}(z).$$

On obtient ainsi des opérateurs d’entrelacement. Lorsque  $V = W$ ,  $\mathcal{R}_{V,V}(z)$  est une  $R$ -matrice.

*Remarque 1.2.* — La notion de produit tensoriel complété  $\hat{\otimes}$  mentionnée ci-dessus est définie en utilisant certaines filtrations de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ . Nous ne précisons pas davantage car cette notion n’intervient que pour les  $R$ -matrices universelles et pas pour les  $R$ -matrices  $\mathcal{R}_{V,W}(z)$  (ni pour les matrices de transfert) étudiées dans la suite de l’exposé.

*Remarque 1.3.* — Les conventions sur la  $\mathbb{Z}$ -graduation de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  évoquée ci-dessus font que  $\mathcal{R}(z)$  ne fait effectivement intervenir que des puissances positives de  $z$ .

PREUVE (esquisse) — La preuve de Drinfeld repose sur la réalisation de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  comme quotient du double d’une sous-algèbre de Hopf (analogue d’une sous-algèbre de Borel). Le double  $D(A)$  d’une algèbre de Hopf  $A$  est l’espace vectoriel  $A \otimes A^0$  avec  $A^0$  l’algèbre de Hopf duale de  $A$ .  $D(A)$  est alors muni d’une structure d’algèbre de Hopf qui possède automatiquement une  $R$ -matrice universelle (voir l’exposé [Ros, Section 3]).  $\square$

### 1.3. $R$ -matrices normalisées

On a la propriété de rationalité suivante.

PROPOSITION 1.4. — *Pour  $V$  et  $W$  des représentations simples de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ , il existe une série de Laurent scalaire,  $f_{V,W}(z) \in \mathbb{C}((z))$ , telle que le produit*

$$f_{V,W}(z)\mathcal{R}_{V,W}(z) \in (\text{End}(V \otimes W))(z)$$

*est une fonction rationnelle de  $z$ .*

PREUVE (esquisse) — On peut par exemple utiliser l’argument de [EFK, Section 9.2] (voir aussi [FR2]). Soient  $v, w$  des vecteurs de plus haut poids respectivement de  $V$  et de  $W$  (relativement à un analogue d’une sous-algèbre de Cartan dans  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ ). Il existe alors une unique  $f_{V,W}(z) \in \mathbb{C}[[z]]$  telle que

$$(4) \quad (f_{V,W}(z)\mathcal{R}_{V,W}(z)).(v \otimes w) = v \otimes w.$$

La représentation  $(V \otimes W) \otimes \mathbb{C}((z))$  de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})((z))$  est simple (c’est ce qu’on appelle la simplicité générique du produit tensoriel). Ainsi le fait que  $f_{V,W}(z)P \circ \mathcal{R}_{V,W}(z)$  est un opérateur d’entrelacement se traduit par un système d’équations linéaires dont les solutions sont rationnelles.  $\square$

*Remarque 1.5.* — On obtient l’unicité de la série de Laurent  $f_{V,W}(z)$  en imposant la relation (4). C’est ce que nous ferons par la suite. Le morphisme rationnel  $f_{V,W}(z)\mathcal{R}_{V,W}(z)$  admet un inverse qui est alors

$$(f_{V,W}(z)\mathcal{R}_{V,W}(z))^{-1} = f_{W,V}(z^{-1})(P \circ \mathcal{R}_{W,V}(z^{-1}) \circ P).$$

Nous nous intéresserons particulièrement au cas des représentations fondamentales  $V_i(a)$  de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ . Elles sont paramétrées par  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $a \in \mathbb{C}^*$  où  $n$  est le rang de  $\mathfrak{g}$ . On pourra se reporter à [CP, Chapitre 12.2] pour des généralités sur les représentations de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ .

Soit  $R \geq 0$  l’ordre de 1 comme pôle de  $f_{V,W}(z)\mathcal{R}_{V,W}(z)$ . Alors la limite

$$(5) \quad \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^R f_{V,W}(z)P \circ \mathcal{R}_{V,W}(z)] : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$$

est un morphisme de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ -module non nul (si  $V$  et  $W$  ne le sont pas).

DÉFINITION 1.6. — *La limite (5) est appelée  $R$ -matrice normalisée et notée*

$$\mathcal{R}_{V,W}^{norm} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V.$$

Considérons par exemple  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$  avec deux représentations fondamentales  $V = V_1(1)$  et  $W = V_1(q^2)$  de dimension 2. Dans ce cas elles peuvent être construites à partir d’une représentation de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$  en utilisant des morphismes d’évaluation<sup>(1)</sup>  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2) \rightarrow \mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ . On obtient la  $R$ -matrice (1) avec  $zq^{-2}$  à la place de  $z$ . Le pôle 1 est simple et

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q(zq^{-2}-1)}{z-1} & \frac{q^2-1}{z-1} & 0 \\ 0 & \frac{z(1-q^{-2})}{z-1} & \frac{q(zq^{-2}-1)}{z-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1}-q & q^2-1 & 0 \\ 0 & 1-q^{-2} & q^{-1}-q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui donne la  $R$ -matrice normalisée

$$\mathcal{R}_{V_1(q^2), V_1(1)}^{norm} : V_1(1) \otimes V_1(q^2) \rightarrow V_1(q^2) \otimes V_1(1).$$

Notons qu’il s’agit d’un opérateur de rang 1, non inversible contrairement à  $\mathcal{R}_{V,W}(z)$  (on pourra comparer avec la remarque 1.5).

1. De tels morphismes d’évaluation, définis par Jimbo, n’existent qu’en type  $A$ . C’est une source de difficultés techniques importantes dans l’étude des représentations de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ .

*Remarque 1.7.* — La localisation des pôles des  $f_{V,W}(z)\mathcal{R}_{V,W}(z)$  constitue un problème difficile encore largement ouvert, et particulièrement important notamment du point de vue de la physique mathématique.

L'équation de Yang-Baxter implique que pour  $U, V, W$  représentations de dimension finie, les opérateurs  $P \circ \mathcal{R}_{\cdot,\cdot}(z)$  satisfont la relation de l'hexagone dans

$$\text{End}(U \otimes V \otimes W, W \otimes V \otimes U)[[z, w]].$$

Elle est décrite par le diagramme commutatif suivant (les scalaires sont étendus au corps  $\mathbb{C}((z, w))$ ) :

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} & V \otimes U \otimes W & \xrightarrow{\text{Id} \otimes P\mathcal{R}_{U,W}(zw)} & V \otimes W \otimes U \\ & \nearrow P\mathcal{R}_{U,V}(z) \otimes \text{Id} & & \searrow P\mathcal{R}_{V,W}(w) \otimes \text{Id} \\ U \otimes V \otimes W & & & W \otimes V \otimes U \\ & \searrow \text{Id} \otimes P\mathcal{R}_{V,W}(w) & & \nearrow \text{Id} \otimes P\mathcal{R}_{U,V}(z) \\ & U \otimes W \otimes V & \xrightarrow{P\mathcal{R}_{U,W}(zw) \otimes \text{Id}} & W \otimes U \otimes V \end{array}$$

Les flèches sont des morphismes de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ -modules si la représentation  $U$  (resp.  $W$ ) est tordue par l'automorphisme  $\tau_z$  (resp.  $\tau_{w^{-1}}$ ).

*Remarque 1.8.* — Une algèbre affine quantique  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  a un analogue « rationnel » appelé « Yangian ». Il s'agit d'une déformation de l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}[t])$ . Il peut aussi être vu comme une dégénérescence d'une sous-algèbre de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ . Un Yangian est également muni d'une  $R$ -matrice universelle et de  $R$ -matrices normalisées.

D'autres exemples de  $R$ -matrices vont aussi apparaître ci-après dans le contexte des représentations des algèbres KLR (algèbres de Hecke-carquois).

## 2. CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE

Maulik-Okounkov [MO] ont mis à jour une construction très générale de  $R$ -matrices à partir de l'action d'une paire de tores sur une variété symplectique. Elle permet de retrouver notamment des  $R$ -matrices déjà connues, mais les techniques utilisées, « les enveloppes stables », vont bien au-delà.

Les variétés de Nakajima (ou variétés carquois, voir l'exposé [Sc]) en sont un exemple particulièrement important. En effet, dans une série d'articles séminaux, Nakajima a construit certaines représentations d'algèbres affines quantiques  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ , pour  $\mathfrak{g}$  simplement lacée, dans la  $K$ -théorie équivariante de ses variétés (voir [N2, N4] et [Sc, Section 7.3]). Le cas des représentations des Yangians réalisées dans la cohomologie équivariante a été traité par Varagnolo [Va]. De plus, l'étude géométrique du coproduit

par Varagnolo-Vasserot [VV1] puis par Nakajima [N3] a permis de construire des produits tensoriels de représentations de dimension finie. Les résultats de [MO] répondent ainsi à une question qui découle naturellement de ces travaux.

## 2.1. Tores et variétés symplectiques

La situation géométrique est la suivante : on dispose de deux tores

$$(\mathbb{C}^*)^r \simeq A \subset T \simeq (\mathbb{C}^*)^{r+n}$$

qui agissent sur une variété algébrique quasiprojective, symplectique et non singulière  $X$ . Soit  $\omega \in H^0(\Omega^2 X)$  la forme symplectique holomorphe de  $X$ .

On suppose que la droite

$$\mathbb{C} \cdot \omega \subset H^0(\Omega^2 X)$$

est stable pour l'action induite de  $T$ . C'est une représentation de dimension 1 à laquelle est associé un caractère, c'est-à-dire un morphisme de groupe

$$h : T \rightarrow \mathbb{C}^*.$$

On suppose de plus que

$$A \subset \text{Ker}(h),$$

c'est-à-dire que  $\omega$  est fixe pour l'action de  $A$ .

On suppose enfin qu'on dispose d'une application propre  $T$ -équivariante

$$\pi : X \rightarrow X_0$$

vers une variété affine  $X_0$  munie d'une action de  $T$ , et que  $X$  est une  $T$ -variété formelle au sens de [Bo, Section XII] (il s'agit d'une condition technique sur une suite spectrale impliquant les groupes de cohomologie équivariante, voir plus bas). On ne suppose pas que cette application  $\pi$  est nécessairement une résolution symplectique de singularités.

Soit  $X^A$  l'ensemble des points fixes de  $X$  sous l'action de  $A$ .

Le fibré normal  $N(X^A)$  à  $X^A$  dans  $X$  admet une décomposition en une somme directe, indexée par des caractères de  $A$ , de fibrés avec une action triviale de  $A$  tensorisée par ces caractères (voir [CG, Section 5.10]).

**DÉFINITION 2.1.** — *L'ensemble  $\Delta$  des racines de  $A$  est l'ensemble des caractères de  $A$  apparaissant dans la décomposition de  $N(X^A)$ .*

Soient  $t(A)$  le groupe des cocaractères de  $A$  (c'est-à-dire des morphismes de groupe de  $\mathbb{C}^*$  vers  $A$ ). C'est un réseau de rang  $r$ . Nous utiliserons l'espace

$$\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} = t(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^r.$$

Notons que  $\Delta$  peut être vu comme une partie de

$$\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^* = c(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R},$$

avec  $c(A)$  le groupe des caractères de  $A$ . Nous ferons cette identification dans la suite du texte sans plus de commentaires.

Pour  $\alpha \in \Delta$ , on considère son hyperplan orthogonal :

$$\alpha^\perp = \{v \in \mathfrak{a}_\mathbb{R} \mid \alpha(v) = 0\}.$$

On obtient ainsi un arrangement d'hyperplans de  $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$

$$(7) \quad \{\alpha^\perp \mid \alpha \in \Delta\}.$$

Le complémentaire de l'union de ces hyperplans admet une partition en parties ouvertes  $\mathcal{C}_i$ , appelées chambres, qui en sont les composantes connexes et dont les  $\alpha^\perp$  sont les murs :

$$\mathfrak{a}_\mathbb{R} \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in \Delta} \alpha^\perp \right) = \bigsqcup_i \mathcal{C}_i.$$

Si  $\sigma$  est dans une chambre  $\mathcal{C}_i$ , on dit qu'il est générique et

$$X^A = X^\sigma = \{x \in X \mid \sigma(z).x = x, \forall z \in \mathbb{C}^*\}.$$

**DÉFINITION 2.2.** — *Pour  $\mathcal{C}$  une chambre, un point  $x \in X$  est dit  $\mathcal{C}$ -stable si pour tout  $\sigma \in \mathcal{C}$  cocaractère, la limite suivante existe :*

$$\lim_{z \rightarrow 0} (\sigma(z).x).$$

*Alors la limite est dans  $X^A$  et ne dépend pas du choix du cocaractère  $\sigma \in \mathcal{C}$ . On note*

$$\lim_{\mathcal{C}}(x) \in X^A.$$

Pour  $Z \subset X^A$  une composante connexe, on définit son ensemble attracteur

$$\text{Attr}_{\mathcal{C}}(Z) = \{x \in X \text{ } \mathcal{C}\text{-stable} \mid \lim_{\mathcal{C}}(x) \in Z\}$$

qui peut être vu comme l'ensemble des points « attirés » par  $Z$  dans l'esprit de la décomposition de Bialynicki-Birula pour les variétés projectives (voir par exemple [CG, Théorème 2.4.3]).

Cela induit un ordre partiel  $\preceq_{\mathcal{C}}$  sur l'ensemble des composantes connexes de  $X^A$  défini comme la fermeture transitive de la relation :

$$\overline{\text{Attr}_{\mathcal{C}}(Z)} \cap Z' \neq \emptyset \Rightarrow Z' \preceq_{\mathcal{C}} Z.$$

On a enfin l'ensemble attracteur plein de  $Z$  qui est une sous-variété fermée de  $X$  :

$$\text{Attr}_{\mathcal{C}}^f(Z) = \bigsqcup_{Z' \preceq Z} \text{Attr}_{\mathcal{C}}(Z').$$

Par exemple soit

$$X = T^*\mathbb{P}^n$$

le fibré cotangent de  $\mathbb{P}^n$  muni de l'action naturelle du tore  $T = A \times \mathbb{C}^*$  où  $A = (\mathbb{C}^*)^n$ . L'action de  $A$  est induite par l'action sur  $\mathbb{C}^{n+1}$  et donnée par des caractères notés  $u_1, \dots, u_n$  pour les  $n$  premières coordonnées. Le facteur supplémentaire  $\mathbb{C}^*$  a une action

non triviale sur les fibres de  $T^*\mathbb{P}^n$  donnée par un caractère  $h$ . En identifiant naturellement  $\mathbb{P}^n$  à une sous-variété de  $X$  par la section nulle, les points fixes dans  $X$  sont les

$$p_i = [0 : \dots : 0 : 1 : 0 : \dots : 0]$$

et

$$X^A = \{p_0, \dots, p_n\}.$$

Par exemple, pour  $n = 1$ , notons  $u = u_1$ . Pour  $a \in A = \mathbb{C}^*$  et  $[x, y] \in \mathbb{P}^1$ , on a

$$a \cdot [x : y] = [a^u x : y].$$

On obtient 2 racines

$$\Delta = \{\alpha, -\alpha\} \subset \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^* \simeq \mathbb{R}$$

avec

$$\alpha(a) = a^u \text{ et } (-\alpha)(a) = a^{-u},$$

et 2 chambres :

$$\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} = \mathcal{C}_+ \sqcup \alpha^\perp \sqcup \mathcal{C}_-$$

où

$$\mathcal{C}_\pm = \{x \in \mathbb{R} \mid \pm u \cdot x > 0\} \text{ et } \alpha^\perp = \{0\}.$$

Ainsi

$$\text{Attr}_{\mathcal{C}_+}(p_0) = T_{p_0}^*(\mathbb{P}^1), \text{ Attr}_{\mathcal{C}_-}(p_0) = \mathbb{P}^1 \setminus \{p_1\},$$

$$\text{Attr}_{\mathcal{C}_+}(p_1) = \mathbb{P}^1 \setminus \{p_0\}, \text{ Attr}_{\mathcal{C}_-}(p_1) = T_{p_1}^*(\mathbb{P}^1).$$

En particulier

$$\{p_0\} \succ_{\mathcal{C}_-} \{p_1\} \text{ et } \{p_1\} \succ_{\mathcal{C}_+} \{p_0\}.$$

## 2.2. Cohomologie équivariante et polarisation

Exposons brièvement quelques éléments importants sur la cohomologie équivariante. On pourra se reporter à [Ve] et aux références données dans cet article pour plus de détails. Il s'agit d'un outil décrivant les données topologiques d'une variété munie d'une action de groupe et qui préserve l'information sur les stabilisateurs de points fixes éventuels.

Pour  $X$  une variété quasi-projective lisse munie de l'action d'un groupe de Lie  $G$ , son anneau de cohomologie équivariante est noté  $H_G^\bullet(X)$  (on travaille avec des coefficients dans le corps  $\mathbb{C}$ ). Cette  $\mathbb{C}$ -algèbre graduée est définie comme l'anneau de cohomologie ordinaire de la construction de Borel (ou quotient homotopique) :

$$H_G^\bullet(X) = H^\bullet((EG \times X)/G).$$

Ici  $EG$  est obtenu comme l'espace total d'un fibré universel  $EG \rightarrow BG$  et on considère l'espace des  $G$ -orbites sur le produit  $EG \times X$  muni de l'action diagonale de  $G$ , où  $G$  agit naturellement dans  $EG$ . Le remplacement de  $X$  par  $EG \times X$  est justifié par le fait que l'action de  $G$  sur le produit est libre et que  $X$  et  $EG \times X$  sont homotopiquement

équivalents,  $EG$  étant contractile. L'espace classifiant  $BG$  est le quotient homotopique d'un point :

$$(EG \times \{pt\})/G = BG \text{ et } H_G^\bullet(pt) = H^\bullet(BG).$$

Cet exemple est particulièrement important car l'inclusion  $\{pt\} \rightarrow X$  induit une structure de  $H_G^\bullet(pt)$ -algèbre sur  $H_G^\bullet(X)$ . Dans le cas d'une  $G$ -variété formelle comme ci-dessus, on obtient un  $H_G^\bullet(pt)$ -module libre.

Pour  $Z \subset X$  une sous-variété fermée stable sous l'action de  $G$ , sa classe  $[Z] \in H_G^\bullet(X)$  est la classe d'Euler équivariante de son fibré normal dans  $X$  :

$$[Z] = e(N(Z)) \in H_G^\bullet(X).$$

Elle est de degré  $\text{codim}(Z)$  (les dimensions et codimensions des variétés dans cette section sont réelles).

Dans le cas d'un tore  $G = (\mathbb{C}^*)^M$ , on a

$$H_G^\bullet(pt) = \mathbb{C}[u_1, \dots, u_M]$$

où  $u_1, \dots, u_M$  de degré 2 correspondent aux caractères de  $T$ .

Dans l'exemple  $X = T^*\mathbb{P}^n$  de la section précédente, on a :

$$H_T^\bullet(pt) = \mathbb{C}[u_1, \dots, u_n, h],$$

$$H_T^\bullet(X) = \mathbb{C}[c, u_1, \dots, u_n, h] / \langle (c - u_1) \dots (c - u_n)c = 0 \rangle$$

où  $c$  est la première classe de Chern du fibré tautologique  $\mathcal{O}(-1)$ . Ainsi  $H_T^\bullet(X)$  est un  $H_T^\bullet(pt)$ -module libre de rang  $n + 1$  et

$$H_T^\bullet(X^A) = \bigoplus_{0 \leq i \leq n} \mathbb{C}[u_1, \dots, u_n, h][p_i].$$

Revenons à la situation générale de la section 2.1. Pour  $\mathcal{C}$  une chambre comme ci-dessus, on a une décomposition

$$\Delta = \Delta_+ \sqcup \Delta_-$$

en racines positives et négatives où

$$\Delta_\pm = \{\alpha \in \Delta \mid \pm \alpha(\lambda) > 0, \forall \lambda \in \mathcal{C}\}.$$

Ainsi pour  $Z \subset X^A$  une composante connexe, on obtient une décomposition :

$$N(Z) = N_+(Z) \oplus N_-(Z).$$

La forme symplectique induit une dualité entre les deux composantes (à un produit tensoriel prêt par un fibré trivial de caractère  $h$ ). On en déduit que pour  $\alpha \in \Delta$  une racine, on a  $-\alpha \in \Delta$ , et que

$$(-1)^{\frac{\text{codim}(Z)}{2}} [Z] \in H_A^\bullet(Z)$$

est un carré parfait dans  $H_A^\bullet(Z)$  :

$$\epsilon^2 = (-1)^{\frac{\text{codim}(Z)}{2}} [Z].$$

Une polarisation est un choix d'une racine carrée  $\epsilon \in H_A^\bullet(Z)$ .

### 2.3. Enveloppes stables

Supposons choisies une chambre  $\mathcal{C}$  et une polarisation.

THÉORÈME 2.3. — [MO] *Il existe un unique morphisme de  $H_T^\bullet(pt)$ -modules*

$$Stab_{\mathcal{C}} : H_T^\bullet(X^A) \rightarrow H_T^\bullet(X)$$

tel que pour  $\gamma \in H_{T/A}^\bullet(Z)$  avec  $Z \subset X^A$  composante connexe, l'image  $\Gamma = Stab_{\mathcal{C}}(\gamma)$  satisfait :

(i)  $Supp(\Gamma) \subset Attr_{\mathcal{C}}^f(Z)$ ,

(ii)  $\Gamma|_Z = (\pm e(N_-(Z))) \cup \gamma$  où le signe est choisi pour que  $\pm e(N_-(Z)) = \epsilon$  dans  $H_A(Z)$ ,

(iii) pour tout  $Z' \prec_{\mathcal{C}} Z$ , le degré satisfait  $deg_A(\Gamma|_{Z'}) < codim(Z')/2$ .

Notons que, puisque  $A \subset T$  est commutatif, le tore  $T$  agit bien sur  $X^A$ , l'action de  $A$  étant triviale. Alors  $H_T^\bullet(X^A) \simeq H_{T/A}(X^A) \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{t}/\mathfrak{a}]} \mathbb{C}[\mathfrak{t}]$  avec  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{t}$  algèbres de Lie de  $A \subset T$ . Le degré  $deg_A$  est défini par le degré dans  $\mathbb{C}[\mathfrak{a}]$  grâce à une factorisation  $\mathbb{C}[\mathfrak{t}] \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{a}] \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{t}/\mathfrak{a}]$ .

Par ailleurs la condition de support (i) signifie que la restriction de  $\Gamma$  à  $X \setminus Attr_{\mathcal{C}}^f(Z)$  est nulle.

PREUVE (idée) — La preuve de l'existence est basée sur une correspondance lagrangienne  $\mathcal{L}$  bien choisie dans

$$X \times X^A \supset \mathcal{L}$$

munie de la forme symplectique antidiagonale  $(\omega, -\omega|_{X^A})$ . Il s'agit d'une sous-variété isotrope stable dont la dimension est moitié de celle de  $X \times X^A$ . Cette sous-variété  $\mathcal{L}$  est construite par approximations successives : on considère d'abord l'adhérence de l'image réciproque de la sous-variété diagonale par l'application naturelle

$$Attr_{\mathcal{C}}(Z) \times Z \rightarrow Z \times Z,$$

$$(x, y) \mapsto (\lim_{\mathcal{C}}(x), y).$$

Elle est ensuite modifiée par un procédé itératif décrit dans [MO, Section 3.5] de manière à ce que pour  $Z' \succ_{\mathcal{C}} Z$ , le  $A$ -degré de la restriction de  $[\mathcal{L}]$  à  $Z' \times Z$  soit inférieur à  $codim(Z')/2$ .

On pourra se reporter à [CG, Chapitre 2] ainsi qu'à l'exposé [Sc, Sections 5.2, 7.2] pour une discussion générale sur les opérateurs définis par correspondances<sup>(2)</sup>. La construction de [MO] s'inscrit dans ce cadre : on a les projections naturelles  $\pi_1$  et  $\pi_2$

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{L} & \\ \pi_2 \swarrow & & \searrow \pi_1 \\ X^A & & X \end{array},$$

2. Le produit de convolution pour les correspondances de Steinberg constitue un exemple important.

$\mathcal{L}$  est propre au dessus de  $X$ , et on a

$$\begin{array}{ccc} & H_T^\bullet(\mathcal{L}) & \\ & \nearrow (\pi_2)^* & \searrow (\pi_1)_* \\ H_T^\bullet(X^A) & & H_T^\bullet(X) \end{array},$$

ce qui permet de définir l'application comme composée

$$\text{Stab}_{\mathcal{C}} = (\pi_1)_* \circ (\pi_2)^* : H_T^\bullet(X^A) \rightarrow H_T^\bullet(X).$$

□

*Remarque 2.4.* — Notons que le morphisme de restriction, obtenu à partir de l'inclusion  $X^A \hookrightarrow X$ , a quant à lui  $H_T^\bullet(X)$  pour espace de départ :

$$H_T^\bullet(X) \hookrightarrow H_T^\bullet(X^A).$$

Sous des conditions standard, le théorème de localisation en cohomologie équivariante garantit que ce morphisme devient un isomorphisme après extension des scalaires au corps des fractions de l'anneau  $H_T^\bullet(pt)$ . Le morphisme  $\text{Stab}_{\mathcal{C}}$  devient aussi un isomorphisme après cette extension des scalaires.

*Remarque 2.5.* — Dans le cas où  $\pi$  est une résolution symplectique, la preuve du théorème 2.3 est simplifiée. Ceci inclut notamment les variétés de Nakajima étudiées plus bas, ainsi que, pour un sous-groupe parabolique  $P \subset G$  d'un groupe algébrique, le fibré cotangent  $T^*(G/P)$  (avec la résolution de Springer).

Revenons à l'exemple  $X = T^*\mathbb{P}^1$  ci-dessus :

$$H_T^\bullet(X) = \mathbb{C}[u, h] \oplus \mathbb{C}[u, h]c \text{ et } H_T^\bullet(X^A) = \mathbb{C}[u, h][p_0] \oplus \mathbb{C}[u, h][p_1]$$

(voir par exemple [Sm]). L'injection  $i : H_T^\bullet(X) \hookrightarrow H_T^\bullet(X^A)$  correspond à l'identification :

$$[p_0] = \frac{c - u}{u}, \quad [p_1] = \frac{-c}{u}.$$

On obtient :

$$\text{Stab}_{\mathcal{C}_+}([p_0]) = u - c \text{ et } \text{Stab}_{\mathcal{C}_+}([p_1]) = -c - h.$$

$$\text{Stab}_{\mathcal{C}_-}([p_0]) = u - c - h \text{ et } \text{Stab}_{\mathcal{C}_-}([p_1]) = -c.$$

Pour  $u \neq \pm h$ , on obtient une base de  $H_T^\bullet(X) : (\text{Stab}_{\mathcal{C}_\pm}([p_0]), \text{Stab}_{\mathcal{C}_\pm}([p_1]))$ . Dans les bases de points fixes  $([p_0], [p_1])$ , on a les matrices :

$$\text{Stab}_{\mathcal{C}_+} = \begin{pmatrix} -u & -h \\ 0 & u - h \end{pmatrix}, \quad \text{Stab}_{\mathcal{C}_-} = \begin{pmatrix} -u - h & 0 \\ -h & u \end{pmatrix}.$$

*Remarque 2.6.* — Une version  $K$ -théorique du théorème 2.3 existe, voir [O, Section 9]. On pourra se reporter à [CG, Chapitre 5] pour une introduction à la  $K$ -théorie équivariante. Cette version présente des différences avec le cas cohomologique, en particulier l'application  $\text{Stab}$  ne dépend pas seulement de la chambre  $\mathcal{C}$ , mais d'une alcôve

obtenue à partir de la version affine de l'arrangement (7). Ces alcôves sont les composantes connexes de

$$\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in \Delta, n \in \mathbb{Z}} H_{\alpha, n} \right)$$

défini à l'aide des hyperplans affines

$$H_{\alpha, n} = \{v \in \mathfrak{a}_{\mathbb{R}} \mid \alpha(v) = n\}.$$

*Remarque 2.7.* — Dans certains cas particuliers, les applications  $\text{Stab}$  en  $K$ -théorie ont été aussi considérées par Rimanyi-Tarasov-Varchenko [RTV].

### 2.4. Construction géométrique de $R$ -matrices

Fixons une polarisation et considérons deux chambres  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ . On dispose alors de deux applications  $\text{Stab}_{\mathcal{C}}$  et  $\text{Stab}_{\mathcal{C}'}$  :

$$\begin{array}{ccc} & H_T^\bullet(X) & \\ \nearrow \text{Stab}_{\mathcal{C}} & & \nwarrow \text{Stab}_{\mathcal{C}'} \\ H_T^\bullet(X^A) & \overset{\mathcal{R}_{\mathcal{C}', \mathcal{C}}}{\dashrightarrow} & H_T^\bullet(X^A) \end{array}$$

Quitte à localiser en  $e(N_-)$  (pour  $N_-$  le fibré tautologique), on peut montrer que l'application  $\text{Stab}_{\mathcal{C}'}$  est inversible (voir la remarque 2.4). Ainsi, après extension des scalaires, on peut définir la  $R$ -matrice géométrique

$$R_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} = (\text{Stab}_{\mathcal{C}'})^{-1} \circ \text{Stab}_{\mathcal{C}} \in \text{End}(H_T^\bullet(X^A)).$$

En termes imagés, on passe de la chambre  $\mathcal{C}$  à la chambre  $\mathcal{C}'$  en traversant <sup>(3)</sup> des murs  $\alpha^\perp$ .

Pour l'exemple fondamental  $X = T^*\mathbb{P}^1$  de la section précédente, on retrouve la  $R$ -matrice (2) (la  $R$ -matrice de Yang) :

$$R_{\mathcal{C}_-, \mathcal{C}_+} = \frac{1}{u+h} \begin{pmatrix} u & h \\ h & u \end{pmatrix}.$$

Le cas particulier des variétés de Nakajima est ici particulièrement important. Pour  $Q$  un carquois (un graphe orienté) dont l'ensemble  $I$  des sommets est fini, et pour  $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in \mathbb{N}^I$ , on peut définir la variété symplectique de Nakajima <sup>(4)</sup>

$$\mathcal{M}(\mathbf{w}, \mathbf{v}).$$

*Remarque 2.8.* — Comme cela a été rappelé dans l'introduction de cette section 2, la relation entre ces variétés (et leurs analogues gradués) et les groupes quantiques a été établie par Nakajima dès le début de la théorie [N2, N4]. On renvoie à l'exposé [Sc] pour une introduction générale à ces variétés aux multiples applications.

3. Le terme « wall-crossing » est parfois utilisé.

4. La variété dépend d'une condition de stabilité qui est supposée ici générique et fixée.

Notons  $(w_i)_{i \in I}$  les coordonnées de  $\mathbf{w}$  sur  $(\omega_i)_{i \in I}$  la base canonique de  $\mathbb{N}^I$  :

$$\mathbf{w} = \sum_{i \in I} w_i \omega_i.$$

La variété  $\mathcal{M}(\mathbf{w}, \mathbf{v})$  est munie d'une action symplectique du groupe produit

$$\prod_{i \in I} \mathrm{GL}(w_i)$$

qui contient un tore maximal noté  $A = A_{\mathbf{w}}$ . Il est contenu dans un tore plus grand

$$T = A_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*,$$

agissant<sup>(5)</sup> sur  $\mathcal{M}(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ . Le facteur supplémentaire  $\mathbb{C}^*$  permet de définir un caractère  $h$  comme dans le contexte général décrit ci-dessus.

On a la propriété cruciale de factorisation suivante. Pour la variété

$$\mathcal{M}(\mathbf{w}) = \bigsqcup_{\mathbf{v} \in \mathbb{N}^I} \mathcal{M}(\mathbf{w}, \mathbf{v}),$$

l'espace des points fixes est lui-même un produit de variétés de Nakajima :

$$(8) \quad (\mathcal{M}(\mathbf{w}))^{A_{\mathbf{w}}} = \mathcal{M}(\omega_1)^{\times w_1} \times \dots \times \mathcal{M}(\omega_n)^{\times w_n}.$$

On pourra se reporter à [N6] pour d'autres développements récents liés à cette propriété. En particulier

$$H_T^\bullet((\mathcal{M}(\mathbf{w}))^{A_{\mathbf{w}}}) = H_1^{\otimes w_1} \otimes \dots \otimes H_n^{\otimes w_n},$$

avec pour  $i \in I$  :

$$H_i = H_T^\bullet(\mathcal{M}(\omega_i)).$$

Le cas suivant est particulièrement important. Considérons

$$\mathbf{w} = \omega_i + \omega_j$$

avec  $i, j \in I$ . On obtient un opérateur

$$R_{i,j}(a) \in \mathrm{End}(H_i \otimes H_j) \otimes \mathbb{C}(a).$$

Il ne dépend que de  $a = a_j - a_i$  différence dans  $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$  des deux cocaractères du groupe  $A_{\mathbf{w}} \simeq (\mathbb{C}^*)^2$  associés respectivement au deuxième facteur  $H_j$  et au premier facteur  $H_i$ .

PROPOSITION 2.9. — [MO] Pour  $i, j, k \in I$ , on a dans

$$\mathrm{End}(H_i \otimes H_j \otimes H_k, H_k \otimes H_j \otimes H_i) \otimes \mathbb{C}(a, b)$$

la relation suivante entre les opérateurs  $\mathcal{R}_{\cdot,\cdot}(\lambda) = P \circ R_{\cdot,\cdot}(\lambda)$  :

$$(\mathcal{R}_{i,j}(a) \otimes \mathrm{Id})(\mathrm{Id} \otimes \mathcal{R}_{i,k}(b))(\mathcal{R}_{j,k}(b-a) \otimes \mathrm{Id}) = (\mathrm{Id} \otimes \mathcal{R}_{j,k}(b-a))(\mathcal{R}_{i,k}(b) \otimes \mathrm{Id})(\mathrm{Id} \otimes \mathcal{R}_{i,j}(a)).$$

---

5. Quand le carquois admet des boucles, on peut étendre l'action à un tore encore plus grand.

*Remarque 2.10.* — L'énoncé de cette proposition revient à dire que les  $R_{i,j}(a)$  satisfont l'équation de Yang-Baxter ou que les opérateurs  $\mathcal{R}_{i,j}(a)$  rendent commutatif un diagramme analogue au diagramme (6). La dépendance en le paramètre spectral est notée ici additivement.

*Remarque 2.11.* — Les auteurs de [MO, Section 4.3] établissent également que leurs  $R$ -matrices possèdent une propriété de factorisation remarquable, dans l'esprit des factorisations déjà connues pour les  $R$ -matrices issues des groupes quantiques. Elles peuvent être écrites comme un produit (éventuellement infini) de  $R$ -matrices élémentaires correspondant à des paires de chambres séparées par un mur  $\alpha^\perp$  (où  $\alpha \in \Delta$  est une racine).

PREUVE (esquisse) — D'après la propriété de factorisation (8), chaque facteur dans la relation s'identifie à une  $R$ -matrice géométrique associée à une variété

$$\mathcal{M}(\omega_i + \omega_j + \omega_k)$$

pour une certaine chambre. La relation provient de la remarque générale suivante : en considérant des chambres

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{2N} = \mathcal{C}$$

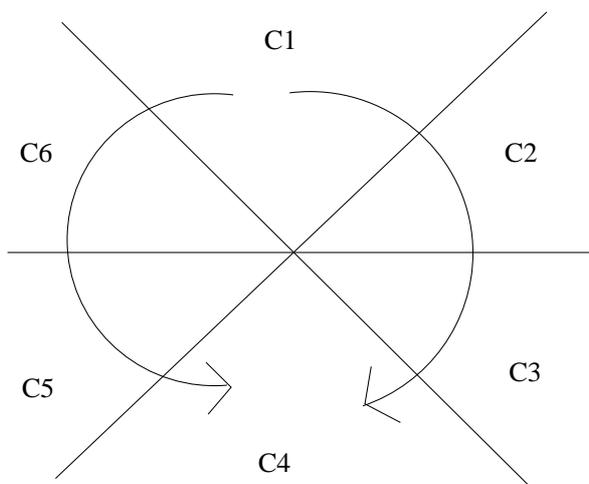
contenant une même facette  $\mathcal{F}$  de codimension 2 dans un ordre cyclique autour de  $\mathcal{F}$ , on obtient

$$R_{\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1} \circ R_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2} \circ \dots \circ R_{\mathcal{C}_{2N-1}, \mathcal{C}_{2N}} = \text{Id.}$$

Dans la situation de la proposition, avec

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathfrak{a}_{\mathbb{R}} \mid a(x) = b(x) = 0\},$$

on a 6 chambre  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_6$  et le chemin de  $\mathcal{C}_1$  à  $\mathcal{C}_4$  peut être parcouru de deux manières différentes :



ce qui donne la relation annoncée. □

## 2.5. Groupes quantiques

On peut construire un groupe quantique, l’algèbre de Maulik-Okounkov  $Y_Q$ , à partir des  $R$ -matrices issues des variétés de Nakajima correspondant au carquois  $Q$ . Il s’agit de l’algèbre de Hopf engendrée par tous les coefficients de ces  $R$ -matrices. Plus précisément, l’algèbre  $Y_Q$  est engendrée par des éléments d’un produit d’algèbres d’endomorphismes de produits tensoriels d’espaces  $H_i(u_i)$ . Ces derniers ont alors une structure de représentation de  $Y_Q$  et les opérateurs  $\mathcal{R}_{i,j}(a)$  sont des morphismes de  $Y_Q$ -modules.

Il s’agit d’une construction « *RTT* à partir de  $R$ -matrices » dans l’esprit de [FRT] : pour  $\mathcal{R}(z)$  la  $R$ -matrice universelle de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  et  $V$  une représentation de cette dernière, on peut considérer les images

$$T(z) \in (\text{End}(V) \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))((z)),$$

$$R(z) = \mathcal{R}_{V,V}(z) \in \text{End}(V \otimes V)((z))$$

de  $\mathcal{R}(z)$ . On a alors dans

$$(\text{End}(V^{\otimes 2}) \otimes \mathcal{U})((z, w))$$

la relation *RTT* :

$$R_{12}(z)T_{13}(zw)T_{23}(w) = T_{23}(w)T_{13}(zw)R_{12}(z)$$

déduite de la relation de Yang-Baxter. Si on suppose que  $R(z)$  est connue, cette relation *RTT* peut être vue comme un système de relations entre éléments de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ . C’est un tel système de relations pour  $Y_Q$  que donne la construction de Maulik-Okounkov.

Dans le cas où  $Q$  est un carquois de type fini, c’est-à-dire avec un diagramme sous-jacent  $\Gamma$  de Dynkin, l’algèbre  $Y_Q$  n’est autre que le Yangian  $Y(\mathfrak{g})$  (voir la remarque 1.8) associé à l’algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  dont le diagramme de Dynkin est  $\Gamma$  (voir [Mc]). L’action de l’algèbre  $Y_Q$  sur les produits tensoriels d’espaces  $H_i(u_i)$  est ainsi donnée par les constructions d’actions géométriques connues antérieurement [N2, N4, Va, VV1], voir la remarque 2.8.

*Remarque 2.12.* — Faisons suite à la remarque 2.6 : une version  $K$ -théorique [O] de la construction présentée dans cette section permet notamment de construire les  $R$ -matrices et les algèbres affines quantiques.

En général, l’algèbre  $Y_Q$  semble être difficile à décrire. Au même moment où Maulik-Okounkov menaient leurs travaux, Schiffmann-Vasserot [SV1, SV2] ont associé à chaque carquois  $Q$  une algèbre, appelée algèbre de Hall cohomologique. On s’attend à ce qu’elle soit essentiellement la même que le Yangian  $Y_Q$ . Cela fait actuellement l’objet de recherches. Ainsi Davison [Dav] a relié ces algèbres de Hall cohomologiques aux algèbres éponymes introduites par Kontsevich-Soibelman.

Le cas particulier d’un carquois  $Q$  avec un sommet et une boucle est remarquable. L’algèbre  $Y_Q$  correspondante peut être décrite par générateurs et relations [MO], il s’agit du Yangian associé à  $\hat{\mathfrak{gl}}_1$ . Dans ce cas, la construction de [MO] est reliée à la construction de représentations d’algèbres de Heisenberg (voir les références dans [Sc, Section 2.4])

et notamment [N1]). Maulik-Okounkov [MO, Part II] et Schiffmann-Vasserot [SV2] ont étudié des applications importantes de ce Yangian  $Y_Q$ . L'image de  $Y_Q$  dans l'algèbre des endomorphismes de la représentation  $H_1^{\otimes r}$  peut être décrite en utilisant la structure d'un « module de Verma » d'une certaine algèbre vertex affine  $\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_r)$  (au sens de Feigin-Frenkel). Cette identification, plus précisément l'identification d'un vecteur distingué de la représentation de  $\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_r)$  (le vecteur de Whittaker) dans la cohomologie équivariante  $H_1^{\otimes r}$ , permet d'exprimer une série formelle associée à la variété de Nakajima (la fonction de partition de Nekrasov) en termes de  $\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_r)$ . Ceci apporte une réponse à une question posée par Alday-Gaiotto-Tachikawa [AGT] dans le cadre de la théorie conforme des champs (la conjecture AGT).

D'autres applications importantes des travaux de Maulik-Okounkov concernant les algèbres de Baxter et la cohomologie quantique seront évoquées dans la section 4.3.

### 3. $R$ -MATRICES ET CATÉGORIFICATIONS

Les  $R$ -matrices sont les outils essentiels de plusieurs travaux récents en théorie des représentations, notamment dans le domaine de la catégorification des algèbres.

Une catégorification d'une algèbre  $\mathcal{A}$  est une catégorie monoïdale  $\mathcal{M}$  munie d'un isomorphisme d'algèbre avec son anneau de Grothendieck

$$\phi : \mathcal{A} \simeq K(\mathcal{M}).$$

Rappelons qu'en tant que groupe,  $K(\mathcal{M})$  est le groupe libre engendré par les classes d'isomorphismes d'objets simples :

$$K(\mathcal{M}) = \bigoplus_{[V] \text{ Classe d'un objet simple dans } \mathcal{M}} \mathbb{Z}[V].$$

Alors tout objet (non nécessairement simple) de  $\mathcal{M}$  a une image dans  $K(\mathcal{M})$  en imposant

$$[V''] = [V] + [V']$$

si  $V''$  est une extension de  $V$  et  $V'$ . On peut alors munir  $K(\mathcal{M})$  d'une structure d'anneau en posant pour des objets  $V$  et  $V'$  de la catégorie  $\mathcal{M}$  :

$$[V \otimes V'] = [V][V'].$$

Dans le cas d'une  $k$ -algèbre  $\mathcal{A}$  sur un corps  $k$ , on peut éventuellement étendre les scalaires en remplaçant  $K(\mathcal{M})$  par  $K(\mathcal{M}) \otimes k$ .

La notion de catégorification peut être précisée lorsque l'algèbre  $\mathcal{A}$  est munie de structures additionnelles. Des structures catégoriques supérieures ont été utilisées à cette fin, on pourra se reporter aux exposés [Ke, Kam].

Deux situations ont été particulièrement étudiées (et parfois simultanément réalisées) : celle des algèbres munies d'une base et celle des algèbres amassées.

### 3.1. Catégorification d’algèbres basées

Lorsque l’algèbre  $\mathcal{A}$  est munie d’une base remarquable  $\mathcal{B}$ , on impose la condition supplémentaire suivante :

**DÉFINITION 3.1.** — *Une catégorification  $\mathcal{M}$  d’une algèbre  $\mathcal{A}$  munie d’une base  $\mathcal{B}$  est une catégorification de  $\mathcal{A}$  qui induit une bijection entre  $\mathcal{B}$  et la base des classes d’objets simples dans  $K(\mathcal{M})$ .*

Ceci nécessite en particulier que les constantes de structure de  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{B}$  soient entières et positives.

C’est par exemple le cas pour l’algèbre enveloppante  $\mathcal{U}(\mathfrak{n})$  d’une sous-algèbre de Lie nilpotente maximale  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$  d’une algèbre de Lie simple que nous supposons simplement lacée. Elle est munie d’une base remarquable (la base canonique), que Lusztig notamment a construite comme base de faisceaux de cohomologie d’intersection en interprétant l’anneau en termes de faisceaux pervers (voir les exposés [Ma, Li]). Cette construction peut être vue comme une catégorification (voir l’exposé [Kam, Section 4.1]).

On peut aussi utiliser une catégorie de représentations d’algèbres KLR (algèbres de Khovanov-Lauda-Rouquier ou algèbres de Hecke-carquois introduites dans [Rou, KL]). Ces algèbres  $\mathbb{Z}$ -graduées  $R_\nu$  dépendent de  $\mathfrak{g}$  et d’un paramètre  $\nu \in \mathbb{N}^n$ . Elles peuvent être définies comme sommes d’espaces de morphismes dans une certaine catégorie monoïdale (voir l’exposé [Kam] et les références qui s’y trouvent). Dans le cas le plus simple  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ , il s’agit d’algèbres de nil Hecke affines. D’après Khovanov-Lauda [KL], Rouquier [Rou] et Varagnolo-Vasserot [VV2], on obtient une catégorification par une catégorie de représentations d’algèbres KLR

$$\bigoplus_{\nu \in \mathbb{N}^n} R_\nu\text{-Mod},$$

le produit de la catégorie étant obtenu à partir d’un produit de convolution  $\circ$ . Plus précisément, soit

$$\mathcal{U}_q(\mathfrak{n}) \subset \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$$

sous-algèbre correspondant à  $\mathfrak{n}$  et munie d’une base canonique relevant celle de  $\mathcal{U}(\mathfrak{n})$ . La catégorie des modules gradués est une catégorification de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n})$  munie de la base  $\mathcal{B}$  duale de la base canonique pour le produit scalaire naturel de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n})$  (la base canonique correspond quant à elle aux modules projectifs indécomposables). On utilisera le même symbole  $\mathcal{B}$  pour la base canonique duale de  $\mathbb{C}[N]$ , anneau des coordonnées d’un sous-groupe unipotent maximal  $N$  d’un groupe de Lie simple complexe  $G$  d’algèbre de Lie  $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{n}$ . Cet anneau  $\mathbb{C}[N]$  peut en effet être vu comme une spécialisation de  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n})$  (différente de la spécialisation  $\mathcal{U}(\mathfrak{n})$ ).

On peut aussi utiliser une catégorie de représentations de dimension finie d’algèbres affines quantiques  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  et faire apparaître les relations de mutations à partir de  $R$ -matrices normalisées. Comme illustration, considérons le cas  $G = SL_3$ . Alors  $N$  est

le groupe des matrices  $\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et on a l'anneau des fonctions polynomiales en les coordonnées  $x, y, z$  :

$$\mathbb{C}[N] = \mathbb{C}[x, y, z].$$

C'est un cas bien connu pour lequel la base canonique duale peut être calculée explicitement :

$$\mathcal{B} = \{x^a z^b (xy - z)^c | a, b, c \in \mathbb{N}\} \cup \{y^a z^b (xy - z)^c | a, b, c \in \mathbb{N}\}.$$

On a une catégorification de  $\mathbb{C}[N]$  munie de sa base  $\mathcal{B}$  : la catégorie  $\mathcal{C}_N$  des représentations de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{sl}}_3)$  dont l'anneau de Grothendieck est engendré par les trois représentations fondamentales

$$[V_1(1)], [V_1(q^2)], [V_2(q)].$$

Elles correspondent respectivement à  $x, y$  et  $z$ . La catégorie  $\mathcal{C}_N$  contient quatre modules simples premiers, c'est-à-dire qui ne peuvent pas être factorisés en un produit tensoriel de représentations non triviales : les trois représentations fondamentales ci-dessus et une autre représentation  $W$  qui correspond à  $(xy - z)$  (ce module  $W$  est un module dit de Kirillov-Reshetikhin). Cela se traduit par la relation dans l'anneau de Grothendieck

$$[W] = [V_1(1)][V_1(q^2)] - [V_2(q)],$$

qui est déduite de la suite exacte associée à la  $R$ -matrice normalisée  $\mathcal{R}_{V_1(1), V_1(q^2)}^{norm}$

$$(9) \quad 0 \rightarrow W \rightarrow V_1(1) \otimes V_1(q^2) \rightarrow V_2(q) \rightarrow 0.$$

Ceci peut être vu comme un cas particulier des résultats dans [KL, Rou, VV2] et [HL1].

### 3.2. Catégorification d'algèbres amassées

On pourra trouver dans l'exposé [Ke] et dans [Le2] une introduction aux algèbres amassées (ou algèbres cluster). A un carquois  $Q$  à  $r$ -sommets Fomin-Zelevinsky [FZ1] associent une algèbre  $\mathcal{A}(Q)$ .

Plus précisément,  $\mathcal{A}(Q)$  est définie comme une sous-algèbre d'un corps de fractions

$$\mathcal{A}(Q) \subset \mathbb{Q}(X_1, \dots, X_r).$$

Un amas est un  $r + 1$ -uplet

$$(z_1, \dots, z_r, Q')$$

avec  $z_1, \dots, z_r$  éléments de ce corps de fractions et  $Q'$  un carquois à  $r$  sommets. Par définition,  $\mathcal{A}(Q)$  est la sous-algèbre engendrée par les variables d'amas de tous les amas obtenus par des mutations itérées à partir de l'amas initial  $(X_1, \dots, X_r, Q)$ . Chaque amas peut être muté dans une direction  $i$  avec  $1 \leq i \leq n$  avec  $n \leq r$  fixé. Dans un nouvel amas muté, la nouvelle variable  $z'_i$  est obtenue par une relation de mutation de Fomin-Zelevinsky :

$$z'_i z_i = \prod_{i \rightarrow j \text{ dans } Q'} z_j + \prod_{j \rightarrow i \text{ dans } Q'} z_j.$$

Les variables  $z_j$  ( $j \neq i$ ) ne sont pas modifiées, mais le carquois  $Q'$  est remplacé par le carquois muté  $\mu_i(Q')$  obtenu comme suit : pour tout sous-carquois  $j \rightarrow i \rightarrow k$ , on ajoute une flèche  $j \rightarrow k$ , puis on renverse toutes les flèches de source ou de but  $i$  et enfin on supprime les flèches d'un ensemble maximal de 2-cycles disjoints deux à deux.

Les variables  $X_{n+1}, \dots, X_r$  sont dans tous les amas et sont dites variables gelées. Un monôme d'amas est un monôme en des variables d'amas du même amas.

Par exemple, pour  $Q$  le carquois

$$Q : 3 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2$$

avec deux variables gelées d'indices 2 et 3, l'algèbre amassée

$$\mathcal{A}(Q) \subset \mathbb{Q}(X_1, X_2, X_3)$$

possède deux amas

$$(X_1, X_2, X_3) \text{ et } (X_1^{-1}(X_2 + X_3), X_2, X_3)$$

et ainsi quatre variables d'amas. Il y a une relation de mutation :

$$(10) \quad X_1^* X_1 = X_2 + X_3.$$

Un objet d'une catégorie monoïdale est dit réel si son carré tensoriel est simple.

**DÉFINITION 3.2.** — *Une catégorification d'une algèbre amassée  $\mathcal{A}$  est une catégorification  $\mathcal{M}$  de l'algèbre  $\mathcal{A}$  telle que l'isomorphisme d'anneau*

$$\phi : \mathcal{A} \simeq K(\mathcal{M})$$

*envoie les monômes d'amas de  $\mathcal{A}$  vers des classes de modules simples réels.*

*Remarque 3.3.* — (i) Grâce à une propriété de factorialité des algèbres amassées [GLS2], la définition implique que les variables d'amas de  $\mathcal{A}$  sont envoyées vers des classes de modules simples premiers et réels.

(ii) Il existe une notion de catégorification forte pour laquelle on impose que  $\phi$  définisse une bijection entre les monômes d'amas et les classes d'objets simples réels.

(iii) Une notion de catégorification additive des algèbres amassées à l'aide de catégories 2-Calabi-Yau a également été intensivement étudiée, voir l'exposé [Ke, Section 4.1] pour une présentation de ce sujet.

Par exemple, la catégorie  $\mathcal{C}_N$  de représentations de  $\mathcal{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$  dans la section précédente est une catégorification de l'algèbre amassée  $\mathcal{A}(Q)$  dans l'exemple ci-dessus. Il existe en effet un unique isomorphisme

$$\phi : \mathcal{A}(Q) \simeq K(\mathcal{C}_N),$$

tel que

$$\phi(X_1) = [V_1(1)], \phi(X_2) = [V_2(q)], \phi(X_3) = [W], \phi(X_1^*) = [V_1(q^2)].$$

Alors  $\phi$  envoie les variables d'amas sur des classes d'objets simples (on a même ici une catégorification au sens de la remarque 3.3, (ii)). La relation de mutation (10) est ici donnée par la suite exacte (9) issue de la  $R$ -matrice normalisée  $\mathcal{R}_{V_1(1), V_1(q^2)}^{norm}$ .

Divers exemples de catégorification d'algèbres amassées ont été établis d'abord en termes d'algèbres affines quantiques [HL1], de faisceaux pervers sur des variétés de Nakajima [N5, KQ, Q] et d'algèbres KLR, sur lesquelles nous allons revenir.

Berenstein-Zelevinsky [BZ] ont donné une notion d'algèbre amassée quantique. Ce sont des sous-algèbres de tores quantiques qui dépendent d'un paramètre  $q \in \mathbb{C}^*$ . La spécialisation à  $q = 1$  est une algèbre amassée ordinaire.

Geiss-Leclerc-Schröer [GLS1] ont établi un exemple fondamental :  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{n})$  a une structure naturelle d'algèbre amassée quantique, de même que certaines sous-algèbres  $A_q(\mathfrak{n}(w))$  qui dépendent d'un élément  $w$  du groupe de Weyl de  $\mathfrak{g}$  (elles peuvent être vues comme des déformations de  $\mathbb{C}[N(w)]$  pour un sous-groupe  $N(w)$  de  $N$ ).  $A_q(\mathfrak{n}(w))$  peut être défini comme l'espace engendré par l'image dans  $A_q(\mathfrak{n}) \simeq \mathcal{U}_q(\mathfrak{n})$  de produits de vecteurs de racines définis par Lusztig. Pour  $w = w_0$  l'élément de plus grande longueur, on retrouve  $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(w_0)$ . La structure d'algèbre amassée quantique sur  $A_q(\mathfrak{n}(w))$  est compatible avec la structure d'algèbre amassée de  $\mathbb{C}[N(w)]$  (voir [BFZ]) et en particulier de  $\mathbb{C}[N]$ .

### 3.3. $R$ -matrices pour les algèbres KLR et conjecture de Fomin-Zelevinsky

Kang-Kashiwara-Kim-Oh ont établi le théorème de catégorification suivant.

**THÉORÈME 3.4.** — [KKKO3] *L'algèbre amassée  $\mathbb{C}[N(w)]$  admet une catégorification.*

**PREUVE** (esquisse) — Il s'agit d'une catégorie de représentations d'algèbres KLR comme dans les résultats mentionnés dans la section 3.1. Les résultats de catégorification dans [KL, Rou, VV2] ainsi que le théorème de Geiss-Leclerc-Schröer sur la structure d'algèbre amassée quantique sont cruciaux. La preuve repose en effet sur les structures quantiques. Une notion adéquate de catégorification d'algèbre amassée quantique est introduite et utilisée dans [KKKO3].

Mais un autre point constitue le cœur de la démonstration : la catégorification des relations de mutations de Fomin-Zelevinsky en termes de suites exactes issues de  $R$ -matrices normalisées. Par exemple, nous avons vu dans l'équation (9) une suite exacte construite à partir d'une  $R$ -matrice normalisée issue d'une algèbre affine quantique. Il s'agit justement d'une relation de mutation dans l'algèbre amassée associée. Dans leur démonstration, Kang-Kashiwara-Kim-Oh utilisent de manière systématique des  $R$ -matrices pour des représentations d'algèbres KLR pour catégorifier les relations de mutations.

Par exemple, la suite exacte correspondant à l'exemple (9) est de la forme

$$0 \rightarrow L(21) \rightarrow L(1) \circ L(2) \rightarrow L(12) \rightarrow 0$$

avec  $L(1)$  et  $L(2)$  des modules simples de dimension 1 (voir [KR] pour des compléments sur les représentations des algèbres KLR). Ces modules satisfont

$$L(12) \subset L(2) \circ L(1).$$

Bien qu'il n'existe pas de construction connue de  $R$ -matrice universelle pour les algèbres KLR, pour  $V$  et  $W$  des représentations simples respectivement de  $R_\beta$  et  $R_{\beta'}$ , il existe un morphisme non trivial de  $R_{\beta+\beta'}$ -modules

$$\mathcal{R}_{V,W}^{norm} : V \circ W \rightarrow W \circ V.$$

Sa construction repose d'abord sur l'existence d'éléments d'entrelacement dans l'algèbre KLR qui permettent de définir un opérateur rationnel

$$V \circ W \rightarrow (W \circ V)(z).$$

La fin de la construction est analogue au cas des algèbres affines quantiques exposé dans la section 1.3 : il faut normaliser puis spécialiser. Les  $R$ -matrices ainsi construites satisfont bien l'équation de Yang-Baxter.  $\square$

Du théorème 3.4 résulte la preuve d'une conjecture générale de Fomin-Zelevinsky [FZ1], précisée dans ce cas par Kimura [Ki] et Geiss-Leclerc-Schröer [GLS1].

**COROLLAIRE 3.5.** — [KKKO3] *Les monômes d'amas de  $\mathbb{C}[N(w)]$  sont des éléments de la base canonique duale.*

*Remarque 3.6.* — (i) Le cas  $w = w_0$  constitue l'une des motivations historiques de la théorie de Fomin-Zelevinsky : développer une compréhension algorithmique et récursive des bases canoniques. Il s'agit d'une avancée importante dans la compréhension de ces bases.

(ii) Qin [Q] a proposé une autre démonstration pour ce résultat.

(iii) Comme mentionné dans l'esquisse de preuve, les résultats évoqués ci-dessus ont des analogues quantiques lorsqu'on remplace les algèbres et algèbres amassées par leurs analogues quantiques et les modules des algèbres KLR par leurs versions graduées. C'est plus qu'une généralisation car la preuve de Kang-Kashiwara-Kim-Oh utilise de manière cruciale la structure quantique des algèbres amassées et la graduation des représentations des algèbres KLR.

### 3.4. Compléments : résultats généraux issus des opérateurs d'entrelacement

Plusieurs résultats en théorie des représentations, qui ne font pas apparaître de  $R$ -matrices dans leur énoncé, sont obtenus en s'appuyant de manière cruciale sur de tels opérateurs.

On a notamment le résultat général suivant (conjecture formulée par Leclerc [Le1]). Pour l'énoncer, on rappelle que la tête (respectivement le socle) d'un module de dimension finie est son plus grand quotient (resp. sous-module) semi-simple.

**THÉORÈME 3.7.** — [KKKO1] *Soient  $M, N$  des modules simples de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  avec  $M$  réel. Alors la tête et le socle de  $M \otimes N$  sont simples.*

*Remarque 3.8.* — Un énoncé analogue est valable pour les représentations des algèbres KLR. Il n'est pas surprenant de retrouver des résultats analogues pour les algèbres affines quantiques et les algèbre KLR : des résultats de Kang-Kashiwara-Kim [KKK] donnent des équivalences de catégories entre des catégories de représentations correspondantes. Il s'agit d'une dualité de Schur-Weyl généralisée. La construction de cette dualité repose sur des  $R$ -matrices normalisées pour les algèbres affines quantiques : leur pôles dessinent un carquois qui permet de définir l'algèbre KLR correspondante.

*Remarque 3.9.* — Récemment la preuve de cet énoncé a été adaptée au cas des groupes linéaires  $p$ -adiques [LM].

*Remarque 3.10.* — Dans le même esprit, Kashiwara [Kas] a montré que certains produits tensoriels de représentations fondamentales sont cycliques engendrés par un produit tensoriel de vecteurs de plus haut poids. Ce résultat a aussi été établi par Chari et Varagnolo-Vasserot par d'autres méthodes pour certaines algèbres affines quantiques.

## 4. $R$ -MATRICES ET INTÉGRABILITÉ QUANTIQUE

Cette dernière partie de l'exposé revient sur l'étude des systèmes intégrables quantiques, qui constitue la motivation originelle des  $R$ -matrices. Elle n'est pas sans liens directs avec les travaux présentés dans les deux parties précédentes. En particulier, l'algèbre de Baxter, sous-algèbre commutative d'un groupe quantique associée à un tel système quantique, peut être interprétée en termes de cohomologie quantique dans les travaux de Maulik-Okounkov.

### 4.1. Matrices de transfert et intégrabilité

Soit  $V$  une représentation de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  qu'on appellera « espace auxiliaire ». La matrice de transfert associée est :

$$(11) \quad \mathcal{T}_V(z) = ((\mathrm{Tr}_V \circ \rho_V) \otimes \mathrm{id})(\mathcal{R}(z)) \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})[[z]],$$

où  $\mathrm{Tr}_V$  est la trace sur l'espace  $V$  et  $\rho_V$  le morphisme de représentation de  $V$ .

On a le résultat fondamental suivant (dit d'intégrabilité).

**PROPOSITION 4.1.** — *Les matrices de transfert commutent, c'est-à-dire que pour  $V$  et  $V'$  représentations de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  on a*

$$\mathcal{T}_V(z)\mathcal{T}_{V'}(z') = \mathcal{T}_{V'}(z')\mathcal{T}_V(z) \text{ dans } \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})[[z, z']].$$

**PREUVE (esquisse)** — On projette l'équation de Yang-Baxter dans

$$(\mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(V') \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))[[z, z']].$$

On obtient une relation de conjugaison qui donne le résultat en prenant la trace  $\mathrm{Tr}_{(V \otimes V')} \otimes \mathrm{Id}$ . □

Considérons les coefficients des matrices de transfert  $\mathcal{T}_V[N] \in \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  définis par

$$\mathcal{T}_V(z) = \sum_{N \geq 0} z^N \mathcal{T}_V[N].$$

La dernière proposition signifie que tous ces coefficients commutent.

Les propriétés de la trace impliquent que l'application  $V \mapsto \mathcal{T}_V(z)$  est compatible avec les suites exactes. De plus pour  $V$  et  $V'$  dans la catégorie  $\mathcal{C}$  des représentations de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ , les propriétés de  $\mathcal{R}(z)$  (les formules (3)) impliquent

$$\mathcal{T}_{V \otimes V'}(z) = \mathcal{T}_V(z) \mathcal{T}_{V'}(z').$$

On obtient ainsi un morphisme d'anneau

$$(12) \quad \mathcal{T}(z) : K(\mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))[[z]].$$

Ce morphisme est de plus injectif, ce qui implique, d'après Frenkel-Reshetikhin [FR1, Section 3.3], la commutativité<sup>(6)</sup> de l'anneau de Grothendieck  $K(\mathcal{C})$ .

*Remarque 4.2.* — Nous serons amenés à utiliser un espace auxiliaire  $V$  de dimension infinie mais avec une graduation naturelle  $V = \bigoplus_{\omega=(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{Z}^n} V_\omega$  par des espaces de poids de dimension finie ( $n$  est le rang de  $\mathfrak{g}$ ). Les traces sont alors tordues pour cette graduation : la trace sur  $V$  est remplacée par  $\sum_{\omega \in \mathbb{Z}^n} (u_1^{\omega_1} \dots u_n^{\omega_n}) \text{Tr}_{V_\omega}$  pour des variables formelles  $u_i$  avec  $i \in I = \{1, \dots, n\}$ .

*Remarque 4.3.* — Les constructions de cette sous-section s'étendent aux Yangians.

## 4.2. Systèmes quantiques

Les matrices de transfert permettent de construire divers systèmes quantiques, c'est-à-dire un espace  $W$  (dit « espace quantique ») sur lequel chaque matrice de transfert  $\mathcal{T}_V(z)$  définit un opérateur (les scalaires étant étendus à  $\mathbb{C}[[z]]$ ). Les coefficients  $\mathcal{T}_V[N]$  des matrices de transfert agissent sur  $W$  en une grande famille commutative d'opérateurs. Il s'agit alors d'étudier le spectre du système quantique, c'est-à-dire les valeurs propres des matrices de transfert sur  $W$ .

Le cas où  $W$  est un produit tensoriel de représentations simples de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  en offre un exemple remarquable. En effet pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ , pour  $V = V_1$  une représentation fondamentale de dimension 2 et pour l'espace des états  $W$  un produit tensoriel de représentations fondamentales de dimension 2, on retrouve le cas particulier historique du modèle  $XXZ$  (voir la section 1.1). L'image de l'opérateur  $\mathcal{T}_{V_1}(z)$  dans  $\text{End}(W)[[z]]$  est la matrice de transfert définie par Baxter [Ba], qui a montré<sup>(7)</sup> que les

6. Ainsi les multiplicités de Jordan-Hölder des modules simples sont les mêmes dans  $V \otimes V'$  et dans  $V' \otimes V$  mais ces modules ne sont pas isomorphes en général. Par exemple, pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ ,  $V_1(q^2) \otimes V_1(1)$  et  $V_1(1) \otimes V_1(q^2)$  ne le sont pas.

7. Baxter a introduit la méthode féconde des « Q-opérateurs », qui lui a également permis de résoudre le modèle à 8 sommets, plus complexe. Le modèle à 6 sommets avait aussi été résolu par d'autres méthodes, notamment dans les travaux de Lieb et Sutherland (1967).

valeurs propres ont une forme remarquable, donnée par la relation de Baxter :

$$(13) \quad \lambda_j = D(z)q^{\deg(Q_j)} \frac{Q_j(zq^{-2})}{Q_j(z)} + A(z)q^{-\deg(Q_j)} \frac{Q_j(zq^2)}{Q_j(z)},$$

où  $Q_j$  est un polynôme (dit de Baxter) et  $A(z)$ ,  $D(z)$  sont des fonctions universelles au sens où elles ne dépendent pas de la valeur propre  $\lambda_j$ .

### 4.3. Algèbres de Baxter et cohomologie quantique

DÉFINITION 4.4. — *La sous-algèbre commutative de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  engendrée par les coefficients  $\mathcal{T}_V[N]$  de toutes les matrices de transfert est appelée algèbre de Baxter.*

L'interprétation d'algèbres de Baxter en termes de cohomologie quantique constitue une application importante des travaux [MO, Section 7].

On renvoie à l'exposé [A] pour une présentation générale de la cohomologie quantique. L'idée, qui remonte à Vafa et Witten, est de remplacer la structure d'anneau de la cohomologie d'une variété algébrique complexe (le cup produit ordinaire) par une nouvelle structure d'anneau avec des paramètres de déformations  $q_1, q_2, \dots, q_r$  où  $r$  est le rang de  $H_2(X, \mathbb{Z})$ . Pour  $\alpha, \beta \in H^\bullet(X)$ , le produit de cohomologie quantique est une série formelle

$$\alpha * \beta = \sum_{m \in \mathbb{Z}^r} (\alpha * \beta)_m q^m.$$

Les coefficients  $(\alpha * \beta)_m$  sont définis en utilisant la théorie des invariants de Gromov-Witten. On obtient un anneau unitaire commutatif gradué (la propriété d'associativité est remarquable) et  $(\alpha * \beta)_0$  est le cup produit ordinaire.

Une construction analogue peut être faite en cohomologie équivariante. Dans le cas d'une variété de Nakajima  $\mathcal{M}(\mathbf{w})$  associée à un carquois  $Q$  (voir la section 2), pour chaque choix de paramètres  $q_1, \dots, q_r$ , on obtient une algèbre commutative d'opérateurs sur  $W = H_T^\bullet(\mathcal{M}(\mathbf{w}))$  donnés par les opérateurs de multiplication en cohomologie quantique.

Par ailleurs, en reprenant les constructions présentées dans la section 2,  $W$  est une représentation de l'algèbre de Maulik-Okounkov  $Y_Q$  et on a l'action sur  $W$  de la sous-algèbre de Baxter de  $Y_Q$  qui donne une algèbre commutative d'opérateurs sur  $W$ . Mais la définition des matrices de transfert peut être modifiée en remplaçant la trace usuelle  $\text{Tr} \otimes \text{Id}$  par

$$(\text{Tr} \circ g) \otimes \text{Id}$$

pour certains opérateurs  $g$  sur l'espace auxiliaire  $V$ . Maulik-Okounkov considèrent ainsi une famille d'algèbres commutatives (de Baxter) agissant sur  $W$ , actions qu'ils identifient avec les opérateurs de multiplication en cohomologie quantique.

Il s'agit d'une réalisation des prédictions faites dans les travaux pionniers [NS1, NS2].

La théorie de la cohomologie quantique s'accompagne d'une connection naturelle qui rend compte de la dépendance du produit de cohomologie quantique en les paramètres  $q_1, \dots, q_r$ . Elle est aussi liée [MO] à une structure importante issue des  $R$ -matrices, la connection de Knizhnik-Zamolodchikov quantique au sens de [FR2].

#### 4.4. $Q$ -opérateurs

Considérons la sous-algèbre de Borel (au sens de la présentation de Drinfeld-Jimbo)

$$\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}}) \subset \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}).$$

On peut définir des matrices de transfert associées à des représentations de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}})$  car

$$\mathcal{R}(z) \in (\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}}) \hat{\otimes} \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}))[[z]].$$

Ainsi, dans le but d'étudier les formules de Baxter pour le modèle  $XXZ$ , Bazhanov-Lukyanov-Zamolodchikov [BLZ1] ont construit une famille de représentations simples de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}}) \subset \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$  de dimension infinie notées  $L_a$  ( $a \in \mathbb{C}^*$ ), que nous appellerons « représentations fondamentales » dans la suite de l'exposé. Les matrices de transfert correspondant aux représentations fondamentales sont appelées  $Q$ -opérateurs de Baxter (voir la note de bas de page 7).

En utilisant la présentation de Drinfeld de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  (voir section 1), on peut munir  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}})$  elle-même d'une décomposition triangulaire, c'est-à-dire d'un isomorphisme linéaire

$$\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}}) \simeq \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}})^- \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}})^0 \otimes \mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}})^+$$

avec  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}})^-$ ,  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}})^0$ ,  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}})^+$  des sous-algèbres naturelles de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}})$ . Les représentations fondamentales sont alors de plus haut poids pour cette décomposition triangulaire.

Pour une représentation  $V$  simple de dimension 2 de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ , on a

$$(14) \quad 0 \rightarrow [\omega] \otimes L_{q^{-2}} \rightarrow V \otimes L_1 \rightarrow [-\omega] \otimes L_{q^2} \rightarrow 0,$$

suite exacte non-scindée, avec  $[\pm\omega]$  des représentations de dimension 1 inversibles. En prenant les matrices de transfert, on retrouve la formule (13).

*Remarque 4.5.* — Pour le modèle à 8 sommets, une construction des  $Q$ -opérateurs en termes de représentations des groupes quantiques elliptiques a été découverte très récemment par Felder-Zhang [FZ2].

#### 4.5. Approche de Frenkel-Reshetikhin

Frenkel-Reshetikhin [FR1] ont proposé<sup>(8)</sup> une nouvelle approche dans le but de généraliser les formules de Baxter. À cette fin, ils ont introduit le  $q$ -caractère  $\chi_q(V)$  d'une représentation  $V$  de dimension finie de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ . Il s'agit d'un polynôme de Laurent en des indéterminées  $Y_{i,a}$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $a \in \mathbb{C}^*$ )

$$\chi_q(V) \in \mathbb{Z}[Y_{i,a}^{\pm 1}]_{1 \leq i \leq n, a \in \mathbb{C}^*}.$$

La définition de  $\chi_q(V)$  repose sur une décomposition de  $V$  en sous-espaces de Jordan (pour une famille commutative d'opérateurs sur  $W$ , obtenus à partir de la réalisation de Drinfeld). Les coefficients de  $\chi_q(V)$  sont ainsi positifs et leur somme est  $\dim(V)$ .

---

8. Une conjecture analogue avait été formulée dans des cas particuliers par Reshetikhin, Bazhanov-Reshetikhin et Kuniba-Suzuki.

Par exemple, pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$  et  $V = V_1$  représentation fondamentale de dimension 2,

$$(15) \quad \chi_q(V) = Y_{1,q^{-1}} + Y_{1,q}^{-1}.$$

Pour  $1 \leq i \leq n$ , on pose  $q_i = q^{r_i}$  avec  $r_i$  la longueur de la racine simple correspondante.

CONJECTURE 4.6. — [FR1, Section 6.1] *Pour une représentation de dimension finie  $V$ , les valeurs propres  $\lambda_j$  de  $\mathcal{T}_V(z)$  sur un produit tensoriel  $W$  de représentations simples sont obtenues de la manière suivante : on remplace dans  $\chi_q(V)$  chaque variable  $Y_{i,a}$  par*

$$F_i(az)q^{\deg(Q_{i,j})} \frac{Q_{i,j}(zaq_i^{-1})}{Q_{i,j}(zaq_i)},$$

où  $Q_{i,j}(z)$  est un polynôme et  $F_i(z)$  ne dépend pas de la valeur propre  $\lambda_j$ .

Les  $Q_{i,j}(z)$  sont les polynômes de Baxter généralisés. Il s'agit d'une généralisation des résultats de Baxter car par cette procédure la formule (15) donne bien la formule (13). Dans le cas général, la formule de Baxter généralisée donnant les  $\lambda_j$  a  $\dim(V)$  termes.

L'énoncé de la conjecture 4.6 avec des traces déformées (comme dans la remarque 4.2) est démontrée dans [FH1].

PREUVE (esquisse) — L'idée est d'interpréter les  $Q_i$  comme des valeurs propres de nouvelles matrices de transfert, construites à partir de représentations préfondamentales  $L_{i,a}$  (où  $1 \leq i \leq n$  et  $a \in \mathbb{C}^*$ ) de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}})$  généralisant [HJ] les représentations de [BLZ1] évoquées ci-dessus. On montre qu'à un facteur scalaire universel  $F_i(z)$  près, la matrice de transfert associée  $\mathcal{T}_i(z)$  agit sur l'espace des états  $W$  par un opérateur polynomial. Il faut enfin montrer que les valeurs propres de  $\mathcal{T}_V(z)$  s'expriment à l'aide des valeurs propres des  $\mathcal{T}_i(z)$  selon le  $q$ -caractère de  $V$ . Pour ce faire, on utilise une catégorie  $\mathcal{O}$  de représentations de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{b}})$  qui contient les représentations de dimension finie ainsi que les représentations préfondamentales. Considérons son anneau de Grothendieck<sup>(9)</sup>  $K(\mathcal{O})$ . En remplaçant dans  $\chi_q(V)$  chaque variable  $Y_{i,a}$  par<sup>(10)</sup>  $[\omega_i] \frac{[L_{i,aq^{-1}}]}{[L_{i,aq}]}$  et en remplaçant  $\chi_q(V)$  par  $[V]$ , on obtient une relation dans le corps des fractions de  $K(\mathcal{O})$  (on comparera par exemple la formule (15) avec la suite exacte (14)). Maintenant on peut étendre l'application matrice de transfert (12) à  $K(\mathcal{O})$ . Ainsi les relations dans  $K(\mathcal{O})$  impliquent les relations voulues entre les matrices de transfert et leurs valeurs propres.  $\square$

#### 4.6. Equations de l'Ansatz de Bethe

Il est assez aisé d'écrire une formule explicite pour la fonction scalaire  $F_i(z)$ . Il est beaucoup plus délicat d'obtenir des informations sur la partie polynomiale  $(F_i(z))^{-1}\mathcal{T}_i(z)$ . Ses valeurs propres sont les polynômes de Baxter  $(Q_i(z))_{i \in I}$ . Les équations de l'Ansatz de Bethe entre les racines de ces polynômes ont été conjecturées (voir [Re, FR1]) :

9. Les représentations dans la catégorie  $\mathcal{O}$  n'étant pas toutes de longueur finie, la notion de multiplicité d'un module simple dans un module est définie comme dans [Kac], voir [HL2, Section 3.2].

10. Ici  $[\omega_i]$  est la classe d'une représentation de dimension 1.

$$(16) \quad v_i^{-1} \prod_{j \in I} \frac{Q_j(wq^{B_{ij}})}{Q_j(wq^{-B_{ij}})} = -1,$$

pour  $i \in I$  et  $w$  une racine de  $Q_i$ . Ici les  $B_{i,j} = (\alpha_i, \alpha_j)$  sont les coefficients de la matrice de Cartan symétrisée et  $v_i = \prod_{j \in I} u_i^{C_{j,i}}$ .

*Remarque 4.7.* — Les équations (16) ont été établies récemment avec des conditions de généricité [FH2] grâce à des relations dans  $K(\mathcal{O})$  appelées  $Q\tilde{Q}$ -systèmes (découvertes [MRV] dans un contexte dual de Langlands, voir ci-dessous), puis sans conditions de généricité [FJMM], notamment grâce à des versions à deux termes des formules de Baxter (les  $QQ^*$ -systèmes de [HL2] qui apparaissent naturellement comme des relations de mutations dans l'esprit des résultats de la section 3).

*Remarque 4.8.* — Très récemment [PSZ], les opérateurs de Baxter pour  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$  ont été réalisés dans le cadre de la théorie de Maulik-Okounkov (section 2), sous la forme de multiplications en cohomologie (resp.  $K$ -théorie) quantique (voir la section 4.3). Les équations de l'Ansatz de Bethe (16) apparaissent alors naturellement dans ce contexte.

#### 4.7. Autres systèmes quantiques et dualité de Langlands

La correspondance ODE/IM (pour « Ordinary Differential Equation » et « Integrable model ») découverte dans [DT, BLZ2] relie de façon surprenante d'une part des fonctions associées à des opérateurs différentiels de Schrödinger et d'autre part des valeurs propres de systèmes quantiques dits « de KdV quantiques ». Ces derniers sont construits [BLZ2] à l'aide des matrices de transfert  $\mathcal{T}_V(z)$  agissant non plus sur une représentation de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  mais sur des espaces de Fock d'une algèbre de Heisenberg quantique. Les opérateurs différentiels sont quant à eux de la forme  $-\partial^2 + x^{2M} + \frac{\ell(\ell-1)}{x^2}$  avec  $M > 0$  entier et  $\ell \in \mathbb{C}$ . Les fonctions associées sont les déterminants spectraux définis comme des coefficients de changements de base entre des familles naturelles de solutions. Il est remarquable qu'elles satisfassent effectivement la relation de Baxter (13), alors qu'elles proviennent *a priori* d'un contexte très différent.

Feigin-Frenkel [FF] ont envisagé cette correspondance comme une manifestation d'une dualité de Langlands. Les opérateurs différentiels de Schrödinger sont généralisés par les « opers affines », des systèmes différentiels associés à l'algèbre de Lie duale de Langlands de  $\mathfrak{g}$ . Même si les conjectures énoncées dans ce dernier article sont encore largement ouvertes, il s'agit d'une source d'inspiration féconde dans l'étude des représentations de  $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$  (voir par exemple les travaux [MRV] évoqués dans la remarque 4.7).

#### Remerciements

Je remercie chaleureusement Caroline Gruson, Bernard Leclerc, Hiraku Nakajima, Andrei Okounkov, Marc Rosso, Olivier Schiffmann, Eric Vasserot et Michèle Vergne

pour la relecture de ce texte et leurs précieux conseils, ainsi que Masaki Kashiwara, Myungho Kim et Gus Schrader, dont les mini-cours récents m’ont été très utiles. Merci aussi aux participants de la conférence « Geometry and Representation Theory » à l’Institut Erwin Schrödinger de Vienne, où cet exposé a pu être éprouvé.

Alors que ce texte était en cours de rédaction, Maulik-Okounkov ont diffusé une nouvelle version de leur livre [MO], à laquelle nous faisons référence.

## RÉFÉRENCES

- [A] M. AUDIN – *Cohomologie quantique*, Sémin. Bourbaki 1995/96, Exp. n° 806, Astérisque **241** (1997), 29–58.
- [AGT] L. ALDAY, D. GAIOTTO et Y. TACHIKAWA – *Liouville correlation functions from four-dimensional gauge theories*, Lett. Math. Phys. **91** (2010), no. 2, 167–197.
- [Ba] R.J. BAXTER – *Partition Function of the Eight-Vertex Lattice Model*, Ann. Phys. **70** (1971), 193–228.
- [Be] J. BECK – *Braid group action and quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **165** (1994), 555–568.
- [Bo] A. BOREL – *Seminar on Transformation Groups*, Annals of Math Studies **46**, Princeton University Press (1960)
- [BFZ] A. BERENSTEIN, S. FOMIN et A. ZELEVINSKY – *Cluster algebras III : Upper bounds and double Bruhat cells*, Duke Math. J. **126** (2005), 1–52.
- [BLZ1] V. BAZHANOV, S. LUKYANOV et A. ZAMOLODCHIKOV – *Integrable structure of conformal field theory. II. Q-operator and DDV equation*, Comm. Math. Phys. **190** (1997), 247–278.
- [BLZ2] V. BAZHANOV, S. LUKYANOV et A. ZAMOLODCHIKOV – *Spectral determinants for Schrödinger equation and Q-operators of conformal field theory*, J. Stat. Phys. **102** (2001) 567–576.
- [BZ] A. BERENSTEIN et A. ZELEVINSKY – *Quantum cluster algebras*, Adv. Math. **195** (2005), no. 2, 405–455.
- [CG] N. CHRISS et V. GINZBURG – *Representation theory and complex geometry*, Modern Birkhauser Classics, Birkhuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010. Reprint of the 1997 edition.
- [CP] V. CHARI et A. PRESSLEY – *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [Dam] I. DAMIANI – *From the Drinfeld realization to the Drinfeld-Jimbo presentation of affine quantum algebras : Injectivity*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **51** (2015), 131-171

- [Dav] B. DAVISON – *The critical CoHA of a quiver with potential*, Prépublication arXiv :1311.7172.
- [Dr] V. DRINFELD – *A new realization of Yangians and of quantum affine algebras*, *Soviet Math. Dokl.* **36** (1988), 212–216.
- [DT] P. DOREY et R. TATEO – *Anharmonic oscillators, the thermodynamic Bethe ansatz, and nonlinear integral equations*, *J. Phys.* **A32** (1999) 419–425.
- [EFK] P. ETINGOF, I. FRENKEL et A. KIRILLOV – *Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations*, *Mathematical Surveys and Monographs* 58. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998
- [F] E. FRENKEL – *Vertex algebras and algebraic curves*, Sémin. Bourbaki 1999/2000, Exp. n° 875, Astérisque **276** (2002), 299–339.
- [FF] B. FEIGIN et E. FRENKEL – *Quantization of soliton systems and Langlands duality*, dans *Exploration of New Structures and Natural Constructions in Mathematical Physics*, pp. 185-274, Adv. Stud. Pure Math. 61, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2011.
- [FH1] E. FRENKEL et D. HERNANDEZ – *Baxter’s Relations and Spectra of Quantum Integrable Models*, *Duke Math. J.* **164** (2015), no. 12, 2407–2460.
- [FH2] E. FRENKEL et D. HERNANDEZ – *Spectra of quantum KdV Hamiltonians, Langlands duality, and affineopers*, Prépublication arXiv :1606.05301.
- [FJMM] B. FEIGIN, M. JIMBO, T. MIWA et E. MUKHIN – *Finite type modules and Bethe ansatz equations*, *Ann. Henri Poincaré* (à paraître, prépublication arXiv :1609.05724).
- [FR1] E. FRENKEL et N. RESHETIKHIN – *The  $q$ -characters of representations of quantum affine algebras and deformations of  $W$ -Algebras*, in *Recent Developments in Quantum Affine Algebras and related topics*, *Contemp. Math.* **248** (1999), 163–205.
- [FR2] I. FRENKEL et N. RESHETIKHIN – *Quantum affine algebras and holonomic difference equations*, *Comm. Math. Phys.* **146** (1992), no. 1, 1–60.
- [FRT] L. FADDEEV, N. RESHETIKHIN et L. TAKHTAJAN – *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, dans *Yang-Baxter equation in Integrable Systems*, *Advanced Series in Mathematical Physics* **10** (1989), 299–309.
- [FZ1] S. FOMIN et A. ZELEVINSKY – *Cluster algebras I : Foundations*, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), 497–529.
- [FZ2] G. FELDER et H. ZHANG – *Baxter operators and asymptotic representations*, *Selecta Math.* (à paraître, prépublication arXiv :1611.00628).
- [GLS1] C. GEISS, B. LECLERC et J. SCHRÖER – *Cluster structures on quantum coordinate rings*, *Selecta Math. (N.S.)* **19** (2013), no. 2, 337–397.

- [GLS2] C. GEISS, B. LECLERC et J. SCHRÖER – *Factorial cluster algebras*, Documenta Math. **18** (2013), 249–274.
- [HJ] D. HERNANDEZ et M. JIMBO – *Asymptotic representations and Drinfeld rational fractions*, Compos. Math. **148** (2012), no. 5, 1593–1623.
- [HL1] D. HERNANDEZ et B. LECLERC – *Cluster algebras and quantum affine algebras*, Duke Math. J. **154** (2010), no. 2, 265–341.
- [HL2] D. HERNANDEZ et B. LECLERC – *Cluster algebras and category  $\mathcal{O}$  for representations of Borel subalgebras of quantum affine algebras*, Algebra Number Theory **10** (2016), No. 9, 2015–2052.
- [Kac] V. KAC – *Infinite Dimensional Lie Algebras*, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Kam] J. KAMNITZER – *Categorification of Lie algebras (after Rouquier, Khovanov-Lauda, )*, Sémin. Bourbaki 2012/13, Exp. n° 1072, Astérisque **361** (2014), 397–419.
- [Kas] M. KASHIWARA – *On level-zero representations of quantized affine algebras*, Duke Math. J. **112**, (2002) 117–175.
- [Ke] B. KELLER – *Algèbres amassées et applications (d’après Fomin-Zelevinsky, ...)*, Sémin. Bourbaki. 2009-10, Exp. n° 1014, Astérisque **339** (2011), 63–90.
- [Ki] Y. KIMURA – *Quantum unipotent subgroup and dual canonical basis*, Kyoto J. Math. **52**, no. 2 (2012), 277–331.
- [KL] M. KHOVANOV et A. LAUDA – *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I*, Represent. Theory **13** (2009), 309–347.
- [KKK] S.-J. KANG, M. KASHIWARA et M. KIM – *Symmetric quiver Hecke algebras and  $R$ -matrices of quantum affine algebras*, Prépublication arXiv :1304.0323.
- [KKKO1] S.-J. KANG, M. KASHIWARA, M. KIM et S.-J. OH – *Simplicity of heads and socles of tensor products*, Compos. Math. **151**, (2015), no. 2, 377–396.
- [KKKO2] S.-J. KANG, M. KASHIWARA, M. KIM et S.-J. OH – *Monoidal categorification of cluster algebras*, Prépublication arXiv :1412.8106.
- [KKKO3] S.-J. KANG, M. KASHIWARA, M. KIM et S.-J. OH – *Monoidal categorification of cluster algebras II*, Prépublication arXiv :1502.06714
- [KQ] Y. KIMURA et F. QIN – *Graded quiver varieties, quantum cluster algebras and dual canonical basis*, Adv. Math. **262** (2014), 261–312.
- [KR] A. KLESHCHEV et A. RAM – *Representations of Khovanov-Lauda-Rouquier algebras and combinatorics of Lyndon words*, Math. Ann. **349**, no.4 (2011) 943–975.
- [Le1] B. LECLERC – *Imaginary vectors in the dual canonical basis of  $U_q(n)$* , Transform. Groups **8** (2003), no. 1, 95–104.

- [Le2] B. LECLERC – *Cluster algebras and representation theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume IV, 2471–2488 (2010).
- [Li] P. LITTELMANN – *Bases canoniques et applications* Sémin. Bourbaki 1997/98, Exp. n° 847, Astérisque **252** (1998), 287–306.
- [LM] E. LAPID et A. MINGUEZ – *On certain representations of the general linear group over a non-archimedean local field*, Prépublication arXiv :1605.08545
- [Ma] O. MATHIEU – *Bases des représentations des groupes simples complexes (d’après Kashiwara, Lusztig, Ringel et al.)* Sémin. Bourbaki 990/91, Exp. n° 743, Astérisque **252** (1992), 421–442.
- [Mc] M. MCBREEN – *Quantum cohomology of hypertoric varieties and geometric representations of Yangians*, Thèse (Princeton 2013).
- [MO] D. MAULIK et A. OKOUNKOV – *Quantum Groups and Quantum Cohomology*, Prépublication arXiv :1211.1287.
- [MRV] D. MASOERO, A. RAIMONDO et D. VALERI – *Bethe Ansatz and the Spectral Theory of affine Lie algebra valued connections. The simply-laced case*, Commun. Math. Phys. **344** (2016) 719–750.
- [N1] H. NAKAJIMA – *Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on projective surfaces*, Ann. of Math. **145** (1997), no. 2, 379–388.
- [N2] H. NAKAJIMA – *Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 1, 145–238.
- [N3] H. NAKAJIMA – *Quiver varieties and tensor products*, Invent. Math. **146** (2001), 399–449.
- [N4] H. NAKAJIMA – *Quiver varieties and  $t$ -analogs of  $q$ -characters of quantum affine algebras*, Annals of Math. **160** (2004), 1057–1097.
- [N5] H. NAKAJIMA – *Quiver varieties and cluster algebras*, Kyoto J. Math. **51** (2011), no. 1, 71–126.
- [N6] H. NAKAJIMA – *Quiver varieties and tensor products, II*, Symmetries, integrable systems and representations, 403–428, Springer Proc. Math. Stat. **40** (2013).
- [NS1] N. NEKRASOV et S. SHATASHVILI – *Supersymmetric vacua and Bethe ansatz*, Nucl. Phys. Proc. **192-193** (2009), 91–112.
- [NS2] N. NEKRASOV et S. SHATASHVILI – *Quantum integrability and supersymmetric vacua*, Prog. Theor. Phys. **177** (2009), 105–119.
- [O] A. OKOUNKOV – *Lectures on  $K$ -theoretic computations in enumerative geometry*, Prépublication arXiv :1512.07363.
- [PSZ] P. PUSHKAR, A. SMIRNOV et A. ZEITLIN – *Baxter  $Q$ -operator from quantum  $K$ -theory*, Prépublication arXiv :1612.08723.

- [Q] F. QIN – *Triangular bases in quantum cluster algebras and monoidal categorification conjectures*, Duke Math. J. (à paraître, prépublication arXiv :1501.04085).
- [Re] N. RESHETIKHIN – *The spectrum of the transfer matrices connected with Kac–Moody algebras*, Lett. Math. Phys. **14** (1987), 235–246.
- [Ros] M. ROSSO – *Représentations des groupes quantiques*, Sémin. Bourbaki 1990/91, Exp. n° 744, Astérisque **201-203** (1992), 443–483.
- [Rou] R. ROUQUIER – *2-Kac-Moody algebras*, Prépublication arXiv :0812.5023.
- [RTV] R. RIMANYI, V. TARASOV et A. VARCHENKO – *Trigonometric weight functions as K-theoretic stable envelope maps for the cotangent bundle of a flag variety*, J. Geom. Phys. **94** (2015), 81–119.
- [Sc] O. SCHIFFMANN – *Variétés carquois de Nakajima (d’après Nakajima, Lusztig, Varagnolo, Vasserot, Crawley-Boevey, et al.)*, Sémin. Bourbaki 2006/07, Exp. n° 976, Astérisque **317** (2008), 295–344.
- [SV1] O. SCHIFFMANN et É. VASSEROT – *The elliptic Hall algebra and the K-theory of the Hilbert scheme of  $\mathbb{A}^2$* , Duke Math. J. **162** (2013), no. 2 279–366.
- [SV2] O. SCHIFFMANN et É. VASSEROT – *Cherednik algebras, W algebras and the equivariant cohomology of the moduli space of instantons on  $A^2$* , Publ. math. IHES **118**, no. 1 (2013), 213–342.
- [Sm] A. SMIRNOV – *On the Instanton R-matrix*, Commun. Math. Phys. **345** (2016), Issue 3, 703–740.
- [STS] M. SEMENOV-TIAN-SHANSKY – *Quantum integrable systems*, Sémin. Bourbaki 1993/94, Exp. n° 788, Astérisque **227** (1995), 365–387.
- [Va] M. VARAGNOLO – *Quiver varieties and Yangians*, Lett. Math. Phys **53** (2000), no. 4, 273–283.
- [Ve] M. VERGNE – *Applications of equivariant cohomology*, dans Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Madrid, August 2006), Vol. I, European Math. Soc., Zürich, 2007, 635–664.
- [VV1] M. VARAGNOLO et É. VASSEROT – *Standard modules of quantum affine algebras*, Duke Math. J. **111** (2002), no. 3, 509–533.
- [VV2] M. VARAGNOLO et É. VASSEROT – *Canonical bases and KLR algebras*, J. Reine Angew. Math. **659** (2011), 67–100.

David HERNANDEZ

Sorbonne Paris Cité

Université Paris-Diderot Paris 7

Institut de Mathématiques de Jussieu–Paris Rive Gauche

CNRS UMR 7586

Bâtiment Sophie Germain

F–75205 Paris Cedex 13

*E-mail* : david.hernandez@imj-prg.fr