

**VARIÉTÉS EN EXPANSION**  
[d'après M. Gromov, L. Guth, ...]

par Nicolas BERGERON

**INTRODUCTION**

Soit  $M = \Gamma \backslash \mathbf{H}_d$  une variété hyperbolique compacte de dimension  $d$ , où  $\Gamma$  est un sous-groupe discret et sans torsion du groupe  $\mathrm{SO}_0(d, 1)$  des isométries de l'espace hyperbolique  $\mathbf{H}_d$  préservant l'orientation.

À la fin des années 1960, Cheeger [14] a défini une constante isopérimétrique  $h(M)$  dans le but de minorer la première valeur propre du laplacien de  $M$  (inégalité de Cheeger-Maz'ya). La *constante de Cheeger* est définie par

$$h(M) = \inf \frac{\mathrm{vol}_{d-1}(\partial U)}{\mathrm{vol}(U)},$$

où l'infimum est relatif à l'ensemble des ouverts  $U \subset M$  de volume (hyperbolique)  $\mathrm{vol}(U) \leq \frac{1}{2}\mathrm{vol}(M)$  et de bord une sous-variété (compacte), lisse par morceaux, de dimension  $d - 1$ , et où  $\mathrm{vol}_{d-1}(\partial U)$  désigne la mesure volume  $(d - 1)$ -dimensionnelle sur  $\partial U$ . On peut vérifier que  $h(M)$  est strictement positive.

Le *rayon interne* d'une variété hyperbolique est le rayon de la plus grande boule métrique plongée dans la variété. On attribue généralement à Margulis et Kazhdan la preuve de l'existence d'une constante positive  $R = R(d)$  minorant le rayon interne des variétés hyperboliques de dimension  $d$ . L'inégalité isopérimétrique dans  $\mathbf{H}_d$  implique alors l'existence d'une constante  $H = H(d)$  telle que pour toute variété hyperbolique  $M$  compacte de dimension  $d$ , on a :

$$(1) \quad h(M) \leq H.$$

À l'opposé, quelle que soit la dimension  $d$ , on peut construire une suite  $(M_i)_{i \in \mathbf{N}}$  de variétés hyperboliques compactes de dimension  $d$  telle que la constante de Cheeger  $h(M_i)$  tende vers 0 lorsque  $i$  tend vers l'infini.

Voici deux familles d'exemples, aux comportements différents, à garder en tête.

**Exemple 1 : revêtements cycliques**

Soit  $M$  une variété hyperbolique compacte dont le premier nombre de Betti est non nul ; Millson [37] montre qu'il en existe en toute dimension. Soit  $F \subset M$  une sous-variété de codimension 1 dont la classe duale  $[F] \in H^1(M)$  est non triviale. Le produit

d'intersection avec  $F$  donne lieu à un morphisme surjectif

$$(2) \quad \pi_1(M) \rightarrow \mathbf{Z}$$

du groupe fondamental de  $M$  vers  $\mathbf{Z}$ . Soit  $(M_i)_{i \geq 1}$  la suite des revêtements cycliques associés à cette surjection ; le revêtement  $M_i \rightarrow M$  est donc associé au noyau du morphisme  $\pi_1(M) \rightarrow \mathbf{Z}/i\mathbf{Z}$  obtenu en composant (2) avec le morphisme de réduction modulo  $i$ . La figure 1 montre que l'on peut choisir deux élévations  $F_1$  et  $F_2$  de  $F$  dans  $M_i$  de sorte que  $M_i \setminus (F_1 \cup F_2)$  soit la réunion de deux ouverts de volumes supérieurs à  $[i/2]\text{vol}(M_0)$ . On a donc

$$h(M_i) \leq \frac{2\text{vol}_{n-1}(F)}{[i/2]\text{vol}(M_0)}$$

et  $h(M_i)$  tend vers 0 lorsque  $i$  tend vers l'infini.

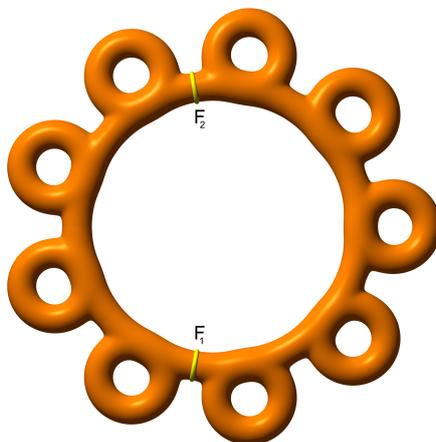


FIGURE 1. Un revêtement cyclique et deux élévations

### Exemple 2 : revêtements de congruence

Soit  $M = \Gamma \backslash \mathbf{H}_d$  une variété hyperbolique compacte de dimension  $d \geq 3$ . Selberg [45] déduit de la rigidité locale de  $\Gamma$  dans  $\text{SO}_0(d, 1)$  que, quitte à conjuguer  $\Gamma$  dans  $\text{SO}_0(d, 1)$ , on peut supposer que tous ses éléments sont à coefficients dans un corps de nombres. L'adhérence de Zariski de  $\Gamma$  dans  $\text{SL}_{d+1}(\mathbf{C})$  est donc un groupe algébrique et semi-simple défini sur un corps de nombres. Notons  $\mathbf{G}$  le groupe algébrique affine et semi-simple sur  $\mathbf{Q}$  obtenu par restriction des scalaires. On a alors  $\Gamma \subset \mathbf{G}(\mathbf{Q})$  et, puisque  $\Gamma$  est de type fini, il existe même un entier  $q_0$  (le p.p.c.m. des dénominateurs des coefficients matriciels des générateurs de  $\Gamma$ ) tel que  $\Gamma$  soit contenu dans  $\mathbf{G}(\mathbf{Z}[1/q_0])$ . Étant donné un entier  $q$  premier à  $q_0$ , le morphisme  $\pi_q : \mathbf{G}(\mathbf{Z}[1/q_0]) \rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})$  est bien défini ; on note  $\Gamma_q$  l'intersection de  $\Gamma$  avec le noyau de  $\pi_q$ . On pose enfin  $M_q = \Gamma_q \backslash \mathbf{H}_d$  ; c'est un revêtement fini, dit *de congruence*, de  $M$ .

La proposition suivante est un cas particulier d'un théorème de Salehi-Golsefidy et Varjú [23]. En appendice on détaille un peu sa (longue) histoire et on donne une brève idée de sa démonstration.

PROPOSITION 0.1. — *Il existe une constante strictement positive  $\alpha = \alpha(M)$  telle que pour tout entier  $q$  premier à  $q_0$  et sans facteur carré, on ait*

$$h(M_q) \geq \alpha.$$

Les revêtements de congruence, d'origine arithmétique, sont plus difficiles à visualiser que les revêtements cycliques. L'expérience semble indiquer qu'à volume égal ils sont topologiquement plus « complexes » que les revêtements cycliques. Les invariants homologiques usuels ne permettent toutefois pas de confirmer ce sentiment.

Dans ce rapport, on présente une nouvelle notion de complexité topologique d'une variété  $M$ , due à Gromov et Guth [25] : le volume euclidien minimal occupé par l'image d'un plongement  $M \rightarrow \mathbf{R}^n$  d'épaisseur de rétraction au moins 1, c'est-à-dire dont l'image est un rétract de son 1-voisinage (voir la définition 4.2). On verra que, le long d'une suite de revêtements cycliques, ce volume croît linéairement avec le volume hyperbolique (cf. exemple 6.2). D'un autre côté, on déduit du théorème 8.1 et de la proposition 0.1 le théorème suivant.

THÉORÈME 0.2. — *Soient  $M$  une variété hyperbolique compacte de dimension  $d \geq 3$  et  $(M_q)$  une suite de revêtements de congruence. Le volume de l'image d'un plongement  $M_q \rightarrow \mathbf{R}^n$  d'épaisseur de rétraction au moins 1 est, à une constante multiplicative ne dépendant que de  $n$  et  $d$  près, supérieur à  $\text{vol}(M_q)^{\frac{n}{n-1}}$ .*

À volume égal un revêtement de congruence est donc bien topologiquement plus complexe — en tout cas plus difficile à plonger — qu'un revêtement cyclique. Le comportement de la constante de Cheeger les distingue et le théorème 8.1 est un reflet *topologique* de la difficulté à plonger des graphes expanseurs « épaissis » dans un espace euclidien. On peut ainsi penser aux revêtements de congruence comme à des « expanseurs topologiques ». Et, avant d'énoncer et de démontrer le théorème 8.1, on papillonne à travers quelques résultats « d'expansion » qui ont guidé Gromov et Guth. Une étape cruciale est la proposition 7.1. On conclut ce survol par une autre application de cette proposition : l'existence de classes d'isotopie de nœuds dans  $\mathbf{R}^3$  qui nécessitent une distorsion arbitrairement grande. Gromov et Guth retrouvent ainsi un théorème récent de Pardon [40].

## 1. CONSTANTE DE CHEEGER ET TOPOLOGIE DES 3-VARIÉTÉS

On sait depuis les années 1970 et les travaux de Mostow que le volume d'une variété hyperbolique compacte de dimension  $d \geq 3$  est un invariant *topologique*. Pour ce qui concerne les variétés de dimension 3, un invariant bien plus subtil que le volume est le

*genre de Heegaard* : une variété  $M$  compacte de dimension 3 peut être décomposée, par exemple en épaississant le 1-squelette d’une triangulation de  $M$ , en la réunion de deux corps en anses de bord commun une surface fermée, appelée *surface de Heegaard*. Le genre minimal d’une surface de Heegaard est appelé genre de Heegaard de  $M$  et noté  $g(M)$ .

Un théorème remarquable de Bachman, Cooper et White [3] affirme que si  $M$  est une variété hyperbolique de dimension 3 de rayon interne  $R(M)$ , alors le genre de Heegaard de  $M$  est essentiellement minoré par le volume d’une boule hyperbolique de rayon  $R(M)$  :

$$(3) \quad g(M) \geq \frac{1}{2} \cosh(R(M)).$$

Une variété métriquement proche de l’espace hyperbolique  $\mathbf{H}_3$  est donc topologiquement compliquée ; c’est en particulier le cas des variétés hyperboliques qui convergent, « au sens de Benjamini-Schramm » (voir [1]), vers  $\mathbf{H}_3$ . Dans le cas des revêtements de congruence, on peut quantifier cela : si  $\Gamma$  est un réseau dans  $\mathrm{SO}_0(3, 1)$ , il découle par exemple de [1, Thm. 1.12] qu’il existe une constante positive  $\beta = \beta(\Gamma)$  telle que pour tout sous-groupe de congruence  $\Gamma_q \subset \Gamma$  le rayon interne de  $\Gamma_q \backslash \mathbf{H}_3$  soit supérieur à  $\beta \log \mathrm{vol}(\Gamma_q \backslash \mathbf{H}_3)$ . On déduit alors de (3) que le genre de Heegaard de  $\Gamma_q \backslash \mathbf{H}_3$  est minoré par  $\frac{1}{4} \mathrm{vol}(\Gamma_q \backslash \mathbf{H}_3)^\beta$ .

Compte tenu de la proposition 0.1, la considération de la constante de Cheeger permet de montrer mieux. Marc Lackenby [31, Theorem 4.1] prouve en effet que si  $M$  est une variété hyperbolique compacte de dimension 3, alors :

$$(4) \quad g(M) \geq \frac{1}{8\pi} h(M) \mathrm{vol}(M).$$

*Schéma de démonstration.* — Une surface de Heegaard de genre  $g$  détermine un « balayage » de  $M$  par une famille de surfaces de genre  $g$  allant de l’âme du premier corps en anses à l’âme du second. Dans un tel balayage il y a une surface d’aire maximale. On appelle *minimax* la valeur minimale d’un tel maximum. Les travaux de Pitts et Rubinstein [42] impliquent que ce minimax peut être réalisé par une surface minimale (d’aire maximale dans un balayage de  $M$ ). Puisque, d’après le théorème de Gauss-Bonnet, une surface minimale est d’aire majorée par  $2\pi$  fois sa caractéristique d’Euler, on obtient que toute surface du balayage est d’aire majorée par  $4\pi(g - 1)$ . Finalement il existe une surface  $S$  de ce balayage qui partage  $M$  en deux morceaux de même volume et, par définition de la constante de Cheeger, on obtient comme annoncé :

$$h(M) \leq \frac{\mathrm{aire}(S)}{(1/2)\mathrm{vol}(M)} \leq \frac{8\pi g}{\mathrm{vol}(M)}.$$

□

*Remarque 1.1.* — En dimension 2, le volume détermine complètement la topologie de la variété. On dispose toutefois d’un analogue de (4), mais cette fois l’invariant que l’on relie à la constante de Cheeger, est un invariant *conforme*. Une surface de Riemann

compacte  $X$  de genre  $g$  peut toujours être réalisée comme revêtement ramifié de la sphère de Riemann de degré au plus  $g + 1$ . La *gonalité*  $d(X)$  de  $X$  est le degré minimal d’une telle réalisation. C’est un invariant bien plus subtil que le genre. On peut montrer, voir [52, 51, 2], que si  $X = \Gamma \backslash \mathbf{H}_2$  est une surface (ou un orbifold) d’aire finie, alors

$$d(X) \geq \frac{1}{32\pi} h(X)^2 \text{aire}(X).$$

Cette minoration a des conséquences arithmétiques intéressantes. Le théorème de Faltings [19] sur les points rationnels d’une variété abélienne permet en effet de montrer qu’une courbe de gonalité suffisamment grande ne contient qu’un nombre fini de points rationnels dont les coordonnées appartiennent à une réunion de corps de nombres de degrés bornés. Appliqué aux revêtements de congruence  $X_0(N)$  de la surface modulaire et à un degré  $D$ , ce théorème implique que pour  $N \geq 230D$ , l’ensemble des points de  $X_0(N)$  dont les coordonnées appartiennent à la réunion de tous les corps de nombres de degré au plus  $D$  est fini. Des travaux récents d’Ellenberg, Hall et Kowalski [16], parus dans le même volume que l’article de Gromov et Guth, appliquent une idée similaire à l’étude d’un problème diophantien sur une tour de courbes.

La démonstration esquissée ci-dessus de l’inégalité (4) suggère plus qu’une minoration du genre de Heegaard de  $M$  : toute application lisse générique  $F : M \rightarrow \mathbf{R}$  doit avoir une fibre compliquée. C’est précisément ce que montre Gromov [24, §6.2] lorsque  $M$  est de dimension 3. Alors, il existe une constante universelle  $C > 0$  telle que la somme des nombres de Betti de l’une des fibres de  $F$  soit supérieure à  $\frac{1}{C} h(M) \text{vol}(M)$ .

Appliquée à une suite  $(M_q)$  de revêtements de congruence, cette inégalité rappelle une inégalité analogue pour les graphes expandeurs que l’on détaille dans le paragraphe suivant.

## 2. GRAPHES EXPANSEURS ET THÉORÈME DE KOLMOGOROV ET BARZDIN

Étant donné un graphe fini connexe  $X = X(V, E)$   $k$ -régulier, c’est-à-dire de valence constante égale à  $k$ , avec un ensemble  $V$  de sommets et un ensemble  $E$  d’arêtes, on définit la *constante de Cheeger* de  $X$  par :

$$h(X) = \inf_{A \subset V, |A| \leq \frac{1}{2}|V|} \frac{|\partial A|}{|A|}$$

où  $\partial A$  désigne le sous-ensemble de  $E$  constitué des arêtes qui relient un sommet dans  $A$  à un sommet appartenant au complémentaire de  $A$  dans  $V$ .

On dit d’un graphe fini  $X = X(V, E)$  que c’est un  $\alpha$ -*expandeur* si sa constante de Cheeger  $h(X)$  est supérieure ou égale à  $\alpha$ . La notion n’est intéressante que si l’on considère une famille infinie de graphes. En pratique, on fixe  $k$  et  $\alpha$  et on cherche une famille dont le nombre de sommets tend vers l’infini. On parlera alors du cardinal  $|V|$  de l’ensemble des sommets comme de la *taille* de  $X$ .

L'existence de (familles de) graphes expandeurs est à la fois relativement élémentaire à démontrer et surprenante. Elle est élémentaire car si l'on fixe  $k \geq 5$ , un simple argument de comptage montre que si l'on note  $p_N$  la proportion, parmi tous les graphes  $k$ -réguliers sur  $N$  sommets, de ceux qui sont des  $\frac{1}{2}$ -expandeurs, alors  $p_N$  tend vers 1 lorsque  $N$  tend l'infini, voir Pinsker [41]. Elle est toutefois surprenante car en pratique il est redoutablement difficile de construire des familles *explicités* de graphes expandeurs. Le premier à y être parvenu est Margulis [36] en exploitant la propriété (T) de Kazhdan issue de la théorie des représentations des groupes de Lie semi-simples. Les graphes de Cayley des groupes finis  $\Gamma/\Gamma_q$ , où  $\Gamma$  et  $\Gamma_q$  sont comme dans la proposition 0.1, fournissent une variante de cette construction. La propriété (T) y est remplacée par la minoration uniforme de la constante de Cheeger des quotients  $\Gamma_q \backslash \mathbf{H}_d$ .

Comme en témoigne régulièrement ce séminaire [49, 22, 30], on trouve des graphes expandeurs dans des domaines variés des mathématiques. Lubotzky leur a consacré un beau livre [34] et, plus récemment, un article [35] qui présente de nombreuses applications des graphes expandeurs à l'informatique, la géométrie ou la théorie des nombres. C'est à leur lien avec des questions *topologiques* que l'on s'intéresse principalement ici. Le point de départ consiste à remarquer que si un graphe fini  $X$  est un  $\alpha$ -expandeur de taille  $N$ , alors toute application  $F : X \rightarrow \mathbf{R}$  possède une fibre qui rencontre au moins  $\frac{1}{2}\alpha N$  arêtes différentes.

C'est cette propriété que Kolmogorov et Barzdin [28] exploitent, dès 1967.<sup>(1)</sup> Motivés par l'étude de la manière dont sont plongés les réseaux neuronaux dans nos cerveaux, Kolmogorov et Barzdin considèrent des graphes « épaissis » dans  $\mathbf{R}^3$ . Un plongement  $I : X \rightarrow \mathbf{R}^n$  d'un graphe fini  $X$  dans  $\mathbf{R}^n$  est *d'épaisseur au moins  $T$*  si les images par  $I$  de deux sommets de  $X$ , de deux arêtes non adjacentes de  $X$ , ou d'un sommet et d'une arête non incidente à ce sommet dans  $X$  sont à distance au moins  $T$  dans  $\mathbf{R}^n$ . Le concept de graphe expandeur intervient alors implicitement lorsqu'ils minorent le volume occupé dans l'espace  $\mathbf{R}^3$  par le 1-voisinage de tout plongement 1-épais d'un graphe combinatoire « aléatoire ». En termes de graphes expandeurs, ils démontrent essentiellement la proposition suivante.

PROPOSITION 2.1. — *Soient  $k$  et  $n$  deux entiers supérieurs ou égaux à 3. Il existe une constante strictement positive  $C = C(k, n)$  telle que si  $X$  est un graphe fini de taille  $N$ , régulier de valence  $k$  et de constante de Cheeger  $h$ , alors pour tout plongement  $I : X \rightarrow \mathbf{R}^n$  d'épaisseur au moins  $T$ , le volume du 1-voisinage de  $I(X)$  dans  $\mathbf{R}^n$  est supérieur ou égal à  $\frac{1}{C}T^n h^{\frac{n}{n-1}} N^{\frac{n}{n-1}}$ .*

*Démonstration.* — On peut supposer  $T = 1$ . On considère donc un plongement de  $X$  dans  $\mathbf{R}^n$  d'épaisseur au moins 1 et on note  $X^+$  le 1-voisinage de son image. Le théorème de découpage de Falconer [18], que l'on démontre dans le paragraphe suivant, implique qu'il existe une famille d'hyperplans parallèles de  $\mathbf{R}^n$  dont chacun coupe  $X^+$

1. En 1967 la notion de graphe expandeur n'est pas encore dégagée, ils voient donc cette propriété comme vérifiée par une famille de graphes  $k$ -réguliers aléatoires.

selon une « tranche » de  $(n - 1)$ -volume au plus  $C(n)\text{vol}_{\text{Eucl}}(X^+)^{\frac{n-1}{n}}$ , où  $C(n)$  est une constante strictement positive qui ne dépend que de  $n$ . Ces tranches sont les fibres d'une application  $F : X^+ \rightarrow \mathbf{R}$ . Par la propriété d'expansion, l'une de ces fibres rencontre au moins  $\frac{1}{2}hN$  arêtes différentes. Mais le nombre d'arêtes adjacentes à un même sommet est majoré par  $k$ . La fibre considérée rencontre donc au moins  $k^{-1}\frac{1}{2}hN$  arêtes deux à deux non adjacentes. De sorte que la tranche contient au moins  $k^{-1}\frac{1}{2}hN$  boules unités (de dimension  $n - 1$ ) disjointes. On en conclut que

$$C(n)\text{vol}_{\text{Eucl}}(X^+)^{\frac{n-1}{n}} \geq k^{-1}\frac{1}{2}hN.$$

□

Il découle de la proposition 2.1 que pour tout entier  $k \geq 5$ , il existe une constante strictement positive  $c = c(k)$  telle que si  $X$  est un graphe aléatoire de valence  $k$  et de taille  $N$ , alors la probabilité  $p_N$  qu'il existe un plongement 1-épais de  $X$  dans une boule de l'espace  $\mathbf{R}^3$  de rayon  $cN^{1/2}$  tend vers 0 avec  $N$ .

Dans la direction opposée Kolmogorov et Barzdin montrent que pour tout entier  $k \geq 3$ , il existe une constante  $C = C(k)$  telle que tout graphe fini de valence inférieure à  $k$  et de taille  $N$  puisse être plongé avec épaisseur au moins 1 dans une boule de rayon  $CN^{1/2}$  dans  $\mathbf{R}^3$ .

*Esquisse de démonstration.* — On commence par se ramener au cas où  $k = 3$ . Partant d'un graphe fini de valence inférieure à  $k$  et de taille  $N$ , les deux étapes suivantes aboutissent à un graphe fini de valence inférieure à 3 et de taille inférieure à  $(3k + 1)N$  :

1. On ajoute un sommet au milieu de chaque arête.
2. En chaque « ancien » sommet (de valence  $k$  donc) on fait subir au graphe la manipulation que représente la figure 2.

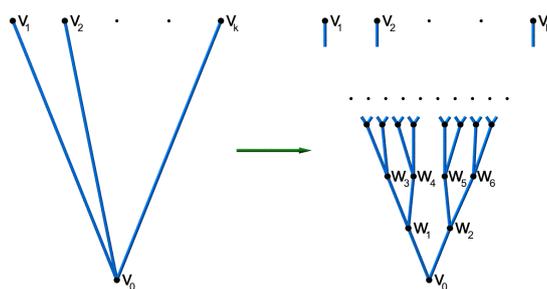


FIGURE 2. Réduction à un graphe de valence 3

La première étape ajoute  $kN$  nouveaux sommets. La deuxième ajoute quant à elle au plus

$$\sum_{i=1}^{\lceil \log_2 k \rceil + 1} 2^i \leq 2k$$

sommets à chaque ancien sommet. À l'issue de ces deux étapes, le nouveau graphe est de valence inférieure à 3 et de taille inférieure à  $(3k + 1)N$ . Puisque tout plongement 1-épais du nouveau graphe induit un plongement 1-épais du graphe de départ, on est réduit à considérer un graphe de valence inférieure à 3.

Dans la suite on supposera pour simplifier qu'il est possible d'orienter le graphe que l'on cherche à plonger, de sorte que chaque sommet soit l'origine d'exactly une arête. On fixe une telle orientation et on suppose en outre que la taille  $N$  du graphe est un carré :  $N = n^2$ . L'idée de Kolmogorov et Barzdin consiste à répartir aléatoirement les  $n^2$  sommets du graphe sur la grille des points de coordonnées  $(4i + 2, 2j, 0)$  ( $i, j = 0, 1, \dots, n - 1$ ), dans le plan  $\{z = 0\}$  de  $\mathbf{R}^3$ . Il s'agit alors d'exploiter la dimension verticale pour ajouter les arêtes. La figure 3 représente la manière dont on ajoute une arête orientée entre deux points  $v$  et  $w$  de la grille horizontale. L'arête est représentée par une courbe polygonale qui dépend encore du choix d'un paramètre « vertical »  $\zeta$  à effectuer parmi les entiers  $1, \dots, 4n$ . Il n'est pas difficile de vérifier que si  $v$  et  $v'$  sont deux sommets de la grille horizontale d'abscisses distinctes et si  $w$  et  $w'$  sont deux sommets d'ordonnées distinctes, indépendamment du choix des paramètres verticaux, deux courbes polygonales, comme représentées sur la figure 3, et allant respectivement de  $v$  à  $w$  et de  $v'$  à  $w'$  sont disjointes et même distantes d'au moins 1. Dans les  $4n$  cas où soit  $v$  et  $v'$  ont même abscisse, soit  $w$  et  $w'$  ont même ordonnée, on dispose des paramètres verticaux. Au final on parvient ainsi à construire un plongement 1-épais du graphe dans le parallélépipède rectangle de côtés  $4n$ ,  $2n$  et  $8n$ .

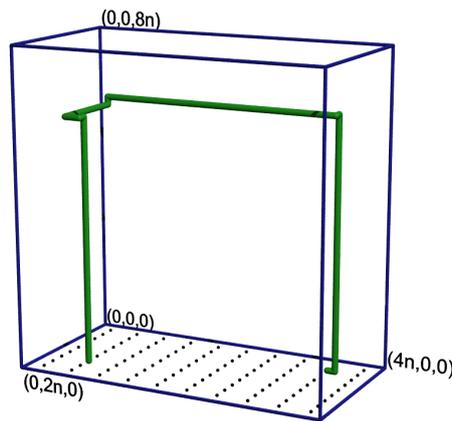


FIGURE 3. Image d'une arête

□

### 3. UN APARTÉ : LE THÉORÈME DE DÉCOUPAGE DE FALCONER

THÉORÈME 3.1. — Soit  $U$  un ouvert borné dans  $\mathbf{R}^n$  et soit  $k$  un entier strictement supérieur à  $n/2$ . Il existe alors une famille de  $k$ -plans parallèles dans  $\mathbf{R}^n$  dont chacun coupe  $U$  selon une « tranche » de  $k$ -volume au plus  $C(n)\text{vol}_{\text{Eucl}}(U)^{\frac{k}{n}}$ , où  $C(n)$  est une constante strictement positive qui ne dépend que de  $n$ .

Démonstration dans le cas  $k = 2$ ,  $n = 3$ . — On suit [26, Appendix]. On commence par supposer que  $U$  est de volume égal à 1. On note  $f$  la fonction caractéristique de  $U$  et  $\widehat{f}(\theta, r)$  la valeur de la transformée de Fourier de  $f$  en le point de coordonnées polaires  $(r, \theta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{S}^2$ . Un tel point détermine un plan  $\Pi(r, \theta) \subset \mathbf{R}^3$ , le plan perpendiculaire à la direction  $\theta$  et à distance (algébrique)  $r$  de 0. Une direction  $\theta$  étant fixée on notera  $F_\theta$  la fonction qui à un réel  $r$  associe la moyenne de  $f$  sur le plan  $\Pi(r, \theta)$ . La démonstration du théorème repose alors essentiellement sur l'observation suivante :

LEMME 3.2. — Soit  $\theta \in \mathbf{S}^2$  une direction fixée. La transformée de Fourier de la fonction  $F_\theta$  est donnée par :

$$\widehat{F}_\theta(\xi) = \widehat{f}(\theta, \xi).$$

Démonstration. — La conclusion étant invariante par rotation on peut supposer  $\theta = (0, 0, 1)$ . Alors  $F_\theta(z) = \int_{\mathbf{R}^2} f(x, y, z) dx dy$  et on calcule :

$$\begin{aligned} \widehat{F}_\theta(\xi) &= \int_{\mathbf{R}} F_\theta(z) e^{-2i\pi\xi z} dz \\ &= \int_{\mathbf{R}^3} f(x, y, z) e^{-2i\pi\langle(0,0,\xi),(x,y,z)\rangle} dx dy dz \\ &= \widehat{f}(\theta, \xi). \end{aligned}$$

□

On veut borner la norme infinie de  $F_\theta$  pour une certaine direction  $\theta$ . Pour cela, on étudie  $\widehat{F}_\theta$  et donc  $\widehat{f}$ . Or, le volume de  $U$  étant supposé égal à 1, on a  $\|f\|_2 = 1$ . La formule de Plancherel implique donc que  $\|\widehat{f}\|_2 = 1$  soit

$$\int_{\mathbf{S}^2} \int_0^{+\infty} |\widehat{f}(\theta, r)|^2 r^2 dr d\theta = 1.$$

L'aire totale de la sphère unité  $\mathbf{S}^2$  étant égale à  $4\pi$ , il doit donc exister une direction  $\theta_0 \in \mathbf{S}^2$  telle que

$$(5) \quad \int_{\mathbf{R}} |\widehat{f}(\theta_0, r)|^2 r^2 dr \leq \frac{1}{2\pi}.$$

Combiné au fait que, puisque  $\|f\|_1 = 1$ , la norme sup de  $\widehat{f}$  est inférieure à 1, on déduit de l'inégalité (5) et du lemme 3.2 que

$$\int_{\mathbf{R}} |\widehat{F}_{\theta_0}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^2 d\xi < 5.$$

On peut alors utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour majorer la norme  $L^1$  de  $\widehat{F}_{\theta_0}$  :

$$\int_{\mathbf{R}} |\widehat{F}_{\theta_0}(\xi)| d\xi \leq \left( \int_{\mathbf{R}} |\widehat{F}_{\theta_0}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^2 d\xi \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbf{R}} (1 + |\xi|^2)^{-2} d\xi \right)^{1/2} < \sqrt{10}.$$

Et il découle finalement du théorème d'inversion de Fourier que  $\|F_{\theta_0}\|_{\infty} \leq \|\widehat{F}_{\theta_0}\|_1 < \sqrt{10}$ . Autrement dit, pour tout réel  $r$ , la moyenne de  $f$  sur le plan  $\Pi(r, \theta_0)$  est inférieure à  $\sqrt{10}$ . Ce qui conclut la démonstration dans le cas  $k = 2$ ,  $n = 3$ .

Le cas général  $k > n/2$  est seulement légèrement plus compliqué. L'usage des coordonnées polaires est remplacé par une moyenne sur la variété grassmannienne des  $k$ -plans de  $\mathbf{R}^n$  et à la place de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on utilise l'inégalité de Hölder.  $\square$

*Remarque 3.3.* — Le théorème 3.1 est faux pour  $k = 1$  comme le suggère la figure 4, représentation schématique d'un ensemble de Besicovitch [6]. On trouvera dans l'article [7] une introduction élémentaire et bien plus détaillée à ces ensembles et à leur relation avec le problème de l'aiguille de Kakeya. Besicovitch construit en effet plus précisément un sous-ensemble, de mesure aussi petite que l'on veut, qui non seulement contient un segment de droite de longueur 1 dans chaque direction mais à l'intérieur duquel un tel segment peut même être tourné continûment d'un tour complet.

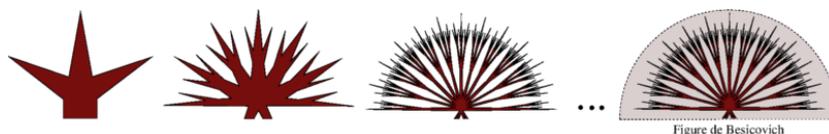


FIGURE 4. Représentation schématique d'un ensemble de Besicovitch, d'après V. Borelli et J.-L. Rivière

## 4. PLONGEMENT DE COMPLEXES DE DIMENSION SUPÉRIEURE

### 4.1. Une conjecture

Pour résumer les travaux de Kolmogorov et Barzdin : les graphes expandeurs sont les graphes finis les plus difficiles à plonger dans l'espace euclidien.

Il est naturel de se demander ce qu'il en est des variétés ou des complexes simpliciaux de dimension supérieure. Étant donné un complexe simplicial  $X$  de dimension  $k$ , Gromov et Guth appellent *plongement d'épaisseur combinatoire au moins  $T$*  tout plongement  $I : X \rightarrow \mathbf{R}^n$  tel que pour tout couple  $(\Delta_1, \Delta_2)$  de simplexes non adjacents de  $X$  la distance entre  $I(\Delta_1)$  et  $I(\Delta_2)$  est supérieure à  $T$ . Ils proposent alors la généralisation conjecturale suivante du résultat de Kolmogorov et Barzdin.

CONJECTURE 4.1. — Soient  $n$ ,  $k$  et  $L$  des entiers positifs avec  $n \geq 2k + 1$ . Il existe une constante  $C = C(n, L)$  telle que pour tout complexe simplicial  $X$  de dimension  $k$ , constitué de  $N$  simplexes et dont chaque sommet appartient à au plus  $L$  simplexes, il existe un plongement 1-épais  $I : X \rightarrow \mathbf{R}^n$  dont l'image est contenue dans une boule de rayon inférieur à  $CN^{\frac{1}{n-k}}$ .

Lorsque  $k = 1$  on retrouve l'énoncé de Kolmogorov et Barzdin dont on a esquissé la démonstration, et lorsque  $k = 0$  la conjecture est facile à vérifier. En général Gromov et Guth parviennent à vérifier cette conjecture à un facteur polynomial en  $\log N$  près. Leur démonstration consiste à envoyer aléatoirement chaque sommet de  $X$  dans une boule fixée. Ils étendent alors linéairement cette application sur chaque simplexe. Sous l'hypothèse  $n \geq 2k + 1$ , l'application obtenue est presque sûrement un plongement mais obtenir un plongement 1-épais requiert que le rayon de la boule soit au moins de l'ordre de  $N^{\frac{2}{n-2k}}$ . Gromov et Guth parviennent à un meilleur résultat en courbant les simplexes à une plus petite échelle (à l'échelle 1 dans une boule de rayon  $N^{\frac{1}{n-k}}$ ).

#### 4.2. La conjecture 4.1 est-elle optimale ?

Par analogie avec la propriété fondamentale des graphes expanseurs il est naturel, pour répondre à cette question, d'introduire la notion de *largeur combinatoire* : un complexe simplicial  $X$  de dimension  $k$  est de *largeur combinatoire au moins*  $W$  si toute application continue  $F : X \rightarrow \mathbf{R}^k$  possède une fibre qui rencontre au moins  $W$   $k$ -simplexes fermés de  $X$ .

En reprenant la démonstration de la proposition 2.1 Gromov et Guth montrent que si  $X$  est un complexe simplicial de dimension  $k$  à géométrie locale bornée et de largeur combinatoire au moins  $W$  alors pour tout plongement 1-épais  $I : X \rightarrow \mathbf{R}^n$ , le volume du 1-voisinage de  $I(X)$  dans  $\mathbf{R}^n$  est, à une constante multiplicative près, supérieur à  $W^{\frac{n}{n-k}}$ .

Cela soulève la question de l'existence d'une suite  $(X_i)$  de complexes simpliciaux de dimension  $k$ , de géométrie locale uniformément bornée, dont le nombre  $N_i$  de  $k$ -simplexes tend vers l'infini avec  $i$  et dont la largeur combinatoire reste supérieure à  $\alpha N_i$  pour une certaine constante strictement positive  $\alpha$  indépendante de  $i$ . De telles suites de complexes ont récemment été construites par Kaufman, Kazhdan et Lubotzky [29] en dimension 2, et par Evra et Kaufman [17] en général. Ces suites méritent le nom de « complexes expanseurs ». Et il découle de l'existence de ces suites que l'exposant  $\frac{1}{n-k}$  dans la conjecture 4.1 est optimal.

#### 4.3. Une épaisseur topologique

La notion d'épaisseur combinatoire est... combinatoire. Gromov et Guth proposent une manière plus *topologique* de prolonger les travaux de Kolmogorov et Barzdin à travers la notion d'épaisseur de rétraction :

DÉFINITION 4.2. — Soit  $X$  un CW-complexe plongé dans  $\mathbf{R}^n$ . On dit que  $X$  est d'épaisseur de rétraction au moins  $T$  s'il est un rétract de son  $T$ -voisinage.

À première vue, épaisseur combinatoire et épaisseur de rétraction semblent deux notions assez proches. Mais, comme le remarquent Gromov et Guth, ce sont en fait deux notions assez différentes. En effet, deux graphes finis dont les nombres de Betti sont les mêmes sont homotopes. L'épaisseur de rétraction ne permet donc pas de distinguer un graphe expanseur d'une grille de même taille.

D'un autre côté l'épaisseur de rétraction donne lieu à une notion de complexité *topologique* intéressante : le volume minimal du 1-voisinage de l'image d'un plongement d'épaisseur de rétraction au moins 1. Dans les paragraphes qui suivent, on relie d'abord cette notion aux groupes d'homologie de  $X$  puis, lorsque  $X$  est une variété hyperbolique, à son volume. Enfin, dans le paragraphe 8, on relie, toujours dans le cas des variétés hyperboliques, cette complexité topologique au volume hyperbolique et à la constante de Cheeger.

## 5. ÉPAISSEUR DE RÉTRACTION ET HOMOLOGIE

Soit  $X$  un CW-complexe plongé dans  $\mathbf{R}^n$  avec épaisseur de rétraction au moins 1. Le volume  $V$  du 1-voisinage de  $X$  mesure la complexité géométrique du plongement. Il contrôle certains aspects de la complexité homotopique de  $X$ . La proposition suivante montre en particulier que  $V$  contraint les groupes d'homologie de  $X$ .

PROPOSITION 5.1. — *Il existe une constante  $C = C(n)$  telle que si  $X$  est un CW-complexe plongé dans  $\mathbf{R}^n$  avec épaisseur de rétraction au moins 1 et si  $V$  désigne le volume du 1-voisinage de  $X$  dans  $\mathbf{R}^n$ , alors on a :*

$$\text{rang } H_*(X) \leq CV \text{ et } \log |H_*(X)_{\text{tors}}| \leq CV.$$

*Démonstration.* — On note  $N_T(X)$  le  $T$ -voisinage de  $X$  dans  $\mathbf{R}^n$ . Soit  $p_1, p_2, \dots$  un ensemble maximal de points  $(1/2)$ -séparés dans  $N_{1/2}(X)$ . Les boules  $B(p_i, 1/2)$  recouvrent  $N_{1/2}(X)$  ; soit  $U$  leur réunion et soit  $N$  le complexe simplicial fini obtenu en formant le nerf du bon recouvrement de  $U$  par les boules  $B(p_i, 1/2)$ .

Les boules  $B(p_i, 1/4)$  sont disjointes et contenues dans  $N_1(X)$ . On en déduit deux choses :

1. Il existe une constante  $c_1 = c_1(n)$  telle que le nombre de points  $p_i$  soit borné par  $c_1V$ .
2. Il existe une constante  $c_2 = c_2(n)$  telle que le nombre de boules  $B(p_i, 1/2)$  contenant un même point soit borné par  $c_2$ .

Il s'en suit que le complexe simplicial  $N$  est fini et qu'il existe, plus précisément, une constante  $C = C(n)$  telle que  $N$  contienne au plus  $CV$  simplexes.

Maintenant  $X \subset U \subset N_1(X)$  et, par définition de l'épaisseur de rétraction, l'ouvert  $U$  se rétracte sur  $X$ . Les groupes d'homologie de  $X$  s'injectent donc dans les groupes d'homologie de  $U$ , ou de manière équivalente, dans ceux de  $N$ . Il est immédiat que le

rang de  $H_*(N)$  est majoré par le nombre de simplexes de  $N$ . Pour majorer la taille de la partie de torsion de  $H_*(X)$  on utilise le lemme suivant, attribué à Gabber dans [47].

LEMME 5.2. — Soient  $A = \mathbf{Z}^a$  de base canonique  $(e_i)_{i=1,\dots,a}$  et  $B = \mathbf{Z}^b$  avec  $B \otimes \mathbf{R}$  muni du produit scalaire canonique. Soit  $f : A \rightarrow B$  une application  $\mathbf{Z}$ -linéaire. Alors, on a :

$$|(\text{coker } f)_{\text{tors}}| \leq (\max \|f(e_i)\|)^{\min\{a,b\}}.$$

Chaque groupe d'homologie  $H_k(N)$  est contenu dans le conoyau de l'application bord  $\partial_k : C_{k+1} \rightarrow C_k$  du complexe des chaînes simpliciales de  $N$ . Puisque l'application bord applique chaque  $(k+1)$ -simplexe sur une somme de  $k+2$  éléments de la base canonique de  $C_k$ , on obtient que

$$|H_k(N)_{\text{tors}}| \leq (k+2)^{C^V}.$$

□

Exemple 5.3. — Soit  $\Sigma$  une surface fermée de genre  $g$ . Pour tout  $n \geq 3$ , on peut plonger  $\Sigma$  dans un cylindre de dimension  $n$  de rayon 10 et de longueur  $10g$  de sorte que l'épaisseur de rétraction de ce plongement soit au moins 2, voir figure 5.

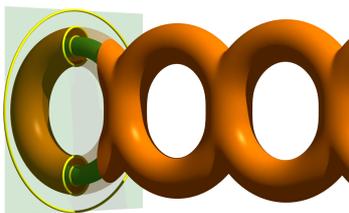


FIGURE 5. Surface dans un cylindre

Ce cylindre  $B_{n-1}(10) \times [0, 10g]$  peut à son tour être plongé de manière bi-Lipschitzienne (pour une certaine constante, indépendante de  $g$ ) dans une boule  $B_n(R)$  de dimension  $n$ , où (à une constante près)  $R$  est de l'ordre de  $g^{1/n}$ , cf. figure 6.

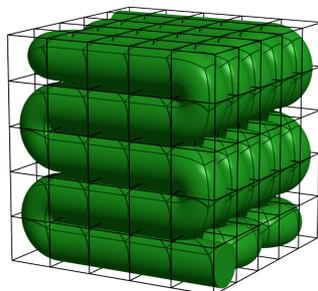


FIGURE 6. Un long cylindre plongé dans une boîte

On en conclut que  $\Sigma$  peut être plongée, avec épaisseur de rétraction au moins 1, dans une boule  $B_n(R)$ , où  $R$  est de l'ordre de  $g^{1/n}$ . Puisque  $H_1(\Sigma)$  est de rang  $2g$ , ce rayon ne peut pas être amélioré.

## 6. ÉPAISSEUR DE RÉTRACTION ET VOLUME HYPERBOLIQUE

L'aire d'une surface hyperbolique de genre  $g$  est égale à  $4\pi(g-1)$ . La proposition 5.1 implique donc que si  $\Sigma$  est plongée dans  $\mathbf{R}^n$  avec épaisseur de rétraction au moins 1, le volume  $V$  du 1-voisinage de  $\Sigma$  dans  $\mathbf{R}^n$  est supérieur ou égal à l'aire hyperbolique de (n'importe quelle structure hyperbolique sur)  $\Sigma$ . La proposition suivante montre que c'est un trait général des variétés hyperboliques.

PROPOSITION 6.1. — *Il existe une constante strictement positive  $C = C(n, d)$  telle que si  $M$  est une variété hyperbolique compacte de dimension  $d$  plongée dans  $\mathbf{R}^n$  avec épaisseur de rétraction au moins 1 et si  $V$  désigne le volume du 1-voisinage de  $M$  dans  $\mathbf{R}^n$ , alors on a :*

$$V \geq \frac{1}{C} \text{vol}(M).$$

*Démonstration.* — La norme simpliciale (sur  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ) d'une classe d'homologie  $h$  désigne le nombre minimal de simplexes singuliers requis pour écrire un cycle (singulier à coefficients dans  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ) représentant  $h$ . On note  $\|h\|_{\Delta}$  la norme simpliciale de  $h$ .

Si l'espace ambiant est une variété hyperbolique  $M$ , il découle des travaux de Milnor et Thurston [38] que, quitte à homotoper un cycle représentant  $h$ , on peut supposer que chacun des simplexes singuliers de ce cycle a pour image un simplexe géodésique dans  $M$ . On en déduit en particulier qu'il existe une constante strictement positive  $c = c(d)$  telle que si  $M$  est une variété hyperbolique compacte de dimension  $d$  la norme simpliciale  $\|[M]\|_{\Delta}$  de sa classe fondamentale est supérieure ou égale à  $c \text{vol}(M)$ .

Maintenant, la démonstration de la proposition 5.1 associe à la variété  $M$  un bon recouvrement d'un voisinage  $U$  de  $M$  dans  $\mathbf{R}^n$  dont le nerf  $N$  est un complexe simplicial formé d'au plus  $CV$  simplexes. Soit  $\Phi : U \rightarrow N$  une application subordonnée au recouvrement ; elle admet une inverse homotopique  $\Psi : N \rightarrow U$ . Puisque par ailleurs l'ouvert  $U$  se rétracte sur  $M$ , l'application identité  $M \rightarrow M$  se factorise, à homotopie près, par l'application  $M \rightarrow N$  obtenue en restreignant  $\Phi$  à  $M$ . Il s'en suit que l'application induite en homologie  $\Phi_* : H_*(M) \rightarrow H_*(N)$  préserve les normes simpliciales de  $M$  et  $N$ . On conclut que la norme  $\|[M]\|_{\Delta} = \|\Phi_*([M])\|_{\Delta}$  est majorée par le nombre de simplexes de  $N$  et donc que

$$c \text{vol}(M) \leq \|[M]\|_{\Delta} = \|\Phi_*([M])\|_{\Delta} \leq CV.$$

□

Il découle de la proposition 6.1 que si  $M$  est une variété hyperbolique compacte plongée dans une boule  $B_n(R)$  avec épaisseur de rétraction au moins 1 alors, à une constante multiplicative ne dépendant que de  $n$  et de la dimension de  $M$  près, le rayon  $R$  est supérieur à  $\text{vol}(M)^{1/n}$ . La puissance est optimale pour les revêtements cycliques (Exemple 1 de l'introduction) :

*Exemple 6.2.* — Soit  $M$  une variété hyperbolique compacte de dimension  $d$  telle qu'il existe un morphisme surjectif  $\pi_1(M) \rightarrow \mathbf{Z}$ . On peut alors former la suite des revêtements cycliques  $M_i \rightarrow M$  de degré  $i \geq 1$ . Le volume de  $M_i$  croît linéairement avec  $i$ . Mais, si  $n \geq 2d + 1$ , on peut plonger  $M_i$ , avec épaisseur de rétraction au moins 1, dans un tore solide  $\mathbf{S}_1(L) \times B_{n-1}(r)$  avec  $r$  majoré indépendamment de  $i$  et  $L$  de l'ordre de  $i$ . Or, par un procédé analogue à celui représenté figure 6, ce tore solide peut à son tour être plongé de manière bi-Lipschitzienne (pour une certaine constante, indépendante de  $i$ ) dans une boule  $B_n(R)$ , où (à une constante universelle près)  $R$  est de l'ordre de  $i^{1/n}$ . La variété  $M_i$  peut donc être plongée avec épaisseur de rétraction au moins 1 dans une boule  $B_n(R)$ , où  $R$  est de l'ordre de  $\text{vol}(M_i)^{1/n}$ .

Toutefois, en général, l'inégalité donnée par la proposition 6.1 n'est pas optimale. L'exemple suivant, particulier à la dimension 3, montre même qu'on est très loin du compte.

*Exemple 6.3.* — Dans [24] Gromov construit une suite infinie de 3-variétés compactes de courbure négative pincée, deux à deux non homéomorphes, et pourtant de volumes bornés. La chirurgie de Dehn hyperbolique de Thurston [48] permet en fait de construire une telle suite constituée uniquement de variétés hyperboliques. Par ce même procédé, Bader, Gelander et Sauer [4, Theorem 1.7] construisent une suite  $(M_p)_p$  premier de 3-variétés hyperboliques deux à deux non homotopes et vérifiant

- $\text{vol}(M_p) < 2.03$
- $H_1(M_p, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ .

En faisant tendre  $p$  vers l'infini, on déduit de la proposition 5.1 que le volume minimal du 1-voisinage de l'image d'un plongement d'épaisseur de rétraction au moins 1 d'une 3-variété hyperbolique de volume borné peut être arbitrairement grand.

La construction de la suite de l'exemple 6.3 est propre à la dimension 3, un théorème de Wang [50] affirme en effet que si  $d$  est un entier strictement supérieur à 3 il n'existe qu'un nombre fini de variétés hyperboliques de dimension  $d$  dont le volume est inférieur à une constante donnée. Une conjecture de Gelander [21] affirme même que si  $d$  est strictement supérieur à 3, il existe des constantes  $\alpha = \alpha(d)$  et  $\beta = \beta(d)$  telles que toute variété hyperbolique  $M$  de dimension  $d$  a le type d'homotopie d'un complexe simplicial constitué d'au plus  $\alpha \text{vol}(M)$  simplexes et dont chaque sommet appartient à au plus  $\beta$  simplexes. Lorsque  $d = 3$  Gelander conjecture que c'est encore le cas pour les variétés hyperboliques *arithmétiques* et cela vient d'être vérifié par Fraczyk [20].

D'un autre côté, en adaptant leur approche vers la conjecture 4.1, Gromov et Guth parviennent à plonger un complexe simplicial de géométrie bornée en contrôlant l'épaisseur de rétraction, voir [25, Theorem 3.1].

En mettant bout à bout ces résultats on obtient, dans le cas des variétés hyperboliques, le théorème suivant.

**THÉORÈME 6.4.** — *Soient  $d$  et  $n$  deux entiers naturels avec  $n \geq 2d + 1$  et soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Il existe une constante  $C = C(n, \varepsilon)$  telle que toute variété hyperbolique compacte, ou bien arithmétique de dimension  $d = 3$ , ou bien de dimension  $d$  quelconque mais vérifiant la conjecture de Gelander, est homotopiquement équivalente à un complexe simplicial plongé, avec épaisseur de rétraction au moins 1, dans une boule  $B_n(R) \subset \mathbf{R}^n$ , avec  $R \leq C \operatorname{vol}(M)^{\frac{1}{n-d} + \varepsilon}$ .*

L'exposant  $\frac{1}{n-d}$  n'est certainement pas optimal, il ne l'est en tout cas pas lorsque  $d = 2$  puisque, dans ce cas, on peut prendre  $\frac{1}{n}$  pour exposant. Il n'est même pas évident de conjecturer l'exposant optimal. Dans le paragraphe 8 on montre en tout cas que pour  $d$  supérieur à 3 et pour les variétés hyperboliques de congruence l'exposant  $\frac{1}{n}$  n'est pas suffisant pour plonger la variété elle-même. Pour cela on commence par démontrer un analogue topologique de la propriété d'expansion utilisée dans la preuve de la proposition 2.1.

## 7. EXPANSION TOPOLOGIQUE

On l'a dit, Gromov [24, §6.2] montre qu'il existe une constante  $C$  strictement positive telle que pour toute variété hyperbolique  $M$  compacte de dimension 3 et pour toute application lisse générique  $F : M \rightarrow \mathbf{R}$ , la somme des nombres de Betti d'au moins une fibre de  $F$  est supérieure à  $\frac{1}{C} h(M) \operatorname{vol}(M)$ . L'analogue de ce théorème en dimension plus grande n'est pas connu, on peut toutefois isoler du travail de Gromov et Guth un résultat de même esprit, valable en toute dimension  $d \geq 3$ , qui fait l'objet de ce paragraphe.

Soit  $M$  une variété hyperbolique compacte de dimension  $d$ . On appelle *approximation simpliciale* de  $M$  la donnée d'un complexe simplicial fini  $K$  de dimension  $d$  (que l'on confondra avec sa réalisation topologique) et de deux applications continues  $\Phi : M \rightarrow K$  et  $\Psi : K \rightarrow M$  telles que  $\Psi \circ \Phi$  soit homotope à l'identité. En particulier, toute triangulation de  $M$  est une approximation simpliciale de  $M$ .

On appelle *arborescence* de  $M$  la donnée d'une application continue  $p$  de  $M$  vers un arbre  $T$  telle que pour toute arête  $a$  de  $T$ , l'adhérence  $M_a$  de la préimage par  $p$  de l'intérieur de  $a$  soit une sous-variété compacte à bord lisse par morceaux dans  $M$ .

On dira qu'une arborescence  $(M_a)_{a \in T(1)}$  de  $M$  est *compatible* avec une approximation simpliciale  $(K, \Phi, \Psi)$  s'il existe une application continue  $\pi : K \rightarrow T$  qui envoie chaque simplexe de  $K$  dans un simplexe de  $T$  et vérifie :

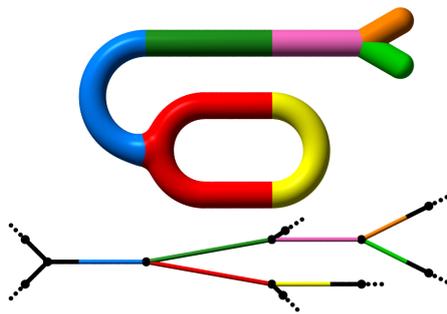


FIGURE 7. Arboration d'une surface

1. pour tout sommet  $s$  de  $T$ , l'application  $\Phi$  envoie la préimage  $p^{-1}(s)$  dans le sous-complexe  $\pi^{-1}(s) \subset K$ ,
2. pour toute arête  $a$  de  $T$ , l'application  $\Phi$  envoie  $M_a$  dans le sous-complexe  $K_a = \pi^{-1}(a)$  de  $K$ , et
3. l'application  $\Phi$  envoie le bord de  $M_a$  dans le  $(d - 1)$ -squelette de  $K_a$ .

PROPOSITION 7.1. — Soit  $d$  un entier supérieur ou égal à 3 et soit  $T$  un arbre de valence uniformément bornée par une constante  $v$ . Il existe une constante strictement positive  $C = C(v, d)$  telle que pour toute variété hyperbolique compacte  $M$  de dimension  $d$ , si  $(K, \Phi, \Psi)$  est une approximation simpliciale de  $M$  et  $(M_a)_{a \in T^{(1)}}$  une arborescence compatible de  $M$ , alors :

$$\sup_{a \in T^{(1)}} |K_a| \geq \frac{1}{C} h(M) \text{vol}(M).$$

*Démonstration.* — On fixe  $M$ ,  $K$  et  $\pi$ . Soit  $A$  une constante telle que pour toute arête  $a$  de  $T$  la préimage  $\pi^{-1}(a)$  contienne au plus  $A$  simplexes.

D'après Milnor et Thurston [38], quitte à homotoper  $\Psi$ , on peut supposer que  $\Psi$  envoie chaque  $k$ -simplexe de  $K$  sur un  $k$ -simplexe géodésique (peut-être dégénéré) dans  $M$ . Il existe en particulier une constante  $c$  ne dépendant que de la dimension  $d$  telle que pour tout  $k \geq 2$  et pour tout  $k$ -simplexe  $\Delta$  de  $K$ , l'image  $\Psi(\Delta)$  soit de  $k$ -volume inférieur à  $c$ .

Chaque  $M_a$  est une sous-variété compacte à bord lisse par morceaux dans  $M$ . On pensera aux  $M_a$  et à  $M$  comme à des  $d$ -chaînes singulières à coefficients dans  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ , on a alors  $M = \sum_a M_a$ . (Puisque  $M$  est compacte et  $p$  continue, la somme  $\sum_a M_a$  est finie.)

La variété  $M$  étant fermée, elle représente un cycle (toujours à coefficients dans  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ). Par contre les chaînes  $M_a$  peuvent avoir du bord : soient  $s_1$  et  $s_2$  les deux sommets de l'arête  $a$ . Puisque l'on travaille à coefficients dans  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ , on a :  $\partial M_a = Z_a(s_1) + Z_a(s_2)$ , où  $Z_a(s_j)$  désigne le  $(d - 1)$ -cycle, à coefficients dans  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ , correspondant à la partie du bord de  $M_a$  contenue dans la préimage  $p^{-1}(s_j)$ .

Puisque  $M$  est un cycle, le bord de la chaîne  $\sum_a M_a$  est nul. Mais la partie de ce bord contenue dans la préimage d'un sommet  $s$  de  $T$  par l'application  $p$  est exactement  $\sum_{a: s \in a} Z_a(s)$ . Pour tout sommet  $s$  de  $T$  on a donc  $\sum_{a: s \in a} Z_a(s) = 0$ .

Par ailleurs  $T$  étant un arbre, chaque cycle  $Z_a(s)$  est en fait un bord. En effet, la préimage par  $p$  de la composante de  $T - \{s\}$  qui contient  $a$  définit une  $d$ -chaîne dont le bord est précisément  $Z_a(s)$ .

On définit maintenant  $M'_a$  comme la  $d$ -chaîne singulière, à coefficients dans  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ , dans  $K$  donnée par  $\Phi(M_a)$ ; elle est contenue dans  $K_a$ . De la même manière on définit  $Z'_a(s_j)$  comme la  $(d-1)$ -chaîne singulière à coefficients dans  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  dans  $K$  donnée par  $\Phi(Z_a(s_j))$ ; elle est contenue dans l'intersection  $K_a(s_j)$  des sous-complexes  $\pi^{-1}(s_i)$  et  $K_a$  dans  $K$ . C'est un cycle et même un bord.

On note  $\overline{M}_a$  et  $\overline{Z}_a(s)$  les images respectives des chaînes singulières  $M'_a$  et  $Z'_a(s)$  — toutes les deux contenues dans  $K_a$  — par l'application  $\Psi$ . Par définition de  $A$  le sous-complexe  $K_a$  contient au plus  $A$  simplexes. Mais l'application  $\Psi$  envoie chacun de ces simplexes sur un simplexe géodésique. On en déduit que  $\overline{M}_a$  est de volume majoré par  $cA$  et que  $\overline{Z}_a(s)$  est de  $(d-1)$ -volume majoré par  $cA$ .

Par définition d'une approximation simpliciale, l'application  $\Psi \circ \Phi$  est homotope à l'identité. En particulier, dans  $H_d(M, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$  on a  $(\Psi \circ \Phi)_*([M]) = [M]$ . De plus chaque  $\overline{Z}_a(s)$  est trivial dans  $H_{d-1}(M, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ . Par définition de la constante de Cheeger  $h = h(M)$  on en déduit que  $\overline{Z}_a(s)$  borde une  $d$ -chaîne  $\overline{Y}_a(s)$  de volume

$$\text{vol}_d(\overline{Y}_a(s)) \leq h^{-1} \text{vol}_{d-1}(\overline{Z}_a(s)) \leq h^{-1} cA.$$

On peut alors décomposer la classe fondamentale  $[M]$  en une somme de cycles :

$$[M] = \left[ \sum_a \overline{M}_a \right] = \left[ \sum_a \left( \overline{M}_a + \sum_{s \in a} \overline{Y}_a(s) \right) + \sum_s \left( \sum_{a: s \in a} \overline{Y}_a(s) \right) \right]$$

où chaque terme entre parenthèses est un cycle puisque  $\partial \overline{Y}_a(s) = \overline{Z}_a(s)$  et que  $\sum_{a: s \in a} \overline{Z}_a(s) = 0$ . L'un de ces cycles doit être non trivial dans  $H_d(M, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$  et donc représenter un multiple non nul de la classe fondamentale. Le volume d'un tel cycle est nécessairement supérieur ou égal à  $\text{vol}(M)$ . Mais chaque terme entre parenthèses a un volume borné par  $cA + 2h^{-1}cA + vh^{-1}cA$ . Puisque la constante de Cheeger d'une variété hyperbolique compacte est uniformément majorée par une constante  $H$  (cf. (1)), on conclut que

$$\text{vol}(M) \leq ch^{-1}HA + 2h^{-1}cA + vh^{-1}cA = Ch^{-1}A$$

avec  $C = c(H + 2 + v)$ . Ce qui termine la démonstration de la proposition.  $\square$

## 8. ÉPAISSEUR DE RÉTRACTION DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES DE CONGRUENCE

En remplaçant les graphes expanseurs par l'expansion topologique de la proposition 7.1 dans la démonstration de la proposition 2.1 « de Kolmogorov-Barzdin », on obtient le théorème suivant qui, en vertu de la proposition 0.1, implique le théorème 0.2 de l'introduction.

**THÉORÈME 8.1.** — *Soient  $d$  et  $n$  deux entiers supérieurs ou égaux à 3. Il existe une constante strictement positive  $C = C(n, d)$  telle que si  $M$  est une variété hyperbolique compacte de dimension  $d$ , alors pour tout plongement de  $M$  dans  $\mathbf{R}^n$  d'épaisseur de rétraction au moins  $T$ , le volume du  $T$ -voisinage de l'image de  $M$  dans  $\mathbf{R}^n$  est supérieur ou égal à  $\frac{1}{C} T^n h(M)^{\frac{n}{n-1}} \text{vol}(M)^{\frac{n}{n-1}}$ .*

*Démonstration.* — On peut supposer  $T = 1$ . On considère donc un plongement de  $M$  dans  $\mathbf{R}^n$ , d'épaisseur de rétraction au moins 1. Soit  $X$  son image et soit  $V$  le volume (euclidien) de  $N_1(X)$ . Le théorème de découpage de Falconer (théorème 3.1) implique qu'il existe une famille d'hyperplans parallèles de  $\mathbf{R}^n$  dont chacun coupe le 1-voisinage  $N_1(X)$  selon une « tranche » de  $(n-1)$ -volume au plus  $C(n)V^{\frac{n-1}{n}}$ . Par une rotation des coordonnées on peut se ramener au cas où les hyperplans sont des niveaux de la projection  $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  donnée par la  $n$ -ième coordonnée  $x_n$ .

L'heuristique derrière la démonstration est qu'une fibre de l'application  $x_n| : X \rightarrow \mathbf{R}$  doit être « topologiquement compliquée ». Supposons un instant que la fibre elle-même soit d'épaisseur de rétraction au moins 1. Alors d'un côté le volume euclidien du 1-voisinage de cette tranche est de l'ordre de  $V^{\frac{n-1}{n}}$  et, d'un autre côté, la proposition 5.1 impose une minoration de ce même volume par le rang de l'homologie de la fibre.

En pratique, on sait seulement que le 1-voisinage de la fibre se rétracte dans  $X$ . Pour contourner ce problème, on découpe  $X$  en tranches « épaisses »  $X_j$ , préimages des intervalles  $[j, j+1] \subset \mathbf{R}$  par l'application  $x_n| : X \rightarrow \mathbf{R}$ . Quitte à modifier un peu les intervalles on peut supposer que chaque entier  $j$  est une valeur régulière de  $x_n|$ . Il s'agit alors d'appliquer la proposition 7.1 à cette projection.

Considérons la « triangulation » de  $\mathbf{R}$  associée aux intervalles  $[j, j+1]$ . Le complexe simplicial correspondant est un arbre. On construit une approximation simpliciale de  $X$  en considérant encore une fois le nerf d'un bon recouvrement de  $N_{1/2}(X)$  : soit  $p_1, p_2, \dots$  un ensemble maximal de points  $(1/4)$ -séparés dans  $N_{1/2}(X)$ . Les boules  $B(p_i, 1/4)$  recouvrent  $N_{1/2}(X)$ . Soit  $U$  la réunion et soit  $N$  le complexe simplicial fini obtenu en formant le nerf du recouvrement de  $U$  par les boules  $B(p_i, 1/4)$ . Soit  $\Phi : U \rightarrow N$  une application subordonnée au recouvrement. On a  $X \subset U \subset N_{3/4}(X)$  et, puisque  $X$  est d'épaisseur de rétraction au moins 1, on en déduit que  $U$  se rétracte sur  $X$ .

Chaque boule  $B(p_i, 1/4)$  rencontre au plus deux tranches  $\{j \leq x_n \leq j+1\}$ . Si elle est intégralement contenue dans une tranche on envoie le sommet correspondant de  $N$  sur la  $n$ -ième coordonnée de son centre  $p_i$ . Si elle rencontre deux tranches  $\{j-1 \leq x_n \leq j\}$

et  $\{j \leq x_n \leq j + 1\}$ , on envoie le sommet correspondant de  $N$  sur le sommet  $j$  de  $T$ . On étend finalement cette application linéairement en une application  $\pi : N \rightarrow T$  qui envoie chaque simplexe de  $N$  dans un simplexe de  $T$ .

Quitte à déformer l'application  $\Phi$ , on peut supposer que celle-ci envoie chaque tranche  $X_j$  dans le  $d$ -squelette du sous-complexe  $N_j = \pi^{-1}([j, j + 1])$  de  $N$  et qu'elle envoie le bord de  $X_j$  dans le  $(d - 1)$ -squelette de  $N_j$ .

Enfin, puisque  $N$  a le même type d'homotopie que  $U$ , il existe une application  $\Psi' : N \rightarrow U$  telle que  $\Psi' \circ \Phi : U \rightarrow U$  soit homotope à l'identité. On note  $K$  le  $d$ -squelette de  $N$  et  $\Psi : K \rightarrow X$  l'application obtenue en composant  $\Psi'$  avec la rétraction  $U \rightarrow X$ . Alors  $\Psi \circ \Phi : X \rightarrow X$  est homotope à l'identité. Le complexe  $K$  est donc une approximation simpliciale de  $X$  avec laquelle l'arborescence  $(X_j)$  de  $X$  — ici juste décomposition en tranches — est compatible. On peut alors appliquer la proposition 7.1. Et le théorème découle du lemme qui suit.  $\square$

LEMME 8.2. — *Pour tout  $j \in \mathbf{Z}$ , on a :*

$$|\pi^{-1}([j, j + 1])| \leq C(n) \text{vol}_{\text{Eucl}}(N_1(X))^{\frac{n-1}{n}}.$$

*Démonstration.* — On commence par remarquer qu'il existe une constante  $c = c(n)$  telle que tout point  $x \in \mathbf{R}^n$  ne soit contenu que dans au plus  $c$  boules  $B(p_i, 1/4)$ . Pour démontrer le lemme il s'agit donc de montrer qu'au plus  $C(n) \text{vol}_{\text{Eucl}}(N_1(X))^{\frac{n-1}{n}}$  boules rencontrent la tranche  $\{j \leq x_n \leq j + 1\}$ . Mais si une boule  $B(p_i, 1/4)$  rencontre cette tranche alors le volume de l'intersection  $B(p_i, 1/2) \cap \{j \leq x_n \leq j + 1\}$  est minoré par une constante qui ne dépend que de  $n$ . Or, de la même manière que pour les boules  $B(p_i, 1/4)$ , seulement un nombre borné, par une constante ne dépendant que de  $n$ , de boules  $B(p_i, 1/2)$  contiennent un point donné  $x \in \mathbf{R}^n$ . Puisque par ailleurs les boules  $B(p_i, 1/2)$  sont toutes contenues dans  $N_1(X)$ , à une constante ne dépendant que de  $n$  près, le nombre de boules rencontrant la tranche  $\{j \leq x_n \leq j + 1\}$  est finalement majoré par

$$\begin{aligned} \text{vol}_{\text{Eucl}}(N_1(X) \cap \{j \leq x_n \leq j + 1\}) &\leq \int_j^{j+1} \text{vol}_{n-1}(N_1(X) \cap \{x_n = t\}) dt \\ &\leq C(n) \text{vol}_{\text{Eucl}}(N_1(X))^{\frac{n-1}{n}}. \end{aligned}$$

$\square$

## 9. EXPANSION TOPOLOGIQUE ET DISTORSION DES NŒUDS

Revenons aux variétés de dimension 3. Un théorème de Hilden [27] et Montesinos [39] affirme que toute 3-variété compacte orientable peut être obtenue comme un revêtement de degré 3 de la sphère  $\mathbf{S}_3$  ramifié au-dessus d'un nœud. Une autre manière de quantifier la complexité topologique d'une variété de dimension 3 passe alors par la théorie des

nœuds. Un nœud est un plongement du cercle dans  $\mathbf{R}^3$ . On peut mesurer la complexité géométrique de l'image  $K \subset \mathbf{R}^3$  d'un tel plongement par sa *longueur conforme*

$$\ell_c(K) = \sup_{x \in \mathbf{R}^3, r > 0} \frac{1}{r} \text{longueur}(K \cap B(x, r)).$$

Gromov et Guth montrent que si  $M$  est une 3-variété hyperbolique « compliquée » et que  $M$  peut être obtenue comme un revêtement de degré 3 de la sphère  $\mathbf{S}_3$  ramifié au-dessus d'un nœud  $K$ , alors  $K$  est nécessairement de grande longueur conforme :

**THÉORÈME 9.1.** — *Soit  $M$  une variété hyperbolique compacte de dimension 3. Si  $F : M \rightarrow \mathbf{S}_3$  est un revêtement de degré 3 ramifié au-dessus d'un nœud  $K$ , alors :*

$$\ell_c(K) \geq \frac{1}{C} h(M) \text{vol}(M)$$

pour un certaine constante absolue strictement positive  $C$ .

*Remarque 9.2.* — 1. On mesure la longueur conforme de  $K$  dans  $\mathbf{R}^3$ . Il suffit pour cela de choisir un point  $q \in \mathbf{S}_3$  hors de  $K$  et d'identifier  $\mathbf{S}_3 - \{q\}$  à  $\mathbf{R}^3$  par projection stéréographique. On pourrait tout aussi bien, à une constante absolue près, mesurer la longueur conforme de  $K$  relativement à la métrique ronde de  $\mathbf{S}_3$ .

2. La conclusion du théorème 9.1 est satisfaite par tout représentant de la classe d'isotopie de  $K$ .

La démonstration du théorème 9.1 se déroule en deux étapes. La complexité de  $K$  est capturée à travers la construction d'une triangulation de  $\mathbf{S}_3$  contenant le nœud dans son 1-squelette. On ne peut pas borner le nombre de simplexes d'une telle triangulation en fonction de  $\ell_c(K)$  (il y a une infinité de nœuds de longueur conforme inférieure à 100), mais on peut borner la taille des fibres au-dessus d'un arbre. Finalement, l'application  $F$  permet de relever la triangulation de  $\mathbf{S}_3$  en une triangulation de  $M$  et on conclut la démonstration du théorème 9.1 en appliquant la proposition 7.1.

### 9.1. Construction d'une triangulation « fine » de $\mathbf{S}_3$

Soit  $K \subset \mathbf{S}_3$  un nœud.

**LEMME 9.3.** — *Il existe une triangulation  $\text{Tri}_0$  de  $\mathbf{S}_3$ , un arbre  $T$  de valence bornée par une constante absolue et une application simpliciale  $\pi_0 : \text{Tri}_0 \rightarrow T$  tels que*

1. le nœud  $K$  est contenu dans le 1-squelette de  $\text{Tri}_0$ ,
2. l'application  $\pi_0$  envoie chaque 3-simplexe dans une (et une seule) arête de  $T$ , et
3. pour toute arête  $a$  de  $T$ , le cardinal de  $\pi_0^{-1}(a)$  est majoré, à une constante multiplicative absolue près, par la longueur conforme  $\ell_c(K)$  de  $K$ .

*Esquisse de démonstration.* — Au prix d’une petite déformation, d’un coût négligeable sur la longueur conforme, on peut supposer que le nœud  $K$  est une ligne polygonale dans  $\mathbf{R}^3$ .

Partant d’un grand cube  $Q_0$  contenant le nœud  $K$ , on construit par récurrence une suite de parallélépipèdes rectangles  $Q$  emboîtés de sorte que la longueur  $L(Q)$  du plus petit côté de  $Q$  soit divisée par 2 à chaque étape et que le rapport des longueurs du plus grand et du plus petit côté — l’*excentricité* de  $Q$  — reste majoré par 10. Si  $Q$  est l’un des parallélépipèdes obtenus à l’issue de l’étape  $n$ , on le décompose à l’étape  $n+1$  en une réunion d’un nombre uniformément borné, compris disons entre 8 et 2000, de parallélépipèdes. La suite des subdivisions barycentriques cubiques du cube initial suffit pour cela mais, en prenant l’intersection de  $Q$  avec un translaté aléatoire du réseau cubique  $\mathcal{C}$  de maille  $L(Q)/2$  et d’axes parallèles aux axes de  $Q$ , on peut de plus s’assurer que la propriété suivante soit vérifiée.

PROPRIÉTÉ 9.4. — *À chaque étape, le cardinal de l’intersection d’une face d’un parallélépipède de la décomposition avec le nœud  $K$  reste inférieur à  $1000\ell_c(K)$ .*

*Explication.* — Étant donné un parallélépipède  $Q$  de la décomposition, le nombre moyen d’intersection entre un translaté aléatoire d’un plan de  $\mathcal{C}$  et la courbe  $K \cap Q$  est majoré par  $\frac{1}{L(Q)/2} \text{longueur}(K \cap Q)$ . Mais, puisque  $Q$  est contenu dans une boule de rayon  $10L(Q)$ , la longueur de  $K \cap Q$  est majorée par  $10L(Q)\ell_c(K)$ . Le nombre moyen d’intersection entre un translaté aléatoire du réseau  $\mathcal{C}$  et la courbe  $K \cap Q$  est donc majoré par  $60\ell_c(K)$ . Quitte à perdre un peu sur la constante 60 on peut finalement se restreindre aux translatsés de  $\mathcal{C}$  qui découpent  $Q$  en des parallélépipèdes d’excentricité majorée par 10.  $\square$

Le contrôle uniforme sur l’excentricité permet essentiellement de penser que la suite des parallélépipèdes emboîtés est obtenue par subdivision barycentrique cubique tout en satisfaisant à la propriété 9.4.

À l’issue d’un nombre fini suffisamment grand d’étapes, tous les parallélépipèdes sont de diamètre inférieur à la longueur minimale d’un segment de  $K$  et à la plus petite distance entre deux segments non adjacents de  $K$ . L’intersection de  $K$  avec chacun de ces cubes est donc contenue dans un unique segment de  $K$  ou dans la réunion de deux segments adjacents.

On peut rétrécir chaque parallélépipède de notre suite finie de subdivisions de manière à ce que la propriété 9.4 soit encore vérifiée. On obtient ainsi une décomposition du cube  $Q_0$  qui, dans le cas de la subdivision barycentrique cubique, est représentée à gauche dans la figure 8. On lui associe, comme représenté sur la figure, un arbre enraciné fini  $T_0$  sur lequel se projette le cube  $Q_0$ . L’arbre est de valence 8 dans le cas de la suite des divisions barycentriques cubiques et de valence comprise entre 8 et 2000 en général. Le 2-squelette de la première subdivision de  $Q_0$  est tout entier envoyé sur la racine de l’arbre. Les arêtes qui partent de ce sommet sont les images des différentes faces épaissies qu’il faut traverser pour rejoindre le 2-squelette d’un parallélépipède rétréci. Et ainsi

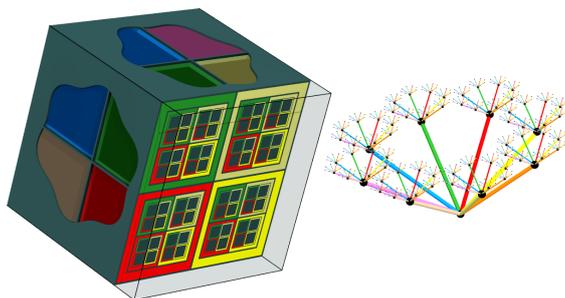


FIGURE 8. L'arboration associée à la suite des subdivisions barycentriques

de suite... La préimage d'un sommet terminal est l'un des petits parallélépipèdes pleins par lesquels se termine la suite finie de subdivision.

On peut finalement projeter toute la sphère  $\mathbf{S}_3$  sur un arbre  $T$ . Pour cela on ajoute à  $T_0$  un sommet « à l'infini » que l'on relie à la racine de l'arbre  $T_0$  par une arête. On envoie le complémentaire de  $Q_0$  dans  $\mathbf{S}_3$  sur la réunion de ce nouveau sommet et de l'intérieur de cette nouvelle arête.

Pour conclure, il reste à trianguler les différentes préimages des arêtes de  $T$ . La plupart de ces préimages sont réunion des quatre faces épaissies d'un parallélépipède de la subdivision. D'après la propriété 9.4 moins de  $10^4 \ell_c(K)$  simplexes suffisent pour trianguler une telle face épaissie tout en s'assurant que l'intersection avec  $K$  est contenue dans le 1-squelette. Les préimages restantes sont des parallélépipèdes pleins dont l'intersection avec  $K$  est contenue dans moins de deux segments de  $K$ . On peut donc trianguler ces parallélépipèdes à l'aide d'un nombre uniformément borné de simplexes tout en s'assurant que l'intersection avec  $K$  soit contenue dans le 1-squelette. La triangulation de  $\mathbf{S}_3$  obtenue vérifie alors bien les propriétés annoncées dans le lemme 9.3.  $\square$

## 9.2. Démonstration du théorème 9.1

Le nœud  $K$  étant contenu dans le 1-squelette de la triangulation  $\text{Tri}_0$  de  $\mathbf{S}_3$  fournie par le lemme 9.3, on peut tirer en arrière cette triangulation par le revêtement  $F$  pour obtenir une triangulation  $\text{Tri}$  de  $M$ . L'application induite  $F : \text{Tri} \rightarrow \text{Tri}_0$  est simpliciale. Soit  $\pi$  la composée  $\pi_0 \circ F : \text{Tri} \rightarrow T$ ; elle vérifie encore les conclusions 2 et 3 du lemme 9.3. En vertu du point 2 les préimages  $\pi^{-1}(a)$  ( $a \in T^{(1)}$ ) induisent une arboration de  $M$  qui, par construction, est compatible avec la triangulation  $\text{Tri}$  de  $M$ . On peut leur appliquer la proposition 7.1 et il découle du point 3 du lemme 9.3 qu'il existe une constante absolue strictement positive  $C$  telle que

$$\ell_c(K) \geq \frac{1}{C} h(M) \text{vol}(M).$$

### 9.3. Un corollaire

On peut en particulier appliquer le théorème 9.1 à une suite infinie  $(M_q)$  de revêtements de congruence d'une 3-variété hyperbolique compacte (Exemple 2 de l'introduction). Le théorème d'Hilden et Montesinos implique en effet que chaque variété  $M_q$  peut être obtenue comme un revêtement de degré 3 de la sphère  $\mathbf{S}_3$  ramifié au-dessus d'un nœud  $K_q$ , que l'on appellera « de congruence ». Et il découle du théorème 9.1 qu'il existe une constante absolue strictement positive  $C$  telle que

$$(6) \quad \ell_c(K_q) \geq \frac{1}{C} \text{vol}(M_q) \rightarrow \infty.$$

Cela permet de retrouver un théorème récent de Pardon [40]. La *distorsion*  $\delta(K)$  d'un nœud  $K \subset \mathbf{R}^3$  est un invariant défini par Gromov :

$$\delta(K) = \sup_{x,y \in K} \frac{\text{dist}_K(x,y)}{\text{dist}_{\mathbf{R}^3}(x,y)},$$

où  $\text{dist}_K(x,y)$  est la distance *le long du nœud* entre  $x$  et  $y$  et  $\text{dist}_{\mathbf{R}^3}(x,y)$  est la distance euclidienne. Dire que  $\delta(K)$  est « grand » signifie qu'il y a des points « proches » dans l'espace qui sont « loin » le long du nœud. En 1983 Gromov posait la question provocante de l'existence, dans n'importe quelle classe d'isotopie de nœud, d'un représentant de distorsion inférieure à 100. Cette question est restée ouverte jusqu'à ce que Pardon montre :

**THÉORÈME 9.5.** — *Il existe des classes d'isotopie de nœuds dans  $\mathbf{R}^3$  qui nécessitent une distorsion arbitrairement grande.*

La preuve de Pardon montre plus précisément qu'un nœud  $K$  dans la classe d'isotopie du nœud torique  $(p, p+1)$  (voir figure 9) a toujours une distorsion  $\delta(K)$  supérieure à  $p/160$ . On pourra se référer à [32] pour une belle introduction élémentaire au théorème de Pardon.

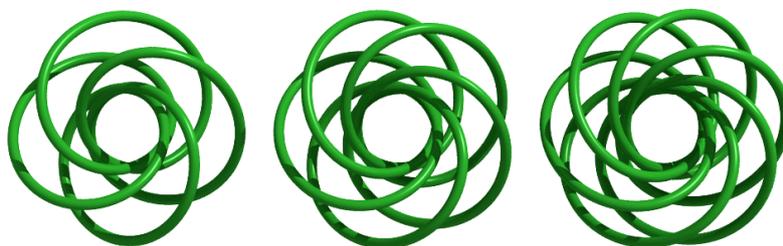


FIGURE 9. Les nœuds toriques  $(4, 5)$ ,  $(5, 6)$  et  $(6, 7)$

L'inégalité (6) permet de donner une démonstration différente du théorème 9.5 à l'aide, cette fois, des « nœuds de congruence »  $K_q$ .

*Démonstration du théorème 9.5.* — D'après (6) il suffit en effet de remarquer que si  $K \subset \mathbf{R}^3$  est un nœud, alors  $\delta(K) \geq \frac{1}{4}\ell_c(K)$ . Pour cela, on fixe  $x \in \mathbf{R}^3$  et  $r > 0$ . Soit  $L$  la longueur de  $K \cap B(x, r)$ . Il s'agit de montrer que  $\delta(K)$  est supérieur à  $L/4r$ .

Considérons donc deux points  $y, z \in K \cap B(x, r)$  tels que  $\text{dist}_K(y, z) \geq L/2$ . Puisque, dans  $\mathbf{R}^3$ , les points  $y$  et  $z$  sont à distance inférieure à  $2r$ , on obtient bien que

$$\delta(K) \geq \frac{\text{dist}_K(y, z)}{\text{dist}_{\mathbf{R}^3}(y, z)} \geq L/4r.$$

□

## APPENDICE : CONSTANTE DE CHEEGER ET REVÊTEMENTS DE CONGRUENCE

La proposition 0.1 découle du résultat bien plus général suivant, dit « d'approximation super forte », dû à Salehi-Golsefidy et Varjú et d'un argument dû à Long, Lubotzky et Reid [33] que nous décrivons ci-dessous.

**THÉORÈME 9.6.** — *Soit  $\mathbf{G} \subset \text{GL}_N$  un groupe algébrique, semi-simple, connexe, affine sur  $\mathbf{Q}$ . Si  $\Gamma \subset \mathbf{G}(\mathbf{Q})$  est un sous-groupe Zariski-dense engendré par un ensemble fini  $S$ , alors il existe un entier  $q_0$  et un nombre réel strictement positif  $\varepsilon = \varepsilon(S) > 0$  tels que pour tout entier  $q$  sans facteur carré et premier à  $q_0$ , la réduction  $\Gamma_q$  de  $\Gamma$  modulo  $q$  est bien définie<sup>(2)</sup> et le graphe de Cayley associé  $\text{Cay}(\Gamma_q, S_q)$  est un  $\varepsilon$ -expandeur.*

Le théorème 9.6 s'applique en effet à la suite  $(\Gamma_q)$  de l'Exemple 2 de l'introduction. Or, un théorème de Brooks [10] et Burger [12] affirme que la première valeur propre non nulle  $\lambda_1$  du laplacien de la variété hyperbolique  $\Gamma_q \backslash \mathbf{H}_d$  est minorée, à une constante universelle près, par la constante d'expansion du graphe de Cayley  $\text{Cay}(\Gamma_q, S_q)$  associé à un ensemble fini  $S$  de générateurs correspondant au choix d'un domaine fondamental pour l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbf{H}_d$ . Finalement, une inégalité de Buser [13] affirme que la constante de Cheeger d'une variété hyperbolique est toujours minorée par  $\frac{1}{10}(\sqrt{10\lambda_1 + (d-1)^2} - (d-1))$ . Cela conclut la démonstration de la proposition 0.1.

*Remarque 9.7.* — Le théorème 9.6 a une longue histoire. Si l'on suppose que  $\Gamma$  est un réseau dans le groupe  $\mathbf{G}(\mathbf{Q})$  on dit que  $\Gamma$  un « groupe arithmétique ». Dans ce cas, plus précisément dans le cas où  $\Gamma$  est un réseau de congruence, un théorème de Clozel [15] affirme que le  $\lambda_1$  de l'espace localement symétrique associé à  $\Gamma$  est minoré par une constante strictement positive qui ne dépend que du groupe réel  $\mathbf{G}(\mathbf{R})$ . Le premier résultat de ce type, pour le groupe  $\text{SL}_2$ , est un célèbre théorème de Selberg [46]. En ce qui concerne les variétés hyperboliques de dimension  $d \geq 3$ , Burger et Sarnak [11]

2. Égale à  $\mathbf{G}(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})$  si  $\mathbf{G}$  est simplement connexe.

conjecturent que pour toute variété hyperbolique de congruence, on a  $\lambda_1 \geq (d - 2)$ . Cette minoration, optimale, est démontrée dans [5] pour tout  $d \geq 4$ .

Le cas où, selon la terminologie de Sarnak [44], le groupe  $\Gamma$  est « fin » dans  $\mathbf{G}(\mathbf{Q})$ , c'est-à-dire Zariski-dense sans être un réseau, relève d'autres techniques. La démonstration du théorème 9.6 consiste à étendre les techniques de Bourgain et Gamburd [8] du groupe  $\mathrm{SL}_2$  à n'importe quel  $\mathbf{G}$  comme dans le théorème 9.6. Cela est rendu possible par les travaux de Pyber et Szabó [43] et Breuillard, Green et Tao [9] sur les groupes approximatifs.

*Remerciements.* Un grand merci à Jos Leys qui a réalisé toutes les figures. Merci aussi à Hélène Eynard-Bontemps, Étienne Ghys, Grégory Ginot et Clémence Labrousse pour leurs corrections sur une première version de ce texte.

## RÉFÉRENCES

- [1] M. Abert, N. Bergeron, I. Biringer, T. Gelander, N. Nikolov, J. Raimbault & I. Samet. On the growth of  $L^2$ -invariants for sequences of lattices in Lie groups. *Ann. of Math. (2)* **185** (2017), 711–790.
- [2] D. Abramovich. A linear lower bound on the gonality of modular curves. *Internat. Math. Res. Notices* **20** (1996), 1005–1011.
- [3] D. Bachman, D. Cooper & M. E. White. Large embedded balls and Heegaard genus in negative curvature. *Algebr. Geom. Topol.* **4** (2004), 31–47.
- [4] U. Bader, T. Gelander & R. Sauer. Homology and homotopy complexity in negative curvature. *ArXiv e-prints*, décembre 2016.
- [5] N. Bergeron & L. Clozel. Quelques conséquences des travaux d'Arthur pour le spectre et la topologie des variétés hyperboliques. *Invent. Math.* **192** (2013), 505–532.
- [6] A. S. Besicovitch. On Kakeya's problem and a similar one. *Math. Z.* **27** (1928), 312–320.
- [7] V. Borrelli & J.-L. Rullièrre. Les aiguilles tournent, le mystère demeure. La conjecture de Kakeya. *Images des maths*, 2014.
- [8] J. Bourgain & A. Gamburd. Uniform expansion bounds for Cayley graphs of  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ . *Ann. of Math. (2)* **167** (2008), 625–642.
- [9] E. Breuillard, B. Green & T. Tao. Approximate subgroups of linear groups. *Geom. Funct. Anal.* **21** (2011), 774–819.
- [10] R. Brooks. The spectral geometry of a tower of coverings. *J. Differential Geom.* **23** (1986), 97–107.
- [11] M. Burger & P. Sarnak. Ramanujan duals. II. *Invent. Math.* **106** (1991), 1–11.

- [12] M. Burger. Spectre du laplacien, graphes et topologie de Fell. *Comment. Math. Helv.* **63** (1988), 226–252.
- [13] P. Buser. A note on the isoperimetric constant. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **15** (1982), 213–230.
- [14] J. Cheeger. A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian, pages 195–199, 1970.
- [15] L. Clozel. Démonstration de la conjecture  $\tau$ . *Invent. Math.* **151** (2003), 297–328.
- [16] J. S. Ellenberg, C. Hall & E. Kowalski. Expander graphs, gonality, and variation of Galois representations. *Duke Math. J.* **161** (2012), 1233–1275.
- [17] S. Evra & T. Kaufman. Bounded Degree Cosystolic Expanders of Every Dimension. *ArXiv e-prints*, octobre 2015.
- [18] K. J. Falconer. Continuity properties of  $k$ -plane integrals and Besicovitch sets. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **87** (1980), 221–226.
- [19] G. Faltings. Diophantine approximation on abelian varieties. *Ann. of Math. (2)* **133** (1991), 549–576.
- [20] M. Fraczyk. Strong Limit Multiplicity for arithmetic hyperbolic surfaces and 3-manifolds. *ArXiv e-prints*, décembre 2016.
- [21] T. Gelander. Homotopy type and volume of locally symmetric manifolds. *Duke Math. J.* **124** (2004), 459–515.
- [22] É. Ghys. Groupes aléatoires (d’après Misha Gromov,...). Séminaire Bourbaki, Vol. 2002/2003, Exp. No. 916, *Astérisque* **294** (2003), 173–204. .
- [23] A. Salehi Golsefidy & P. P. Varjú. Expansion in perfect groups. *Geom. Funct. Anal.* **22** (2012), 1832–1891.
- [24] M. Gromov. Singularities, expanders and topology of maps. I. Homology versus volume in the spaces of cycles. *Geom. Funct. Anal.* **19** (2009), 743–841.
- [25] M. Gromov & L. Guth. Generalizations of the Kolmogorov-Barzdin embedding estimates. *Duke Math. J.* **161** (2012), 2549–2603.
- [26] L. Guth. The width-volume inequality. *Geom. Funct. Anal.* **17** (2007), 1139–1179.
- [27] H. M. Hilden. Three-fold branched coverings of  $S^3$ . *Amer. J. Math.* **98** (1976), 989–997.
- [28] A. N. Kolmogorov & Ya. M. Barzdin. On the realization of networks in three-dimensional space, in *Selected Works of Kolmogorov, Volume 3*, A. N. Shiryaev ed, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [29] T. Kaufman, D. Kazhdan & A. Lubotzky. Isoperimetric inequalities for Ramanujan complexes and topological expanders. *Geom. Funct. Anal.* **26** (2016), 250–287.
- [30] E. Kowalski. Crible en expansion. Séminaire Bourbaki, Vol. 2010/2011, Exp. No. 1028, *Astérisque* **348** (2012), 17–64.

- [31] M. Lackenby. Heegaard splittings, the virtually Haken conjecture and property  $(\tau)$ . *Invent. Math.* **164** (2006), 317–359.
- [32] F. Le Roux & P. Massot. Des nœuds indéformables. *Images des maths*, 2015.
- [33] D. D. Long, A. Lubotzky & A. W. Reid. Heegaard genus and property  $\tau$  for hyperbolic 3-manifolds. *J. Topol.* **1** (2008), 152–158.
- [34] A. Lubotzky. *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*, vol. 125, Birkhauser, 2010.
- [35] A. Lubotzky. *Expander graphs in pure and applied mathematics*, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (2012), 113–162.
- [36] G. A. Margulis. Explicit constructions of expanders. *Problemy Peredači Informacii* **9** (1973), 71–80.
- [37] J. J. Millson. On the first Betti number of a constant negatively curved manifold. *Ann. of Math. (2)* **104** (1976), 235–247.
- [38] J. Milnor & W. Thurston. Characteristic numbers of 3-manifolds. *Enseignement Math. (2)* **23** (1977), 249–254.
- [39] J. M. Montesinos. Three-manifolds as 3-fold branched covers of  $S^3$ . *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **27** (1976), 85–94.
- [40] J. Pardon. On the distortion of knots on embedded surfaces. *Ann. of Math. (2)* **174** (2011), 637–646.
- [41] M. S. Pinsker. On the complexity of a concentrator. In 7th International Teletraffic Conference, pages 318/1–318/4, 1973.
- [42] J. T. Pitts & J. H. Rubinstein. Existence of minimal surfaces of bounded topological type in three-manifolds. In *Miniconference on geometry and partial differential equations (Canberra, 1985)*, volume 10 of *Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ.*, pages 163–176. Austral. Nat. Univ., Canberra, 1986.
- [43] L. Pyber & E. Szabó. Growth in finite simple groups of Lie type. *J. Amer. Math. Soc.* **29** (2016), 95–146.
- [44] P. Sarnak. Notes on thin matrix groups. In *Thin groups and superstrong approximation*, volume 61 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 343–362. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014.
- [45] A. Selberg. On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces. In *Contributions to function theory*, pages 147–164. Bombay, 1960.
- [46] A. Selberg. On the estimation of Fourier coefficients of modular forms. In *Proc. Sympos. Pure Math., Vol. VIII*, pages 1–15. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965.
- [47] C. Soulé. Perfect forms and the Vandiver conjecture. *J. reine angew. Math.* **517** (1999), 209–221.
- [48] W. P. Thurston. Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **6** (1982), 357–381.

- [49] A. Valette. Graphes de Ramanujan et applications. Séminaire Bourbaki. Vol. 1996/1997, Exp. No. 829, *Astérisque* **245** (1997), 247–276.
- [50] H. C. Wang. Topics on totally discontinuous groups. Pure and Appl. Math. **8** (1972), 459–487.
- [51] S.-T. Yau. An application of eigenvalue estimate to algebraic curves defined by congruence subgroups. *Math. Res. Lett.* **3** (1996), 167–172.
- [52] P. G. Zograf. Small eigenvalues of automorphic Laplacians in spaces of cusp forms. Automorphic functions and number theory, II. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI)*, **134** (1984), 157–168.

Nicolas BERGERON

Université Pierre et Marie Curie

IMJ–PRG

UMR 7586 du CNRS

4 place Jussieu

F–75252 Paris Cedex 05

*E-mail* : nicolas.bergeron@imj-prg.fr