Séminaire BOURBAKI Octobre 2017
70ème année, 2017-2018, n^{o} 1136

PROGRÈS RÉCENTS CONCERNANT LE PROGRAMME DE ZIMMER [d'après A. Brown, D. Fisher et S. Hurtado]

par **Serge CANTAT**

1. LE PROGRAMME DE ZIMMER

1.1. Réseaux des groupes de Lie

1.1.1. — Soit G un groupe de Lie connexe dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est simple (de dimension > 1) et le centre est fini. La représentation adjointe $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathsf{GL}(\mathfrak{g})$ est obtenue en dérivant l'action de G sur lui-même par conjugaison ; son noyau est le centre de G. Le **rang** réel $\mathrm{rg}(G)$ est la dimension maximale d'un sous-groupe de Lie $A \subset G$ tel que $\mathrm{Ad}(A)$ soit diagonalisable (sur $\mathbf{R}$). Par exemple, le rang réel des groupes $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$, $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{C})$ et $\mathsf{Sp}_{2n}(\mathbf{R})$ est égal à n ; celui de $\mathsf{SO}_{p,q}(\mathbf{R})$ est le minimum de p et q.

Nous noterons vol_G une mesure de Haar sur G. Un **réseau** de G est un sous-groupe discret $\Gamma \subset G$ tel que la mesure de Haar du quotient G/Γ est finie ; il est **uniforme** si G/Γ est compact. Par exemple, $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{Z})$ est un réseau non uniforme de $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$.

Lorsque $\mathrm{rg}(G) \geq 2$, les réseaux héritent de nombreuses propriétés du groupe G. Gregory Margulis montre ainsi que les réseaux sont **presque simples** : *leurs sous-groupes distingués sont ou bien d'indice fini, ou bien finis et contenus dans le centre de G.* Il établit aussi un théorème de rigidité décrivant les représentations linéaires des réseaux en fonction de celles de G. Pour l'énoncer nous supposerons que G est algébriquement simplement connexe, c'est-à-dire que tout morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \to \mathfrak{sl}_m(\mathbf{R})$ s'étend en un homomorphisme de groupes de Lie $G \to \mathsf{SL}_m(\mathbf{R})$; cette hypothèse n'est pas essentielle car on s'y ramène en remplaçant G par un revêtement fini.

Théorème 1.1 (super-rigidité de Margulis, [51, 56]). — *Soit G un groupe de Lie connexe et algébriquement simplement connexe, dont l'algèbre de Lie est simple, le centre est fini et le rang est ≥ 2. Soient Γ un réseau de G et $\varphi\colon \Gamma \to \mathsf{GL}_m(\mathbf{R})$ un homomorphisme. Il existe alors un sous-groupe $\Gamma' \subset \Gamma$ d'indice fini, un homomorphisme de groupes de Lie $\hat\varphi\colon G \to \mathsf{GL}_m(\mathbf{R})$, un sous-groupe compact $C \subset \mathsf{GL}_m(\mathbf{R})$ qui centralise $\hat\varphi(G)$, et un homomorphisme $\psi\colon \Gamma \to C$ tels que $\varphi(\gamma) = \hat\varphi(\gamma)\psi(\gamma)$ pour tout élément γ de Γ'.*

Si $\varphi(\Gamma)$ n'est pas borné et si son adhérence de Zariski est simple, le groupe C est réduit à l'identité. À l'opposé, considérons un homomorphisme $\varphi\colon \Gamma \to \mathsf{GL}_m(\mathbf{C})$ et supposons que l'adhérence de $\varphi(\Gamma)$ pour la topologie usuelle soit un groupe compact et simple. Il existe alors un automorphisme σ du corps $(\mathbf{C},+,\times)$ tel que $\sigma(\varphi(\Gamma))$ soit discret, et un homomorphisme de groupes de Lie $\hat{\varphi}\colon G \to \mathsf{GL}_m(\mathbf{C})$ tel que $\sigma(\varphi(\gamma)) = \hat{\varphi}(\gamma)$ pour tous les éléments γ d'un sous-groupe d'indice fini de Γ.

1.1.2. — Ces énoncés montrent que les représentations linéaires de Γ se déduisent de celles de G ; en particulier, *la dimension minimale d'une représentation linéaire* $\Gamma \to \mathsf{GL}_m(\mathbf{C})$ *dont le noyau est fini coïncide avec la dimension minimale d'une représentation non triviale de* G. Après avoir étendu le théorème de Margulis en un théorème de rigidité pour des cocycles (voir le § 6.1), Robert Zimmer demanda si cette dernière propriété avait un analogue non linéaire, c'est-à-dire pour les actions de Γ par difféomorphismes sur des variétés compactes. [(1)]

Avant de formuler l'une des questions de Zimmer, considérons l'exemple d'une action $\mathcal{C}^\infty$ et fidèle de $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$ sur une variété compacte connexe M de dimension d. Notons K le sous-groupe compact $\mathsf{SO}_{n+1}(\mathbf{R})$. La moyenne d'une métrique riemannienne s_0 sous l'action de K produit une métrique riemannienne s sur M qui est K-invariante. Soient x un point de M et K_x son stabilisateur ; on a $\dim(K) \leq \dim(K_x) + d$. Par ailleurs, la différentielle

$$D\colon k \in K_x \mapsto Dk_x \in \mathsf{GL}(T_xM) \tag{1}$$

détermine un homomorphisme injectif car toute isométrie de (M, s) qui fixe x est uniquement déterminée par sa différentielle en x. L'image de D est contenue dans le groupe orthogonal pour la métrique euclidienne s_x et celui-ci est de dimension $d(d-1)/2$. Ainsi, $\dim(K) = n(n+1)/2 \leq d + d(d-1)/2$ et donc $n \leq d$.

Cet argument montre qu'il n'existe pas d'action fidèle du groupe $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$ en dimension $d < n$, et cette borne est optimale car $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$ agit sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbf{R})$ et la sphère $\mathbb{S}^n$. Plus généralement, on démontre que *les actions fidèles d'un groupe de Lie simple* G *ne peuvent apparaître en dimension* $< \mathrm{rg}(G)$.

La question suivante peut être tirée des conjectures de Zimmer et illustre bien ces dernières. Elle demande si le résultat précédent s'étend aux réseaux : *un réseau* Γ *de* G *peut-il agir fidèlement sur une variété compacte de dimension* $< \mathrm{rg}(G)$ *par difféomorphismes ?* Aaron Brown, David Fisher et Sebastian Hurtado viennent d'y répondre pour les réseaux uniformes.

1. *Tout groupe dénombrable agit fidèlement sur une surface de Riemann connexe non compacte.* Considérons en effet l'action homographique standard du groupe modulaire $\mathsf{PSL}_2(\mathbf{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$. Soit F un sous-groupe libre d'indice fini dans $\mathsf{PSL}_2(\mathbf{Z})$; le quotient $\Sigma = \mathbb{H}/F$ est une surface de Riemann de type fini. Soit Ω un groupe dénombrable. Il existe alors un sous-groupe distingué $F_0 \subset F$ tel que Ω se plonge dans F/F_0 (voir [48], § V.10). Le quotient $\mathbb{H}/F_0$ est une surface de Riemann Σ_0, munie d'un revêtement galoisien $\Sigma_0 \to \Sigma$ dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à F/F_0 ; le groupe Ω agit donc fidèlement par difféomorphismes holomorphes sur Σ_0.

1.2. Un énoncé

Le but principal de cet exposé est donc de présenter le théorème suivant, issu de [11].

Théorème A.— *Soit G un groupe de Lie connexe dont l'algèbre de Lie est simple et le centre est fini. Soient Γ un réseau uniforme de G et M une variété compacte. S'il existe un homomorphisme $\alpha\colon \Gamma \to \mathsf{Diff}^\infty(M)$ d'image infinie, alors* $\dim(M) \geq \mathrm{rg}(G)$. *Si, en plus, $\alpha(\Gamma)$ préserve une forme volume et* $\mathrm{rg}(G) \geq 2$, *alors* $\dim(M) \geq \mathrm{rg}(G) + 1$.

L'action de $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$ sur $\mathbb{P}^n(\mathbf{R})$ montre que l'inégalité $\dim(M) \geq \mathrm{rg}(G)$ est optimale dans le cas des réseaux de $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$.

Ce théorème suppose Γ uniforme : cette hypothèse technique devrait être supprimée dans un avenir proche (voir le §11.2). Nous verrons que le théorème A reste valable pour des actions de classe $\mathcal{C}^2$; l'hypothèse de régularité $\mathcal{C}^\infty$ est là pour simplifier un passage technique de la démonstration. La méthode de Brown, Fisher et Hurtado repose sur la théorie de Pesin en systèmes dynamiques et nécessite donc au minimum une régularité $\mathcal{C}^{1+\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$. Il se pourrait toutefois que le théorème A reste valable pour des actions par homéomorphismes. Par exemple, Dave Witte-Morris montre que tout homomorphisme d'un sous-groupe d'indice fini de $\mathsf{SL}(3, \mathbf{Z})$ vers le groupe des homéomorphismes du cercle $\mathbb{S}^1$ a une image finie, et Étienne Ghys étend ce résultat aux homomorphismes des réseaux des groupes de Lie simples de rang ≥ 2 vers le groupe $\mathsf{Diff}^1(\mathbb{S}^1)$ (voir [30, 31, 67]).

Le théorème A est une version simplifiée des résultats principaux de [11]. Nous verrons au paragraphe 2.4 quelle est la dimension critique optimale qui est maintenant conjecturée en fonction du groupe de Lie G. D'autres énoncés issus de [11] seront décrits aux paragraphes 2.5 et 11.3.

1.3. Groupes de difféomorphismes

Zimmer demande ce qu'il advient des théorèmes de rigidité pour les actions par difféomorphismes et, comme nous le verrons, offre des outils pour aborder ce problème. Plus généralement, il s'agit de déterminer les propriétés des groupes de Lie classiques et de leurs sous-groupes de type fini qui sont partagées par les groupes de difféomorphismes des variétés compactes. Illustrons ceci par deux exemples.

L'alternative de Tits affirme qu'un sous-groupe Λ de $\mathsf{GL}_m(\mathbf{C})$ qui ne contient pas de groupe libre non abélien contient automatiquement un sous-groupe d'indice fini qui est résoluble ; ainsi, ou bien Λ contient un groupe libre non abélien, ou bien Λ contient un sous-groupe d'indice fini qui préserve un drapeau complet dans $\mathbf{C}^m$. Les groupes de difféomorphismes ne satisfont pas à cette alternative. Par exemple, le groupe de Thompson $F \subset \mathsf{Homeo}([0, 1])$ se plonge dans le groupe des difféomorphismes du cercle [32], ne contient pas de groupe libre non abélien [8], mais ne satisfait aucune loi et ne contient donc pas de sous-groupe résoluble d'indice fini [8]. Margulis démontre cependant le théorème suivant, qui peut être perçu comme une alternative de Tits dans laquelle le drapeau invariant est remplacé par une mesure de probabilité : *soit* Λ *un sous-groupe de* $\mathsf{Homeo}(\mathbb{S}^1)$ *; ou bien* Λ *contient un groupe libre non abélien, ou bien* Λ *préserve une mesure de probabilité sur* $\mathbb{S}^1$ (voir [31, 52]).

Considérons maintenant le théorème de Burnside. Soit Λ un groupe d'exposant borné, c'est-à-dire qu'il existe un entier $q > 0$ tel que l'ordre de tout élément de Λ divise q. Si Λ se plonge dans un groupe linéaire $\mathsf{GL}_m(\mathbf{C})$, alors Λ est fini [16]. Sebastian Hurtado, Nancy Guelman et Isabelle Liousse ont obtenu la même conclusion si Λ se plonge dans le groupe des difféomorphismes d'une surface compacte préservant l'aire (voir [34, 37]).

Nous renvoyons le lecteur à [15], [22, 23] et [31] pour des articles de synthèse concernant ce type de problèmes.

1.4. Actions analytiques et plan du texte

Avant d'expliquer la structure de ce texte, étudions un cas simple : celui des actions analytiques de $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{Z})$ en petite dimension (voir [29, 31, 67] et [19]).

1.4.1. *Germes de difféomorphismes.* — Soit Γ un réseau de $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$, avec $n \geq 2$. Pour tout entier $m \geq 1$, notons $\mathsf{Diff}^\omega(\mathbf{R}^m; 0)$ le groupe des germes de difféomorphismes analytiques de $\mathbf{R}^m$ fixant l'origine. Montrons que, *si* $m \leq n$*, tout homomorphisme* $\alpha\colon \Gamma \to \mathsf{Diff}^\omega(\mathbf{R}^m; 0)$ *a une image finie.* Tout d'abord, le théorème de super-rigidité de Margulis entraîne que l'homomorphisme « partie linéaire »

$$\gamma \in \Gamma \mapsto D\alpha(\gamma)_0 \in \mathsf{GL}_m(\mathbf{R}) \tag{2}$$

a une image finie ; notons Γ_0 son noyau. C'est un réseau de $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$, donc tout homomorphisme de Γ_0 vers un groupe abélien ou résoluble a une image finie. Mais le groupe des jets d'ordre k de difféomorphismes qui sont tangents à l'identité est un groupe résoluble sans torsion. Donc le développement de Taylor des éléments de $\alpha(\Gamma_0)$ est trivial à tout ordre ; l'action étant analytique, $\alpha(\Gamma_0) = \{\mathrm{Id}\}$ et $\alpha(\Gamma)$ est fini.

1.4.2. *Actions sur le cercle.* — Montrons que *tout homomorphisme d'un sous-groupe d'indice fini* Γ *de* $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{Z})$ *vers le groupe des difféomorphismes analytiques* $\mathsf{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ *a une image finie si* $n \geq 2$.

Il suffit de considérer le cas $n = 2$. En remplaçant Γ par un sous-groupe d'indice ≤ 2, nous pouvons supposer que Γ préserve l'orientation de $\mathbb{S}^1$. Nous noterons $E_{i,j}$ le sous-groupe de $\mathsf{SL}_3(\mathbf{R})$ constitué des matrices élémentaires $\mathrm{Id} + t\delta_{i,j}$, $t \in \mathbf{R}$, et U le groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes. Soit Γ_U l'intersection de Γ avec U. C'est un groupe moyennable, donc son action sur le cercle préserve une mesure de probabilité μ. Si f est un homéomorphisme de $\mathbb{S}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ qui préserve l'orientation, et si $\tilde{f}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est un relevé de f au revêtement universel, la fonction $t \mapsto \tilde{f}(t) - t$ est 1-périodique ; elle passe au quotient en une fonction sur le cercle, et le nombre de rotation de f se trouve être égal à

$$\mathrm{rot}(f) = \int_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \tilde{f}(t) - t \, d\mu(t) \quad (\text{modulo } 1). \tag{3}$$

Puisque μ est invariante sous l'action de Γ_U, on en déduit que le nombre de rotation est un homomorphisme en restriction à Γ_U (voir [31]). Il s'annule sur le groupe dérivé Γ'_U de Γ_U, qui est un sous-groupe cyclique d'indice fini dans $\Gamma \cap E_{1,3}$. L'ensemble F des points fixes de Γ'_U est donc un ensemble non vide, et fini car l'action est analytique ; tout sous-groupe d'indice fini de Γ'_U a exactement les mêmes points fixes ; et le support de μ est contenu dans F. Puisque Γ_U centralise Γ'_U, un sous-groupe d'indice fini de Γ_U fixe F point par point.

Considérons maintenant le groupe $\Gamma \cap E_{2,1}$: il commute à Γ'_U, donc préserve aussi F, si bien qu'il existe un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma \cap E_{2,1}$ dont l'ensemble des points fixes coïncide avec F. Puisque $E_{2,1}$ et $E_{3,1}$ commutent, un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma \cap E_{3,1}$ fixe aussi F. Nous avons donc construit des sous-groupes d'indices finis dans Γ_U, $\Gamma \cap E_{2,1}$ et $\Gamma \cap E_{3,1}$ qui ont un point fixe commun. Ces groupes engendrent un sous-groupe d'indice fini $\Gamma_0 \subset \Gamma$ fixant un point : le paragraphe 1.4.1 montre que son image dans $\mathsf{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ est finie, ce qui conclut la preuve.

1.4.3. *Actions sur la sphère.* — Considérons maintenant un sous-groupe Ω d'indice fini dans le produit semi-direct $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^3$, l'action de $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}^3$ étant induite par l'action usuelle de $\mathsf{SL}_3(\mathbf{R})$ sur $\mathbf{R}^3$. Fixons un homomorphisme α de ce groupe vers celui des difféomorphismes analytiques de la sphère $\mathbb{S}^2$ qui préservent l'orientation.

Soit Λ l'intersection de Ω avec le facteur abélien $\mathbf{Z}^3$. Soit f un élément non trivial de $\alpha(\Lambda)$. Puisque la caractéristique d'Euler de $\mathbb{S}^2$ n'est pas nulle, l'ensemble $\mathrm{Fix}(f)$ des points fixes de f n'est pas vide ; il est invariant sous l'action de Λ. Si $\mathrm{Fix}(f)$ comporte un point singulier ou un point isolé, un sous-groupe d'indice fini de Λ fixe ce point. Sinon, $\mathrm{Fix}(f)$ est une union finie de courbes lisses homéomorphes à des cercles. Soit D l'une des composantes connexes de $\mathbb{S}^2 \setminus \mathrm{Fix}(f)$ homéomorphe à un disque. Soit g un élément de $\alpha(\Lambda)$ fixant D. Par le théorème du point fixe de Brouwer, g fixe un point $x \in \overline{D}$, tandis que f n'en a pas dans D ; l'orbite de x par f s'accumule donc sur le bord de B (théorème de translation plane de Brouwer, [35]) et est constituée de points fixes de g. Donc f et g ont un point fixe commun. On montre ainsi que Λ contient un sous-groupe d'indice fini dont l'ensemble des points fixes est non vide. Quitte à changer Ω en un sous-groupe d'indice fini, nous pouvons donc supposer que $\mathrm{Fix}(\Lambda) \neq \emptyset$ et que Λ est distingué ; alors $\mathrm{Fix}(\Lambda)$ est invariant sous l'action de Ω. À nouveau, ou bien Ω a une orbite finie, ou bien $\mathrm{Fix}(\Lambda)$ est une union finie et disjointe de courbes analytiques lisses homéomorphes à des cercles ; le paragraphe 1.4.2 conduit alors à la même conclusion : Ω a une orbite finie. Par le paragraphe 1.4.1, $\alpha(\Omega \cap \mathsf{SL}_3(\mathbf{Z}))$ est fini.

En utilisant les différentes copies de $\mathsf{SL}_3(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^3$ qui sont contenues dans $\mathsf{SL}_4(\mathbf{Z})$, nous obtenons : *si* Γ *est un sous-groupe d'indice fini de* $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{Z})$ *avec* $n \geq 3$, *tout homomorphisme de* Γ *vers* $\mathsf{Diff}^\omega(\mathbb{S}^2)$ *a une image finie.*

1.4.4. *Plan.* — La partie 2 introduit les notations relatives au groupe de Lie G et au réseau $\Gamma \subset G$; quelques rappels sur les actions de G en petite dimension permettent alors de préciser les conjectures de Zimmer. Nous nous attelons ensuite à la démonstration du théorème A et du théorème B, qui sera énoncé au paragraphe 2.5.

On se donne donc un homomorphisme $\alpha\colon \Gamma \to \mathsf{Diff}^k(M)$ où M est une variété compacte et k est > 1. Les arguments des paragraphes 1.4.1 à 1.4.3 sont propres aux actions analytiques. Surtout, ils utilisent de manière cruciale l'existence de sous-groupes nilpotents et de paires de sous-groupes commutants dans le réseau $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{Z})$. Cette structure algébrique est induite par celle de $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$, mais n'apparaît pas dans tous les réseaux, notamment dans ceux qui sont uniformes. On considère alors la suspension de l'action de Γ sur M. Elle fournit une variété compacte M_α, une fibration $\pi\colon M_\alpha \to G/\Gamma$ dont la fibre est difféomorphe à M, et une action de G sur M_α qui permute les fibres de π : l'action induite dans la base est l'action par translations de G sur G/Γ et l'action de Γ sur la fibre $\pi^{-1}(e_G\Gamma)$ est l'action initiale de Γ sur M. C'est maintenant le groupe G qui agit, ce qui permet d'utiliser toute la structure algébrique de ses sous-groupes. Ce faisant, la variété M a été remplacée par M_α, dont la dimension est bien plus grande ; mais la dynamique dans G/Γ peut être analysée à l'aide des théorèmes de Marina Ratner.

Nous distinguerons alors deux régimes, suivant la croissance des dérivées des difféomorphismes $\alpha(\gamma)$ pour γ dans la boule de rayon n du graphe de Cayley de Γ.

Lorsque cette croissance est rapide (nous parlerons d'action vigoureuse), nous construirons une mesure de probabilité G-invariante μ sur M_α et un élément $g \in G$ qui a un exposant de Lyapounoff non nul le long des fibres de π pour la mesure μ ; cette construction est obtenue en trois temps, qui correspondent au théorème 7.2 et aux propositions 8.2 et 8.7. C'est l'un des points clé de la démonstration, qui nécessite une combinaison astucieuse des théorèmes de Ratner et de la formule d'entropie de François Ledrappier et Lai-Sang Young. Le théorème de super-rigidité de Zimmer pour les cocycles conduit alors à une contradiction, formulée dans la proposition 8.9.

Les parties 3 à 8 montrent donc que la croissance des dérivées est lente ! Dans ce régime, la propriété (T) renforcée de Lafforgue permet de construire une métrique riemannienne lisse et Γ-invariante sur M. Le groupe d'isométries d'une telle métrique étant un groupe de Lie compact, la conclusion proviendra du théorème de super-rigidité de Margulis et de la théorie de Lie. Ceci est expliqué dans les sections 9 et 10.

Les systèmes dynamiques, notamment la dynamique dans les espaces homogènes et la théorie ergodique des difféomorphismes, seront donc au centre de la preuve.

2. LE GROUPE DE LIE ET SES ACTIONS

2.1. Le groupe de Lie G

2.1.1. — Dans la suite G désignera un groupe de Lie réel connexe et à centre fini dont l'algèbre de Lie g est simple. L'image de $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathsf{GL}(\mathsf{g})$ est une composante connexe d'un sous-groupe algébrique de $\mathsf{SL}(\mathsf{g})$ localement isomorphe à G.

Une sous-algèbre $\mathsf{h} \subset \mathsf{g}$ est diagonalisable s'il existe une base de g dans laquelle $\mathrm{ad}(\mathsf{h})$ est formée de matrices diagonales. Soit a une sous-algèbre abélienne diagonalisable de dimension maximale ; toutes les sous-algèbres de ce type sont en fait conjuguées à a ;

leur dimension est le rang de G, noté $\mathrm{rg}(G)$. L'image de a par l'application exponentielle sera notée A. Le groupe A est donc un sous-groupe fermé et connexe de G dont l'action adjointe est diagonalisable, et qui est maximal pour ces propriétés. Nous dirons que a est le sous-espace de Cartan de g et que A est le tore (déployé maximal) de G ; le groupe A est isomorphe à $(\mathbf{R}_+^*)^{\mathrm{rg}(G)}$.

2.1.2. — L'algèbre a agit sur g par l'application adjointe. Cette action est diagonalisable et les valeurs propres déterminent des formes linéaires $L\colon \mathsf{a} \to \mathbf{R}$; celles qui sont non nulles forment l'ensemble Φ des **racines** de G (la terminologie exacte est « racines restreintes »). L'algèbre de Lie g est alors décomposée en la somme directe

$$\mathsf{g} = \mathsf{g}^0 \oplus \bigoplus_{L\in\Phi} \mathsf{g}^L \tag{4}$$

où g^L désigne l'espace propre associé à la valeur propre L.

Les noyaux des racines découpent l'algèbre a en un nombre fini de cônes convexes saillants. Fixons l'un de ces cônes fermés Δ. Les racines qui prennent des valeurs ≥ 0 sur Δ forment l'ensemble des racines positives Φ^+ et Δ est la **chambre de Weyl** associée à Φ^+. Nous noterons A^+ l'image de la chambre Δ par l'application exponentielle. La sous-algèbre résoluble $\mathsf{p} = \mathsf{g}^0 \oplus \bigoplus_{L\in\Phi^+} \mathsf{g}^L$ est la sous-algèbre parabolique minimale ; le normalisateur de p dans G est le sous-groupe parabolique minimal. Un sous-groupe est **parabolique** s'il contient un conjugué de ce sous-groupe parabolique minimal.

À conjugaison près, il existe un unique sous-groupe compact maximal $K \subset G$. Si K est convenablement choisi, alors $G = KA^+K$: tout élément g de G est un produit $g = k_g a_g k'_g$ avec $(k_g, a_g, k'_g) \in K \times A^+ \times K$ et a_g est uniquement déterminé par g. Le groupe K sera ainsi fixé : l'égalité $G = KA^+K$ est la décomposition de Cartan et l'application $g \mapsto a_g$ est la projection de Cartan.

Remarque 2.1. — Quitte à changer G en un groupe isogène, on peut toujours supposer que c'est un sous-groupe algébrique de $\mathsf{GL}_m(\mathbf{C})$ invariant par l'involution $\Theta(X) = ({}^t\overline{X})^{-1}$, que A est formé de matrices diagonales, et que K est la composante connexe de l'intersection entre G et le groupe unitaire.

Exemple 2.2. — Lorsque $G = \mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$, le choix naturel pour $\mathsf{a} \subset \mathsf{sl}_{n+1}(\mathbf{R})$ consiste à prendre l'algèbre des matrices diagonales de taille $n+1$ à trace nulle ; le tore $A \subset G$ est alors le groupe des matrices diagonales à coefficients > 0. En notant t_i les coefficients diagonaux, a peut être identifiée à l'ensemble des $(t_i) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que $t_1 + \ldots + t_{n+1} = 0$. Notons $L_i\colon \mathsf{a} \to \mathbf{R}$ la forme linéaire $L_i(t) = t_i$. Pour $1 \leq i \neq j \leq n+1$, notons $E_{i,j}$ le groupe formé des matrices élémentaires $E_{i,j}(s)$ ayant des coefficients diagonaux égaux à 1 et un unique autre coefficient non nul, égal à s, situé en position (i,j). Le groupe A normalise $E_{i,j}$: si a est un élément de A dont les coefficients diagonaux sont notés a_i, alors $aE_{i,j}(s)a^{-1} = E_{i,j}(a_i s/a_j)$. Cette remarque traduit l'égalité entre l'ensemble Φ des racines et l'ensemble des différences $L_i - L_j$, pour $i \neq j$. Comme chambre de Weyl, on peut prendre $\Delta = \{(t_i)_{1\leq i\leq n+1}; t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_{n+1}\}$; A^+ est alors le sous-ensemble des matrices diagonales dont les coefficients diagonaux satisfont les inégalités $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{n+1} > 0$. Comme compact maximal, on peut alors choisir $K = \mathsf{O}_{n+1}(\mathbf{R})$.

2.2. Mesure de Haar et ergodicité

Si H est un groupe topologique localement compact, vol_H désignera une mesure de Haar (invariante à droite). Dans la suite, Γ sera un réseau de G et nous choisirons vol_G pour que $\mathrm{vol}_G(G/\Gamma) = 1$. La mesure induite par vol_G sur G/Γ est donc une mesure de probabilité qui sera notée vol. Puisque G est simple, elle est invariante sous l'action de G par translations à gauche sur G/Γ.

Le théorème d'ergodicité de Moore stipule que l'action d'un sous-groupe F de G par translations à gauche sur G/Γ est **ergodique** pour la mesure vol dès que F n'est pas relativement compact ; ceci signifie que les parties mesurables et F-invariantes ont une mesure nulle ou totale (voir le chapitre 2 de [72]).

Exemple 2.3. — Soit Γ un réseau uniforme de $\mathsf{PSL}_2(\mathbf{R})$. Le quotient $\mathsf{PSL}_2(\mathbf{R})/\Gamma$ s'identifie au fibré tangent unitaire de la surface hyperbolique Σ obtenue par quotient du disque de Poincaré sous l'action de Γ. Les sous-groupes formés des matrices

$$g^t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad h_+^t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad h_-^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

correspondent aux flots géodésique, horocyclique supérieur et horocyclique inférieur : tous trois agissent ergodiquement sur le fibré tangent unitaire de Σ (voir [28] et [72]).

2.3. Quelques actions de G et Γ

2.3.1. — À toute représentation linéaire $\rho\colon G \to \mathsf{GL}(V)$ sur un espace vectoriel réel de dimension finie est associée une action de G par difféomorphismes sur l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$. Ceci montre que G et ses sous-groupes agissent (analytiquement, et même algébriquement) sur une variété compacte de dimension $\dim(V)-1$. Plus généralement, si P est un sous-groupe parabolique de G, G agit sur la variété compacte G/P.

2.3.2. — Supposons en outre que le réseau Γ préserve un réseau Λ de V. Alors Γ agit par difféomorphismes analytiques sur le tore V/Λ, qui est de dimension $\dim(V)$; cette action préserve la mesure de Lebesgue sur V/Λ car $\rho(G) \subset \mathsf{SL}(V)$. Dans l'exemple du paragraphe 2.3.1, l'entropie topologique de tout élément $g \in G$ sur $\mathbb{P}(V)$ est nulle, tandis qu'ici Γ contient des éléments qui ont une entropie positive dans V/Λ (prendre un élément non trivial dont un conjugué est dans le tore A, [60]).

Cet exemple de base peut être modifié comme suit. L'origine $0 \in V$ détermine un point fixe $o \in V/\Lambda$ sous l'action de Γ, qui peut être éclaté : ceci remplace V/Λ par une variété compacte à bord, ce dernier correspondant à l'ensemble des demi-droites tangentes à V/Λ au point o. Il est possible d'éclater plusieurs points fixes (par exemple après avoir remplacé Γ par le sous-groupe d'indice fini préservant les points de torsion d'ordre m de V/Λ) et de recoller des composantes de bord entre elles pour obtenir des variétés compactes sans bord (voir le § 3.1 de [20]). On peut aussi assurer que Γ préserve

Type	Algèbre de Lie	Rang réel	$\mathrm{rep}(G)$	$\mathrm{hom}(G)$	$\mathrm{hom}(G_c)$	minhom	minvol
A_n, $n \geq 1$	$\mathsf{sl}_{n+1}(\mathbf{C})$	n	$2n+2$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n$
B_n, $n \geq 2$	$\mathsf{so}_{2n+1}(\mathbf{C})$	n	$4n+2$ (^{a})	$4n-2$	$2n$	$2n$	$2n$
C_n, $n \geq 3$	$\mathsf{sp}_{2n}(\mathbf{C})$	n	$4n$	$4n-2$	$4n-4$	$4n-4$	$4n-4$
D_n, $n \geq 4$	$\mathsf{so}_{2n}(\mathbf{C})$	n	$4n$	$4n-4$	$2n-1$	$2n-1$	$2n-1$
E_6	$\mathsf{e}_6(\mathbf{C})$	6	54	32	26	26	26
E_7	$\mathsf{e}_7(\mathbf{C})$	7	112	54	54	54	54
E_8	$\mathsf{e}_8(\mathbf{C})$	8	496	114	112	112	112
F_4	$\mathsf{f}_4(\mathbf{C})$	4	52	30	16	16	16
G_2	$\mathsf{g}_2(\mathbf{C})$	2	14	10	6	6	6

Table 1. Groupes de Lie complexes classiques.– (^{a}) Pour B_2, i.e. $\mathsf{so}_5(\mathbf{C})$, on a $\mathrm{rep}(G) = 8$.

une forme volume après éclatement (voir le § 4 de [38]). Ces modifications changent la topologie de la variété mais pas sa dimension.

2.4. Conjectures

2.4.1. *Actions homogènes.* — Un homomorphisme $\Gamma \to H$ est **presque injectif** si son noyau est fini. Une action de Γ sur une variété M est **presque fidèle** si l'homomorphisme correspondant $\Gamma \to \mathsf{Diff}(M)$ est presque injectif. Lorsque $\mathrm{rg}(G) \geq 2$, les réseaux sont presque simples, donc tout homomorphisme d'image infinie est presque injectif.

Soit N une variété connexe compacte. Si N est munie d'une action presque fidèle du groupe G et est de dimension minimale pour cette propriété, alors V est homogène sous l'action de G (voir [64]). Si H est un groupe de Lie, nous noterons donc $\mathrm{hom}(H)$ la dimension minimale d'un quotient compact de H par un sous-groupe fermé de codimension strictement positive. Lorsque H est presque simple un tel sous-groupe maximal est parabolique (voir [6, 55, 57, 66]). Ces dimensions peuvent donc être calculées pour tous les groupes simples : nous les fournissons dans les tables 1 à 3 (voir [50, 64]).

Nous dirons qu'une action de Γ sur N est **homogène** si N est une variété homogène sous l'action d'un groupe de Lie H et l'action de Γ sur N provient de celle de H via un homomorphisme $\rho\colon \Gamma \to H$. Nous noterons $\mathrm{homdim}(\Gamma)$ le minimum des dimensions des variétés connexes et compactes qui supportent une action homogène et presque fidèle de Γ. Pour calculer $\mathrm{homdim}(\Gamma)$, il convient de déterminer les groupes de Lie H dans lesquels Γ se plonge presque et pour lesquels $\mathrm{hom}(H)$ est minimal.

Conjecture 2.4. — *Soit G un groupe de Lie connexe, dont l'algèbre de Lie est simple et le rang est ≥ 2. Soit Γ un réseau de G. Si M est une variété compacte de dimension strictement inférieure à* $\mathrm{homdim}(\Gamma)$*, tout homomorphisme de Γ vers le groupe des difféomorphismes de M a une image finie.*

Cette conjecture, inspirée de [11, 23], est une version renforcée des conjectures initiales de Zimmer. Pour obtenir une conjecture qui dépend seulement du groupe de Lie ambiant, on utilise le lemme suivant.

Type	Algèbre de Lie	Rang réel	rep(G)	hom(G)	hom(G_c)	minhom	minvol
A_n, $n \geq 1$	$\mathsf{sl}_{n+1}(\mathbf{R})$	n	$n+1$	n	$2n$	n	$n+1$
”	$\mathsf{sl}_m(\mathbf{H})$, $2m = n+1$	$m-1$	$2n+2$ (^{a})	$2n-2$	$2n$	$2n-2$	$2n$
”	$\mathsf{su}_{p,q}$, $p+q = n+1$	$\min(p,q)$	$4n+4$ (^{b})	$2n-1$	$2n$	$2n-1$	$2n$
B_n, $n \geq 2$	$\mathsf{so}_{p,q}$, $p+q = 2n+1$	$\min(p,q)$	$2n+1$	$2n-1$	$2n$	$2n-1$	$2n$
C_n, $n \geq 3$	$\mathsf{sp}_{2n}(\mathbf{R})$	n	$2n$	$2n-1$	$4n-4$	$2n-1$	$2n$
”	$\mathsf{sp}_{2p,2q}$, $p+q = n$	$\min(p,q)$	$4n$	$4n-5$	$4n-4$	$4n-5$	$4n-4$
”	$\mathsf{sp}_{4,4}$	2	16	10	12	10	12
D_n, $n \geq 4$	$\mathsf{so}_{p,q}$, $p+q = 2n$	$\min(p,q)$	$2n$	$2n-2$	$2n-1$	$2n-2$	$2n-1$
”	$\mathsf{so}_n(\mathbf{H})$	$\lfloor n/2 \rfloor$	$4n$ (^{c})	$4n-7$	$2n-1$	$2n-1$	$2n-1$

Table 2. Groupes de Lie réels classiques non compacts.– (^{a}) Pour $\mathsf{sl}_2(\mathbf{H})$, $\mathrm{rep}(G) = 6$. (^{b}) Pour $\mathsf{su}_{p,q}$ et $n = p+q-1 = 2$ ou 3, $\mathrm{rep}(G) = 6$. (^{c}) Pour $\mathsf{so}_n(\mathbf{H})$ avec $n = 2$ (resp. 3) on a $\mathrm{rep}(G) = 6$ (resp. 8).

Lemme 2.5. — *Soit G un groupe de Lie réel simple de rang ≥ 2. Pour tout réseau Γ de G on a*

$$\mathrm{homdim}(\Gamma) \geq \min\left(\mathrm{hom}(G), \mathrm{hom}(G_c)\right) \geq \mathrm{rg}(G)$$

où G_c désigne un groupe de Lie compact dont l'algèbre de Lie complexifiée est isomorphe à la complexification de celle de G.

L'inégalité de gauche découle du théorème de super-rigidité de Margulis. L'inégalité $\mathrm{hom}(G) \geq \mathrm{rg}(G)$ résulte du fait suivant, qui peut être établi avec l'argument donné plus bas pour le lemme 8.8 : *si* h *est une sous-algèbre stricte de* g *qui contient* a, *alors* $\mathrm{codim}(\mathsf{h}) \geq \dim(\mathsf{a})$. L'inégalité $\mathrm{hom}(G_c) \geq \mathrm{rg}(G)$ s'obtient de la même manière en considérant la complexification de l'algèbre de Lie de G_c. Dans la suite, nous noterons $\mathrm{minhom}(G)$ l'entier $\min\left(\mathrm{hom}(G), \mathrm{hom}(G_c)\right)$ apparaissant dans le lemme 2.5. La conjecture suivante est donc légèrement plus faible que la précédente.

Conjecture 2.6. — *Soit G un groupe de Lie connexe, dont l'algèbre de Lie est simple et le rang est ≥ 2. Si M est une variété compacte de dimension $<$ $\mathrm{minhom}(G)$, aucun réseau de G ne s'injecte dans $\mathsf{Diff}(M)$.*

Tables.– Les tables 1 à 3 listent les entiers $rg(G)$, $\mathrm{hom}(G)$ et $\mathrm{hom}(G_c)$ pour tous les groupes de Lie réels presque simples. L'entier $\mathrm{minhom}(G)$ est le minimum de $\mathrm{hom}(G)$ et $\mathrm{hom}(G_c)$. L'entier $\mathrm{rep}(G)$ est la dimension minimale d'une représentation non triviale de l'algèbre g. L'entier minvol est le minimum de $\mathrm{rep}(G)$ et $\mathrm{hom}(G_c)$: il concerne les actions de réseaux préservant une forme volume. Par construction, la liste ne dépend donc que de l'algèbre g.

La première table concerne les groupes de Lie complexes (vus comme groupes de Lie réels), la deuxième les groupes réels classiques, et la dernière les groupes réels exceptionnels.

Type	Algèbre de Lie	Rang réel	rep(G)	hom(G)	hom(G_c)	minhom	minvol
E_6	$\mathsf{e}_{6(6)}$	6	27	16	26	16	26
”	$\mathsf{e}_{6(2)}$	4	27	21	26	21	26
”	$\mathsf{e}_{6(-14)}$	2	27	21	26	21	26
”	$\mathsf{e}_{6(-26)}$	2	27	16	26	16	26
E_7	$\mathsf{e}_{7(7)}$	7	56	27	54	27	54
”	$\mathsf{e}_{7(-5)}$	4	56	33	54	33	54
”	$\mathsf{e}_{7(-25)}$	3	56	27	54	27	54
E_8	$\mathsf{e}_{8(8)}$	8	248	57	112	57	112
”	$\mathsf{e}_{8(-24)}$	4	248	57	112	57	112
F_4	$\mathsf{f}_{4(4)}$	4	26	15	16	15	16
"	$\mathsf{f}_{4(-20)}$	1	26	15	16	15	16
G_2	$\mathsf{g}_{2(2)}$	2	7	5	6	5	6

TABLE 3. Groupes de Lie réels exceptionnels non compacts.

2.4.2. *Actions préservant le volume.* — Si G est un groupe de Lie réel non compact dont l'algèbre de Lie est simple, et si $M = G/P$ est un quotient de G par un sous-groupe parabolique de codimension > 0, il n'existe pas de forme volume G-invariante sur M. Si l'on s'intéresse aux actions qui préservent une forme volume, on peut donc mettre ces exemples de côté. Deux entiers peuvent alors être introduits. Le premier est l'entier hom(G_c) introduit après le lemme 2.5. Le second est le minimum rep(G) des dimensions des espaces vectoriels V pour lesquels il existe une représentation linéaire $\rho\colon G \to \mathsf{GL}(V)$ presque fidèle ; en effet, s'il existait en plus un réseau $\Lambda \subset V$ préservé par $\rho(\Gamma)$ alors Γ agirait sur V/Λ en préservant le volume. Le minimum de ces deux entiers sera noté minvol(G).

CONJECTURE 2.7. — *Soit G un groupe de Lie connexe, d'algèbre de Lie simple et de rang ≥ 2. Soit M une variété compacte munie d'une forme volume ω. Si* $\dim(M) <$ minvol(G)*, aucun réseau de G ne s'injecte dans* $\mathsf{Diff}(M, \omega)$.

Exemple 2.8. — Le groupe $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{C}) \times \mathsf{SU}_{n+1}$ est isotypique, car la complexification de SU_{n+1} est $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{C})$. Le théorème de Borel-Harder permet alors de construire des réseaux uniformes et irréductibles $\Gamma' \subset \mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{C}) \times \mathsf{SU}_{n+1}$ (voir [69], Cor. 18.7.4). Ce réseau est le graphe d'un homomorphisme $\rho\colon \Gamma \to \mathsf{SU}_{n+1}$ où Γ est un réseau uniforme de $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{C})$. L'action de SU_{n+1} sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbf{C})$ préserve la métrique de Fubini-Study ; l'homomorphisme ρ fournit donc une action isométrique de Γ (donc préservant le volume) en dimension $2n$. De même, $\mathsf{SO}_n(\mathbf{H})$ et $\mathsf{SO}_{2n}(\mathbf{R})$ ont la même complexification $\mathsf{SO}_{2n}(\mathbf{C})$; il existe donc des actions isométriques de réseaux uniformes $\Gamma \subset \mathsf{SO}_n(\mathbf{H})$ sur la sphère unité $\mathbb{S}^{2n-1}$.

Remarque 2.9. — Les conjectures précédentes ont été formulées sans préciser la régularité des difféomorphismes car elles sont déjà intéressantes pour les difféomorphismes analytiques et sont susceptibles d'être satisfaites pour les actions par homéomorphismes.

2.5. But

Notre but principal est de démontrer le théorème A, qui répond positivement aux conjectures 2.6 et 2.7 lorsque $G = \mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$ et Γ est uniforme. Les résultats de [11] sont plus généraux et incluent notamment le théorème suivant.

THÉORÈME B.— *Soit* Γ *un réseau uniforme de* $\mathsf{Sp}_{2n}(\mathbf{R})$ *(resp.* $\mathsf{SO}_{n,n}(\mathbf{R})$ *ou* $\mathsf{SO}_{n,n+1}(\mathbf{R})$*), avec* $n \geq 2$*. Soit* M *une variété compacte munie d'une forme volume* ω*. Si* $\dim(M) < 2n-1$ *(resp.* $2n-2$*, resp.* $2n-1$*), tout homomorphisme de* Γ *dans* $\mathsf{Diff}^2(M)$ *a une image finie. Si* $\dim(M) < 2n$ *(resp.* $2n-1$*, resp.* $2n$*), tout homomorphisme de* Γ *dans* $\mathsf{Diff}^2(M, \omega)$ *a une image finie.*

Les conjectures 2.6 et 2.7 sont donc satisfaites pour les réseaux uniformes des formes déployées des groupes classiques. Le paragraphe 8.5 explique succinctement la stratégie qui permet d'adapter la démonstration du théorème A pour obtenir le théorème B. Pour les actions sur les surfaces compactes, d'autres techniques permettent d'analyser les actions de réseaux non uniformes : le théorème C du paragraphe 11.3 fait la synthèse des résultats obtenus dans ce cadre.

3. SUSPENSION ET EXPOSANT DE LYAPOUNOFF MAXIMAL

À partir de maintenant, G est un groupe de Lie connexe et à centre fini dont l'algèbre de Lie g est simple ; $\mathsf{a} \subset \mathsf{g}$ est un sous-espace de Cartan, $A = \exp(\mathsf{a})$ est le tore associé, et $K \subset G$ est un sous-groupe compact maximal tel que $G = KA^+K$.

On fixe un réseau uniforme Γ de G et une action de Γ par difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^k$ sur une variété connexe compacte M de dimension d, avec $k > 1$. On note $\alpha \colon \Gamma \to \mathsf{Diff}^k(M)$ l'homomorphisme correspondant. Lorsque le rang de G est égal à 1, les théorèmes A et B sont soit évidents soit vides. L'hypothèse $\mathrm{rg}(G) \geq 2$ apparaîtra donc souvent dans la suite.

3.1. Suspension

La variété $G \times M$ est munie d'une action de G par translations à gauche, définie par $h \cdot (g, m) = (hg, m)$ pour tout $h \in G$. Elle est aussi munie d'une action diagonale de Γ définie par $(\gamma, (g, m)) \mapsto (g\gamma^{-1}, \alpha(\gamma)(m))$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Ces deux actions commutent, et par passage au quotient nous obtenons

- une variété quotient $M_\alpha = (G \times M)/\Gamma$, qui est munie d'une projection sur le premier facteur notée $\pi \colon M_\alpha \to G/\Gamma$;
- une action de G sur M_α obtenue par passage au quotient de l'action $h \cdot (g, m) = (hg, m)$.

L'action $G \times M_\alpha \to M_\alpha$ est la **suspension** de l'action de Γ sur M ; nous noterons $\alpha_G \colon G \to \mathsf{Diff}^k(M_\alpha)$ l'homomorphisme associé. La projection π entrelace l'action de G sur M_α avec celle par translations à gauche sur G/Γ :

$$\pi(\alpha_G(g)(x)) = g\pi(x). \tag{6}$$

L'action de G sur M_α contient celle de Γ sur M : pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $m \in M$, $\alpha_G(\gamma)(e_G, m) = (e_G, \alpha(\gamma)(m))$ dans M_α ; autrement dit, la fibre $\pi^{-1}(e_G) = M$ est Γ-invariante, et l'action de Γ sur cette fibre est donnée par α. Les orbites de G dans M_α forment un feuilletage $\mathcal{G}$, transverse aux fibres de π, dont l'holonomie est donnée par l'action de Γ sur la fibre $M = \pi^{-1}(e_G)$. La projection π induit un revêtement de chaque feuille de ce feuilletage vers la base G/Γ.

Le groupe G sera muni d'une métrique riemannienne invariante à droite, et invariante à gauche par son sous-groupe compact maximal K ; elle détermine une distance d_G sur G et une métrique riemannienne r sur G/Γ. Nous munirons M_α d'une métrique riemannienne s telle que $\pi_*(s)$ soit égale à r et les fibres de π soient orthogonales aux feuilles de $\mathcal{G}$.

Remarque 3.1. — Supposons que $\alpha \colon \Gamma \to \mathsf{Diff}^k(M)$ s'étende en un homomorphisme $\hat{\alpha} \colon G \to \mathsf{Diff}^k(M)$. C'est le cas lorsque $M = \mathbb{P}^n(\mathbf{R})$, $G = \mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$ et l'action de Γ est induite par celle de G sur $\mathbb{P}^n(\mathbf{R})$ par transformations projectives. Soit $\Psi \colon G \times M \to G \times M$ le difféomorphisme défini par $\Psi(g, m) = (g, \hat{\alpha}(g)m)$. Alors $\Psi(g\gamma^{-1}, \alpha(\gamma)(m)) = (g\gamma^{-1}, \hat{\alpha}(g)m)$, si bien que Ψ entrelace l'action de Γ sur $G \times M$ avec celle de Γ par translations à droite sur le seul facteur G. Ainsi, Ψ induit un difféomorphisme de M_α vers $G/\Gamma \times M$ qui conjugue l'action de G sur M_α à l'action diagonale de G sur $G/\Gamma \times M$.

3.2. Cocycle et exposant maximal

Soit $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré, $\mathcal{X}$ étant la tribu et μ une mesure de probabilité. Soit $G \times X \to X$ une action mesurable de G sur X. Un cocycle à valeurs dans un groupe topologique H est une application mesurable $D \colon G \times X \to H$ telle que la relation de cocycle

$$D(g'g, x) = D(g', gx)D(g, x) \tag{7}$$

soit satisfaite pour tout couple $(g', g) \in G \times G$ en presque tout point $x \in X$.

Supposons que H soit le groupe $\mathsf{GL}(V)$, où V est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\| \cdot \|$ une norme sur V ; elle définit une norme d'opérateurs sur $\mathsf{End}(V)$ que nous noterons aussi $\| \cdot \|$. La **dilatation** (logarithmique) est alors définie par

$$Dil(g, x) = \log \| D(g, x) \| \; . \tag{8}$$

Elle est sous-additive, au sens où $Dil(g'g, x) \leq Dil(g', g(x)) + Dil(g, x)$.

Soit g un élément de G qui préserve la mesure μ. Supposons que $x \mapsto Dil(g, x)$ appartienne à $L^1(X, \mu)$ et appliquons le théorème ergodique sous-additif de Kingman

([65]) : pour μ-presque tout x, la suite $\frac{1}{n}Dil(g^n, x)$ converge vers une limite $\lambda_+(g,\mu)(x) \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$; de plus,

$$\int_X \lambda_+(g,\mu)(x)\, d\mu(x) = \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} \int_X Dil(g^n, x)\, d\mu(x) \tag{9}$$

et si cet infimum est distinct de $-\infty$ la convergence a également lieu dans $L^1(X,\mu)$. Le nombre $\lambda_+(g,\mu)(x)$ est l'**exposant de Lyapounoff maximal** de g, pour D, au point x. La fonction $\lambda_+(g,\mu)$ est g-invariante : lorsque μ est ergodique, cette fonction est constante et égale à l'infimum des moyennes des fonctions $\frac{1}{n}Dil(g^n, \cdot)$.

Remarque 3.2. — Soit $(\|\cdot\|_x)_{x\in X}$ une famille de normes sur V pour laquelle il existe une constante $c > 0$ telle que $c^{-1} \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_x \leq c \|\cdot\|$ en tout point x de X. On peut alors modifier la définition de $Dil(h, x)$ en calculant la norme de $D(h, x)$ en tant qu'opérateur linéaire de $(V, \|\cdot\|_x)$ vers $(V, \|\cdot\|_{h(x)})$. Ceci ne change ni la convergence de la suite $\frac{1}{n}Dil(h^n, x)$, ni sa valeur limite.

3.3. Semi-continuité de l'exposant de Lyapounoff maximal dans les fibres

Rappelons que d désigne la dimension de M. Soit $T^\pi M_\alpha$ le sous-fibré de TM_α formé des espaces tangents aux fibres de π. Fixons une trivialisation mesurable $\eta\colon T^\pi M_\alpha \to M_\alpha \times V$, avec $V = \mathbf{R}^d$, et une norme $\|\cdot\|$ sur V. Nous supposerons qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$c^{-1} \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_x \leq c \|\cdot\| \tag{10}$$

vis-à-vis des normes $\|\cdot\|_x$ de V qui sont issues, via la trivialisation η, de la métrique riemannienne de M_α. Considérons le cocycle $D^\pi\colon G \times M_\alpha \to \mathsf{GL}(V)$ donné par la différentielle des éléments de G le long des fibres de π, vues dans la trivialisation que nous venons de fixer. En calculant les fonctions de dilatation

$$Dil(g, x) = \log \| D^\pi(\alpha_G(g), x) \|_x \tag{11}$$

à l'aide des normes $\|\cdot\|_x$ (comme dans la remarque 3.2), nous obtenons :

(i) les fonctions de dilatation $Dil(g, x)$ sont continues sur $G \times M_\alpha$;

(ii) pour toute partie compacte C de G, $Dil(g, x)$ est uniformément majorée sur l'ensemble $C \times M_\alpha$.

L'hypothèse d'intégrabilité $Dil(g, \cdot) \in L^1(M_\alpha, \mu)$ est donc satisfaite pour tout $g \in G$ et toute mesure de probabilité g-invariante μ sur M_α. L'exposant de Lyapounoff maximal associé sera noté $\lambda_+^\pi(g,\mu)(x)$ et sera appelé exposant de Lyapounoff **vertical** maximal. Puisque $Dil(g, x)$ est continue par rapport à x, les fonctions $\mu \mapsto \frac{1}{n}\int_X Dil(g^n, x)\, d\mu$ sont continues pour la topologie faible-$\star$; le lemme suivant en découle.

Lemme 3.3. — *Pour tout $g \in G$, la fonction $\mu \mapsto \int_{M_\alpha} \lambda_+^\pi(g,\mu)\, d\mu$ est semi-continue supérieurement sur l'ensemble convexe compact des mesures de probabilité g-invariantes.*

3.4. Moyennes et positivité de l'exposant de Lyapounoff

Si ν est une mesure de probabilité sur G et μ est une mesure de probabilité sur M_α, nous noterons $\nu \star \mu$ la convolution

$$\nu \star \mu = \int_G \alpha_G(g)_*(\mu)\, d\nu(g). \tag{12}$$

Soit B un sous-groupe fermé de G. Une suite croissante de compacts $F_m \subset B$ qui recouvrent B et satisfait

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{vol}_B(F_m \triangle gF_m)}{\mathrm{vol}_B(F_m)} = 0 \tag{13}$$

pour tout g dans B sera appelée une **suite de Følner** ; une telle suite existe si et seulement si le groupe B est moyennable (voir [3], Annexe G). La suite de mesures de probabilité $\frac{\mathbf{1}_{F_m}}{\mathrm{vol}_B(F_m)}\mathrm{vol}_B$ associée à une telle suite (F_m) sera également dite « de Følner ».

Lemme 3.4. — *Soient B un sous-groupe fermé de G et ν_m une suite de mesures de probabilité sur B à supports compacts. Soient g un élément de G et μ une mesure de probabilité g-invariante sur M_α. Si B centralise g, alors*

(1) *les mesures $\nu_m \star \mu$ sont $\alpha_G(g)$-invariantes ;*

(2) *pour tout m, $\lambda_+^\pi(g, \nu_m \star \mu) = \lambda_+^\pi(g,\mu)$;*

(3) *si $\nu_m \star \mu$ converge vers une mesure μ', alors g préserve μ' et $\lambda_+^\pi(g,\mu') \geq \lambda_+^\pi(g,\mu)$.*

En outre, si ν_m est une suite de Følner, toute limite faible μ' de $\nu_m \star \mu$ est invariante sous l'action de B sur M_α.

L'assertion (1) résulte de $\alpha_G(g)_*\mu = \mu$ et de $gf = fg$ pour tout $f \in B$. L'assertion (2) découle de la relation de cocycle $Dil(g^n, f(x)) = Dil(g^n, x) + E(x)$ avec un terme d'erreur $E(x)$ qui est majoré indépendamment de n par

$$\sup_{f\in \mathrm{Support}(\nu_m)} \sup_{x\in X} \max(Dil(f,x), Dil(f^{-1},x)) \tag{14}$$

lorsque $f \in \mathrm{Support}(\nu_m)$. L'assertion (3) suit des deux premières et du lemme 3.3.

4. FORMES DE LYAPOUNOFF ET VARIÉTÉS INSTABLES

Soit A un groupe abélien isomorphe à $\mathbf{R}^r$ (ou à $\mathbf{Z}^r$) ; on munit A d'une norme euclidienne notée $|\cdot|$. On note $A^\vee$ l'espace des formes linéaires $A \to \mathbf{R}$. Soit $A \times N \to N$ une action différentiable de A sur une variété compacte N. La variété N est munie d'une métrique riemannienne ; $\|v\|$ désignera la norme du vecteur tangent $v \in T_xN$ et $|\mathrm{Jac}(g)_x|$ la valeur absolue du déterminant jacobien de $g_*\colon T_xN \to T_{g(x)}N$.

Soit μ une mesure de probabilité sur N qui est A-invariante ; rappelons que μ est ergodique si tout ensemble mesurable A-invariant est de mesure nulle ou totale. Certains éléments de A peuvent donc agir de manière non ergodique.

4.1. Le théorème d'Oseledets

Si l'on fixe (convenablement) une trivialisation mesurable du fibré tangent à N, les différentielles des éléments de A forment alors un cocycle (intégrable) à valeurs dans $\mathsf{GL}_{d_N}(\mathbf{R})$, avec $d_N = \dim(N)$. Le théorème d'Oseledets peut être appliqué à ce cocycle, et conduit au théorème suivant (voir [36] et [13, 17, 39]).

THÉORÈME 4.1. — *Soit μ une mesure de probabilité sur N qui est A-invariante et ergodique. Il existe un ensemble $\Lambda \subset N$, un entier $k \geq 0$, des formes linéaires distinctes $\lambda_i \colon A \to \mathbf{R}$, $1 \leq i \leq k$, et une décomposition en somme directe $T_xN = \oplus_{i=1}^k E_i(x)$ pour tout point $x \in \Lambda$ tels que*

(1) *Λ est mesurable, A-invariant, et de mesure totale ;*

(2) *les sous-espaces $E_i(x)$ dépendent mesurablement de x et sont A-invariants : $a_*E_i(x) = E_i(a(x))$ pour tout $a \in A$ et tout $1 \leq i \leq k$; en particulier, leurs dimensions $\dim(E_i)$ ne dépendent pas de x ;*

(3) *pour tout $x \in \Lambda$, pour tout vecteur tangent $v_i \in E_i(x)$ non nul,*

$$\lim_{|a|\to+\infty} \frac{1}{|a|} (\log \| a_*(v) \| - \lambda_i(a)) = 0;$$

(4) *pour tout $x \in \Lambda$*

$$\lim_{|a|\to+\infty} \frac{1}{|a|} \left(\log |\mathrm{Jac}(a)(x)| - \sum_{i=1}^{k} \dim(E_i)\lambda_i(a) \right) = 0.$$

Les formes linéaires λ_i sont les **formes de Lyapounoff** de A ; la dimension $\dim(E_i)$ est la multiplicité de λ_i. L'assertion (3) montre que le maximum des $\lambda_i(a)$ coïncide avec l'exposant de Lyapounoff maximal de a pour le cocycle donné par la différentielle (voir le § 3.2). Lorsque μ n'est pas ergodique, ce théorème reste valable mais pour des formes de Lyapounoff et des multiplicités qui dépendent de x : λ_i (resp. $\dim(E_i)$) est alors une fonction de Λ vers $A^\vee$ (resp. vers $\mathbf{N}^*$) ; on note $\lambda_i(a)(x)$ (resp. $\dim(E_i)(x)$) ses valeurs.

Lorsque $A = \exp(\mathsf{a})$ est le tore de G et $N = M_\alpha$, on peut aussi appliquer le théorème d'Oseledets au cocycle $D^\pi(a, x)$ donné par la différentielle de $\alpha_G(a)$ restreinte au sous-fibré $T^\pi M_\alpha$. Les formes de Lyapounoff obtenues seront dites **verticales** ; nous les noterons λ_i^π : elles forment un sous-ensemble des formes de Lyapounoff de $A \times M_\alpha \to M_\alpha$. Puisque $\pi \colon M_\alpha \to G/\Gamma$ entrelace l'action de A sur M_α et celle sur G/Γ par translations, les autres formes de Lyapounoff proviennent de l'action de A sur G/Γ ; comme nous le verrons dans l'exemple 4.2 et la preuve de la proposition 8.7, ces formes sont les éléments de $\Phi \cup \{0\}$, Φ étant l'ensemble des racines (restreintes, voir le § 2.1).

4.2. Chambres de Lyapounoff

Soit $\lambda_i \colon A \to \mathbf{R}$ une forme de Lyapounoff non nulle (pour une mesure A-invariante ergodique μ fixée sur N). Le noyau de λ_i détermine un hyperplan H_i de A ; lorsque $a \in A$ traverse cet hyperplan, le signe de $\lambda_i(a)$ change. Si λ_i et λ_j sont deux formes de Lyapounoff distinctes, le noyau de $\lambda_i - \lambda_j$ est un hyperplan $H_{i,j}$; lorsque $a \in A$

traverse cet hyperplan, c'est l'ordre des exposants qui change : l'inégalité $\lambda_i(a) > \lambda_j(a)$ devient $\lambda_j(a) > \lambda_i(a)$. Les composantes connexes de $A \setminus (\cup_i H_i \cup \cup_{i,j} H_{i,j})$ seront appelées **chambres de Lyapounoff** de A. Si a et b sont dans la même chambre, les nombres $\lambda_l(a)$ et $\lambda_l(b)$ sont ordonnés de la même façon, et ont les mêmes signes.

À chaque élément $a \in A$ est associée une permutation σ_a de $\{1, \ldots, k\}$ pour laquelle $\lambda_{\sigma_a(1)}(a) \geq \lambda_{\sigma_a(2)}(a) \geq \cdots \geq \lambda_{\sigma_a(k)}(a)$; l'application $a \mapsto \sigma_a$ est constante dans les chambres de Lyapounoff, et les inégalités $\lambda_{\sigma_a(i)}(a) \geq \lambda_{\sigma_a(i+1)}(a)$ y sont strictes. Le plus grand indice j pour lequel $\lambda_{\sigma_a(j)}(a) > 0$ sera noté u_a (ou $u_a(x)$ si μ n'est pas ergodique) ; $u_a(x)$ désigne donc le nombre d'exposants strictement positifs en x pour a.

4.3. Les variétés stables et instables

La théorie de Pesin montre que, pour chaque élément a de A, pour (μ-presque) tout $x \in \Lambda$, et pour tout $i \leq u_a(x)$, l'ensemble

$$W_i(a; x) = \left\{ y \in N\,;\ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{dist}_N(a^{-n}(x), a^{-n}(y)) \leq -\lambda_{\sigma_a(i)}(a) \right\} \tag{15}$$

est une variété immergée, de dimension égale à la somme des multiplicités $\dim(E_{\sigma_a(j)})$ où j décrit l'ensemble des indices pour lesquels $\lambda_{\sigma_a(j)}(a) \geq \lambda_{\sigma_a(i)}(a)$. Les variétés $W_i(a; x)$ sont définies μ-presque partout, sont lisses, et sont deux à deux disjointes : $W_i(a; x) \cap W_i(a; y) = \emptyset$ sauf si $W_i(a; x) = W_i(a; y)$. Ce sont les **variétés instables** de a ; la variété $W_{u_a(x)}(a; x)$ est la variété instable **maximale** en x. Les $W_i(a; x)$ forment une sorte de « lamination » d'une partie de N de mesure totale. Comme

$$W_i(a; x) \subset W_{i+1}(a; x), \tag{16}$$

les $W_i(a; y)$ pour $y \in W_{i+1}(a; x) \cap \Lambda$ forment un feuilletage de $W_{i+1}(a; x)$.

Exemple 4.2. — Considérons le groupe $G = \mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$, avec les notations de l'exemple 2.2. Soit $\Gamma \subset G$ un réseau uniforme. Le groupe G agit par translations à gauche sur G/Γ. Chaque groupe élémentaire $E_{i,j}$ détermine ainsi un champ de vecteurs $X_{i,j}$ sur G/Γ. Le groupe diagonal A normalise chacun des $E_{i,j}$ et préserve donc les champs associés : $a_*(X_{i,j}) = (L_i - L_j)(a) X_{i,j}$ pour tout $a \in A$. Les formes de Lyapounoff non nulles coïncident donc avec les racines.

Pour décrire les variétés instables, prenons $n = 2$ et fixons un élément $a \in A$ dont les coefficients diagonaux vérifient $a_1/a_3 > a_1/a_2 > a_2/a_3 > 1$. Alors $W_1(a; x)$ est l'orbite de x sous $E_{1,3}$, $W_2(a; x)$ est l'orbite de x sous l'action du groupe à 2 paramètres engendré par $E_{1,2}$ et $E_{1,3}$, et $W_3(a; x)$ par celle du groupe (non commutatif) formé des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale. On notera que le champ de plan déterminé par $X_{1,2}$ et $X_{2,3}$ n'est pas intégrable.

Plus généralement, si $a = \exp(u)$ avec u un élément intérieur à la chambre de Weyl $\Delta \subset \mathsf{a}$, les variétés instables maximales de a dans G/Γ sont données par les orbites du groupe connexe dont l'algèbre de Lie est engendrée par les g^L avec $L \in \Phi^+$.

5. LA FORMULE DE LEDRAPPIER-YOUNG

5.1. Entropie

Soit $(X, \mathcal{X}, \mu)$ une espace mesuré, $\mathcal{X}$ désignant la tribu et μ une mesure de probabilité. Si f est une transformation mesurable de $(X, \mathcal{X})$ qui préserve μ, l'entropie moyenne de f par rapport à μ sera notée $h_\mu(f)$. Lorsque (X, dist) est un espace métrique compact, $\mathcal{X}$ est la tribu des boréliens, et f est continue, le théorème de Mikael Brin et Anatole Katok permet de définir l'entropie de la façon suivante. Pour $x \in X$, la boule dynamique $B_n(x; \epsilon)$ est l'ensemble des points y de X tels que la distance entre $f^j(x)$ et $f^j(y)$ est majorée par ϵ pour tous les temps $0 \leq j \leq n-1$. Alors

$$h_\mu(f; x) = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_n(x; \epsilon)) \right) \tag{17}$$

existe pour μ-presque tout x et $h_\mu(f)$ est égale à $\int_X h_\mu(f; x)\, d\mu(x)$. Pour définir $h_\mu(f)$ dans le cas général, considérons une partition $\mathcal{P}$ de X en une famille dénombrable d'ensembles mesurables ; si $x \in X$, notons $\mathcal{P}(x)$ l'atome de $\mathcal{P}$ contenant x. Les transformations f^j transportent $\mathcal{P}$ vers de nouvelles partitions $(f^j)^*\mathcal{P}$; la partition engendrée par les n partitions $(f^j)^*\mathcal{P}$, $0 \leq j \leq n$, est alors notée $\mathcal{P}_n$. Andrei Kolmogorov remarque alors que la limite

$$h_\mu(f; \mathcal{P}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{P}_n} -\mu(\mathcal{Q}) \log(\mu(\mathcal{Q})) \tag{18}$$

existe et définit $h_\mu(f)$ comme le maximum des $h_\mu(f; \mathcal{P})$. Par le théorème de Claude Shannon, Brockway McMillan, et Leo Breiman, $h_\mu(f; \mathcal{P})$ est aussi égale à la valeur limite moyenne de $-\frac{1}{n} \log \mu(\mathcal{P}_n(x))$. Le lecteur pourra consulter [49] pour ces résultats.

Nous utiliserons les propriétés suivantes de $h_\mu(f)$, dans lesquelles f désigne une bijection bimesurable de $(X, \mathcal{X})$ préservant μ.

1. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $h_\mu(f^n) = |n| h_\mu(f^n)$; en particulier, l'entropie de f coïncide avec celle de la bijection réciproque f^{-1}.
2. Si $\pi \colon (X, \mathcal{X}) \to (Y, \mathcal{Y})$ est une application mesurable et si g est une transformation mesurable de Y qui préserve $\pi_*\mu$ et vérifie $\pi \circ f = g \circ \pi$, alors $h_\mu(f) \geq h_{\pi_*\mu}(g)$.

5.2. La formule

Soit f un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$ d'une variété riemannienne compacte N, avec $k > 1$. Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur N qui est f-invariante. Supposons dans un premier temps que μ est ergodique, et appliquons le paragraphe 4 au groupe $A = f^{\mathbf{Z}}$. Nous noterons λ_i les exposants de Lyapounoff de f, ordonnés de manière décroissante, et $W_i(x)$ les variétés instables associées.

Fixons un indice i avec $\lambda_i > 0$. Soit ξ une partition mesurable de N subordonnée aux variétés $W_i(x)$ (voir [61]) : μ-presque tout point x appartient à un atome $\xi(x)$ de la partition ξ, cet atome $\xi(x)$ est contenu dans $W_i(x)$, et c'est un voisinage ouvert de x

dans $W_i(x)$. La mesure μ peut alors être désintégrée suivant la partition ξ. Ceci fournit, pour presque tout x, une mesure de probabilité $\mu_{\xi(x)}$ supportée par $\xi(x)$, de sorte que

— pour tout ensemble borélien $B \subset N$, la fonction $x \mapsto \mu_{\xi(x)}(\xi(x) \cap B)$ est mesurable ;
— pour toute fonction continue φ, $\int_N \varphi \, d\mu = \int_N \int_{\xi(x)} \varphi \, d\mu_{\xi(x)} \, d\mu(x)$.

Les $\mu_{\xi(x)}$ sont les **conditionnelles** de μ (voir [61, 44, 42]).

La **dimension** de $\mu_{\xi(x)}$ au point x est définie par la formule

$$\delta_i(x) = \lim_{\rho \to 0} \frac{\log \mu_{\xi(x)}(B_i(x, \rho))}{\log(\rho)}, \tag{19}$$

où $B_i(x, \rho)$ désigne la boule de rayon ρ dans $\xi(x)$ pour la métrique riemannienne de $W_i(x)$ induite par celle de N. Ledrappier et Young montrent que cette limite existe en presque tout point x, est constante le long des orbites de f, et ne dépend pas du choix de la partition ξ subordonnée à W_i. De plus, $\delta_i(x)$ est égale à l'infimum des dimensions de Hausdorff des ensembles $Z \subset \xi(x)$ pour lesquels $\mu_{\xi(x)}(Z) > 0$ (voir [70]). La différence

$$\gamma_i(x) = \delta_i(x) - \delta_{i-1}(x) \tag{20}$$

(avec $\delta_0(x) = 0$ par définition) peut alors être interprétée comme la dimension de Hausdorff de μ dans $W_i(x)$ transversalement au feuilletage fourni par les $W_{i-1}(y)$; en particulier, on montre que

$$\gamma_i(x) \leq \dim(E_i(x)). \tag{21}$$

Puisque μ est ergodique, les dimensions δ_i, γ_i, et $\dim(E_i)$ ne dépendent pas de x. Sans l'ergodicité, le nombre $u(x)$ d'exposants > 0, les valeurs $\lambda_i(x)$, et les multiplicités $\dim(E_i(x))$ peuvent varier avec x ; de même, $\delta_i(x)$ et $\gamma_i(x)$ dépendent de x.

THÉORÈME 5.1 (Ledrappier-Young, [9, 45, 46]). — *Soit f un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$, $k > 1$, d'une variété compacte N. Soit μ une mesure de probabilité borélienne f-invariante sur N. L'entropie de f vis-à-vis de la mesure μ vérifie*

$$h_\mu(f) = \int_X \sum_{i=1}^{u(x)} \gamma_i(x) \lambda_i(x) \, d\mu(x). \tag{22}$$

Ainsi

$$h_\mu(f) \leq \int_X \sum_{i=1}^{u(x)} \dim(E_i(x)) \lambda_i(x) \, d\mu(x) \tag{23}$$

et il y a égalité si, et seulement si les conditionnelles de μ le long des variétés instables $W_{u(x)}(x)$ sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue.

Précisons la dernière assertion. La théorie de Pesin fournit des paramétrages locaux des variétés instables $W_i(x)$ par des boules centrées à l'origine dans $\mathbf{R}^{d_i}$, avec

$d_i = \dim(W_i(x))$. On note $\mathrm{vol}_{i,x}$ l'image de la mesure de Lebesgue par ces paramétrages, que l'on restreint aux atomes $\xi(x)$. [(2)] On note alors $\mathrm{Jac}^u(f^{-n}; y)$ le jacobien de $f^{-n} \colon W_{u(x)}(x) \to W_{u(f^{-n}(x))}(x)$ en un point y de la variété instable locale maximale ; ce jacobien est le rapport, calculé en y, entre les formes volumes $(f^{-n})^* \mathrm{vol}_{u(x), f^{-n}(x)}$ et $\mathrm{vol}_{u(x),x}$ le long de $W_{u(x)}(x)$. On définit alors

$$\Delta(x, y) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{Jac}^u(f^{-1}; f^{-n}(x))}{\mathrm{Jac}^u(f^{-1}; f^{-n}(y))} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{Jac}^u(f^{-n}; x)}{\mathrm{Jac}^u(f^{-n}; y)}. \tag{24}$$

Si les mesures conditionnelles de μ le long des variétés instables $W_{u(x)}(x)$ sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, Ledrappier et Young montrent que les densités τ_x telles que $\mu_{\xi(x)} = \tau_x \, \mathrm{vol}_{u(x),x}$ sont déterminées par la relation

$$\frac{\tau_x(y)}{\tau_x(x)} = \Delta(x, y) \tag{25}$$

et par la condition $\mu_{\xi(x)}(\xi(x)) = 1$.

Remarque 5.2. — L'égalité (22) est la *formule de Ledrappier-Young*. L'inégalité (23) est l'*inégalité de Margulis-Ruelle* ([62]). La *formule de Pesin* correspond au cas d'égalité lorsque les conditionnelles de μ le long des variétés instables maximales $W_{u(x)}(x)$ sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue (voir [58, 44]).

Remarque 5.3. — Lorsque l'on étudie la dynamique d'un groupe abélien $A = \mathbf{R}^r$ de rang $r \geq 2$ vis-à-vis d'une mesure de probabilité A-invariante, la formule de Ledrappier et Young peut être employée simultanément pour tous les éléments d'une même chambre de Lyapounoff. Huyi Hu en déduit que l'entropie $a \mapsto h_\mu(a)$ est sous-additive, et linéaire dans chaque chambre : $h_\mu(ab) \leq h_\mu(a) + h_\mu(b)$ avec égalité lorsque a et b appartiennent à la même chambre (voir [36]). Nous n'aurons pas besoin de ce résultat ici.

5.3. Dimension maximale, et invariance supplémentaire

5.3.1. — Ajoutons deux hypothèses supplémentaires. Voici la première :

(i) un groupe de Lie connexe H agit librement sur N par difféomorphismes, et les variétés instables $W_{u(x)}(x)$ de f sont des orbites de H.

Soit vol_H une forme volume sur H invariante par translations à gauche ; cette forme est unique à multiplication près par un réel $\neq 0$. La variété $W_{u(x)}(x)$ s'identifie à l'orbite Hx de x et on la munit de la forme vol_x obtenue par image de vol_H via l'application $h \in H \mapsto hx \in W_{u(x)}(x)$. La seconde hypothèse est :

(ii) le jacobien de $f \colon W_{u(x)}(x) \to W_{u(f(x))}(f(x))$ par rapport aux formes vol_x et $\mathrm{vol}_{f(x)}$ est constant.

2. Ici, je passe sous silence le choix précis des paramétrages. Il s'agit des paramétrages données par la théorie de Pesin dans les « boîtes de Pesin ». Les variétés instables que nous emploierons seront naturellement paramétrées par les orbites d'un groupe de Lie agissant sur N.

Avec ces choix, la fonction $\Delta(x,y)$ est constante dans chaque variété $W_{u(x)}(x)$. *S'il y a égalité dans l'inégalité de Margulis-Ruelle pour μ, les mesures $\mu_{\xi(x)}$ sont alors égales à $(\mathrm{vol}_x(\xi(x)))^{-1}(\mathrm{vol}_x)_{|\xi(x)}$. En ce cas, μ est invariante sous l'action de H.* L'égalité dans l'inégalité de Margulis-Ruelle conduit donc à l'invariance de μ par le groupe H.

Remarque 5.4. — Lorsque f normalise le groupe H, (ii) résulte de (i) : en effet, la conjugaison par f détermine un automorphisme c_f du groupe H ; $c_f^*\mathrm{vol}_H$ est invariante par translations à gauche, et est donc un multiple de vol_H.

5.3.2. — Pour illustrer cet argument, reprenons l'exemple 2.3 des flots géodésiques et horocycliques sur $\mathsf{PSL}_2(\mathbf{R})/\Gamma$. Le flot géodésique correspond à l'action par translations à gauche du groupe diagonal $A \subset \mathsf{PSL}_2(\mathbf{R})$; ce groupe est isomorphe à son algèbre de Lie $\mathsf{a} = \mathbf{R}$, via l'application exponentielle $t \mapsto g^t$ (voir (5)). Supposons $t > 0$. Les orbites du flot horocyclique supérieur fournissent un feuilletage A-invariant. C'est le feuilletage instable, associé à la forme de Lyapounoff $L_{1,2}$, i.e. à $t \mapsto 2t$, tandis que le flot horocyclique inférieur donne le feuilletage stable, avec la forme de Lyapounoff opposée. Les orbites de A correspondent à la forme de Lyapounoff nulle.

Considérons maintenant une mesure de probabilité μ qui est invariante et ergodique sous l'action de g^t, avec $t > 0$ fixé. Supposons que μ est également invariante sous l'action du flot h_+^s, $s \in \mathbf{R}$. Cette invariance assure que les conditionnelles de μ le long du feuilletage instable de g^t sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue : il y a donc égalité dans l'inégalité de Margulis-Ruelle, c'est-à-dire que l'entropie de g^t pour μ est égale au produit de l'exposant (ici $2t$) par la dimension des variétés instables (ici 1). Puisque $h_\mu(g^{-t}) = h_\mu(g^t)$ et puisque l'exposant de Lyapounoff positif de g^{-t} est aussi égal à $2t$, la formule de Ledrappier-Young montre que la dimension des conditionnelles de μ le long des courbes instables de g^{-t} est égale à 1. Il y a donc encore égalité dans l'inégalité de Margulis-Ruelle, mais maintenant pour g^{-t} et le feuilletage en orbites du flot h_-^s. Du paragraphe 5.3.1 on déduit que μ est h_-^s-invariante. Finalement, μ est invariante sous l'action de $\mathsf{PSL}_2(\mathbf{R})$ et coïncide donc avec la mesure de Haar sur $\mathsf{PSL}_2(\mathbf{R})/\Gamma$. Nous renvoyons à [53, 68] pour une présentation détaillée de cette idée.

6. THÉORÈMES DE SUPER-RIGIDITÉ POUR LES COCYCLES

6.1. Théorème de super-rigidité de Zimmer

Soit $(X, \mathcal{X})$ un espace mesurable ; il est standard s'il est isomorphe à un espace métrique compact muni de sa tribu des boréliens. Soit μ une mesure de probabilité sur X. Soient $G \times X \to X$ une action mesurable de G sur X et $D\colon G \times X \to H$ un cocycle à valeurs dans un groupe topologique H. À un tel cocycle est associée une action mesurable de G sur $X \times H$, définie par

$$g(x,y) = (gx, D(g,x)y) \tag{26}$$

pour tout $(x, y) \in X \times H$. Deux cocycles D et D' sont équivalents s'il existe une application mesurable $\varphi\colon X \to H$ telle que $D'(g, x) = \varphi(gx)^{-1} D(g, x)\varphi(x)$; l'application $(x, y) \mapsto (x, \varphi(x)y)$ conjugue alors l'action de G sur $X \times H$ déterminée par D' à celle déterminée par D. Si $\rho\colon G \to H$ est un homomorphisme de groupes, alors $D_\rho(g, x) = \rho(g)$ définit un cocycle indépendant de x. Si D est équivalent à un tel cocycle D_ρ, l'action de G sur $X \times H$ associée à D est conjuguée à l'action diagonale $(x, y) \mapsto (gx, \rho(g)y)$.

Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes de H dont les éléments commutent : $h_1h_2 = h_2h_1$ pour tout $(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$. Si D_1 et D_2 sont des cocycles à valeurs dans H_1 et H_2, leur produit est encore un cocycle.

Le théorème suivant est démontré dans [72] et [24]. L'exposé de Hillel Furstenberg à ce séminaire [27] offre une introduction remarquable à cette extension du théorème de super-rigidité de Margulis et à ses applications (voir aussi [21]).

Théorème 6.1 (super-rigidité des cocycles de Zimmer). — *Soit G un groupe de Lie presque simple, connexe et algébriquement simplement connexe dont le rang est ≥ 2. Soit $G \times X \to X$ une action de G sur un espace mesurable standard qui préserve une mesure de probabilité μ ergodique. Soit $D\colon G \times X \to H$ un cocycle à valeurs dans un groupe algébrique linéaire réel. Il existe alors un homomorphisme de groupes de Lie $\rho\colon G \to H$, un sous-groupe compact C de H qui centralise $\rho(G)$, un cocycle mesurable $R\colon G \times X \to C$ et une application mesurable $\sigma\colon X \to H$ tels que*

$$D(g, x) = \sigma(gx)^{-1} D_\rho(g) R(g, x) \sigma(x)$$

pour tout g et pour μ-presque tout x.

Si G n'est pas algébriquement simplement connexe, la conclusion reste valable après passage à un revêtement fini de G. En laissant de côté ce problème de revêtement fini, nous pouvons dire que tout cocycle à valeurs dans $\mathsf{GL}_m(\mathbf{R})$ est équivalent au cocycle D_ρ associé à un homomorphisme analytique $\rho\colon G \to \mathsf{GL}_m(\mathbf{R})$, modulo un bruit résiduel qui est confiné dans un cocycle mesurable à valeurs dans un groupe compact.

6.2. Applications

Reprenons le contexte et les notations du paragraphe 3.3, et appliquons le théorème de Zimmer au cocycle vertical D^π, sur la suspension M_α. Pour cela, on suppose qu'il existe une mesure de probabilité μ sur M_α qui est G-invariante et ergodique. Si tout homomorphisme de G vers $\mathsf{GL}_d(\mathbf{R})$ est trivial, alors D^π est équivalent à un cocycle à valeurs dans un groupe compact : il existe une application mesurable $\sigma\colon M_\alpha \to \mathsf{GL}_d(\mathbf{R})$ et un groupe compact $C \subset \mathsf{GL}_d(\mathbf{R})$ tels que

$$D^\pi(g, x) \in \sigma(\alpha_G(g)(x))^{-1} C \sigma(x) \tag{27}$$

pour tout g et presque tout x.

L'exposant de Lyapounoff vertical maximal par rapport à μ est donc nul pour tout élément $g \in G$. Pour s'en convaincre, choisissons $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que l'ensemble $Y_\epsilon = \{y \in X |\ \epsilon \leq \| \sigma(y) \| \leq \epsilon^{-1}\}$ soit de mesure strictement positive. Par ergodicité de μ, pour presque tout x, il existe une suite d'entiers n_i tendant vers l'infini telle que $\alpha_G(g^{n_i})(x)$ appartienne toujours à Y_ϵ. Comme

$$D^\pi(g^{n_i}, x) \in \sigma(\alpha_G(g^{n_i})(x))^{-1} C \sigma(x) \tag{28}$$

on déduit que la dilatation moyenne $\frac{1}{n_i} Dil(g^{n_i}, x)$ tend vers 0, et ceci montre que l'exposant maximal est nul. Ainsi, tous les exposants de Lyapounoff verticaux sont nuls.

Par exemple, si $G = \mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$ et $d \leq n$, tout homomorphisme de G vers $\mathsf{GL}_d(\mathbf{R})$ est trivial, donc les exposants de Lyapounoff des éléments de G vis-à-vis des mesures G-invariantes sont nuls. Cet argument fournit, plus généralement, le corollaire suivant.

Corollaire 6.2 ([27, 21, 72]). — *Soit G un groupe de Lie presque simple, connexe, et de rang ≥ 2. Soit Γ un réseau de G. Si Γ agit sur une variété compacte M de dimension d en préservant une mesure de probabilité μ ergodique, il existe une représentation linéaire $\rho\colon G \to \mathsf{GL}_d(\mathbf{R})$ telle que les exposants de Lyapounoff de tout élément $\gamma \in \Gamma$ vis-à-vis de μ soient donnés par les logarithmes des modules des valeurs propres de $\rho(\gamma)$.*

Ce corollaire supporte évidemment les conjectures 2.6 et 2.7, avec deux bémols cependant : pour l'appliquer, il faut d'abord construire une mesure G-invariante ; l'application σ du théorème 6.1 est seulement mesurable (a priori, log $\| \sigma(x) \|$ n'est pas intégrable vis-à-vis de μ). Par exemple, si Γ agit en préservant une forme volume sur M, et si toute représentation de G dans $\mathsf{GL}_d(\mathbf{R})$ est triviale, le théorème de Zimmer permet de construire une « métrique riemannienne mesurable » sur M qui est Γ-invariante ; mais les fluctuations de cette métrique par rapport à une métrique lisse ne sont pas contrôlées. Si cette métrique invariante était lisse, la conjecture 2.7 serait démontrée (voir l'argument du paragraphe 10.4).

Remarque 6.3. — La conclusion du théorème 6.1 peut éventuellement être renforcée en présence d'une structure géométrique invariante supplémentaire. Considérons par exemple un réseau Γ de $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$, $n \geq 2$, qui agit sur une variété compacte M en préservant une forme volume et une connexion affine. *Si* $\dim(M) \leq n$, *alors* Γ *préserve une métrique riemannienne, et l'action transite en fait par celle d'un quotient fini de* Γ. *Si* $\dim(M) = n+1$ *et l'action est fidèle, alors* M *est difféomorphe à* $\mathbf{R}^{n+1}/\mathbf{Z}^{n+1}$ *et l'action de* Γ *est conjuguée à l'action standard d'un sous-groupe de* $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{Z})$ *d'indice fini* (voir [33, 71, 72, 73]).

7. CROISSANCE DES DÉRIVÉES ET EXPOSANTS

7.1. Actions anémiques et vigoureuses

Soit H un groupe topologique muni d'une partie symétrique et compacte $S \subset H$ qui engendre H. Notons $B(n)$ l'ensemble des éléments de H qui s'écrivent comme produit d'au plus n éléments de S, et notons $\ell\colon H \to \mathbf{N}$ la longueur définie par

$$\ell(g) = \min\{n \mid g \in B(n)\}. \tag{29}$$

L'ensemble $B(n)$ est donc la boule de rayon n centrée en l'élément neutre e_H pour la longueur ℓ.

Soit N une variété riemannienne compacte. Soit $\beta\colon H \to \mathsf{Diff}^1(N)$ un homomorphisme. Nous noterons $\| D\beta(h) \|_N$ le maximum de la norme des différentielles $D\beta(h)_x\colon T_xN \to T_{\beta(h)(x)}N$, calculées à l'aide de la métrique riemannienne fixée sur N.

Nous dirons que l'action $H \times N \to N$ définie par β est **anémique** si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $h \in H$ on ait

$$\| D\beta(h) \|_N \leq C \exp(\epsilon \ell(h)). \tag{30}$$

Si $F \leq TN$ est un sous-fibré, l'action est anémique le long de F si la majoration précédente est satisfaite pour les normes des dérivées $(D\beta(h)_x)_{|F_x}$ restreintes aux sous-espaces F_x. Une action est **vigoureuse** si elle n'est pas anémique. Ces notions ne dépendent pas du choix de la métrique sur N, ni de la partie génératrice S (symétrique et compacte).

Appliquons ces notions au groupe de Lie connexe G et au réseau uniforme Γ. Rappelons que G est muni d'une distance riemannienne d_G invariante à droite et bi-invariante sous l'action du sous-groupe compact K. Nous pouvons alors remplacer $\ell(g)$ par $d_G(g, e_G)$ sans changer les notions introduites. Identifions le sous-espace de Cartan $\mathsf{a} = \mathbf{R}^n$ à A par l'application exponentielle ; alors A est un sous-espace géodésique de G sur lequel d_G est une métrique euclidienne. Si $g = kak'$ est la décomposition de Cartan de $g \in G$, avec $a = \exp(u)$ et u dans la chambre de Weyl, la distance $d_G(g, e_G)$ est égale à la norme de u pour cette métrique euclidienne modulo un terme d'erreur uniformément borné.

En tant que réseau de G, Γ est un groupe de type fini (voir [3], §1.3 quand $\mathrm{rg}(G) \geq 2$) : il existe une partie finie, symétrique et génératrice $S \subset \Gamma$. Comme Γ est uniforme, la fonction longueur associée à S est égale à la restriction de $d_G(\cdot, e_G)$ à Γ modulo un terme d'erreur borné. Ainsi, *l'action de Γ sur M est anémique si et seulement si celle de G sur M_α est anémique le long du fibré tangent aux fibres de $\pi\colon M_\alpha \to G/\Gamma$.*

7.2. Vigueur et exposants

THÉORÈME 7.1. — *Soit $G \times N \to N$ une action $\mathcal{C}^1$ de G sur une variété compacte N. Si l'action est vigoureuse il existe une mesure de probabilité μ sur N qui est A-invariante et possède une forme de Lyapounoff non nulle : il existe $b \in A$ tel que $\lambda_+(b, \mu) > 0$.*

Nous désignerons par T^1N le fibré unitaire tangent de N ; un élément v de T^1N est donc la donnée d'une paire (x, v) où x appartient à N, v appartient à T_xN, et $\| v \| = 1$. Si g est un difféomorphisme de N, et $v \in T^1N$, on définit $(g)^1_* v = \frac{g_* v}{\| g_* v \|}$. La dilatation logarithmique de g en v est définie par

$$\mathrm{dil}(g, v) = \log\left(\frac{\| g_* v \|}{\| v \|}\right) \tag{31}$$

pour tout $v \in TN$; c'est donc $\log \| g_* v \|$ si v est unitaire. Si ν est une mesure de probabilité sur T^1N, la dilatation moyenne de g est définie par

$$\mathrm{dil}(g, \nu) = \int_{T^1N} \mathrm{dil}(g, v)\, d\nu(v). \tag{32}$$

Si ν_n converge vers ν en topologie faible-$\star$ et g_n converge vers g en topologie $\mathcal{C}^1$, alors $\mathrm{dil}(g_n, \nu_n)$ converge vers $\mathrm{dil}(g, \nu)$.

Démonstration. — Quitte à moyenner la métrique riemannienne de N sous l'action du groupe compact K, nous pouvons supposer qu'elle est K-invariante. Une suite $g_n \in G$ tend vers l'infini si et seulement si sa partie diagonale a_n dans la décomposition de Cartan $g_n = k_n a_n k_n'$ tend aussi vers l'infini. Puisque l'action est vigoureuse, il existe un réel $\epsilon > 0$, une suite de vecteurs unitaires $v_n \in T^1N$ et une suite d'éléments $a_n \in A$ tels que (a_n) tende vers l'infini dans A et

$$\| (a_n)_* v_n \| \geq \exp(2\epsilon d_G(e_G, a_n)). \tag{33}$$

Écrivons $a_n = \exp(t_n u_n)$ avec $u_n \in \mathsf{a}$ et $t_n \in \mathbf{R}_+$ choisis pour que $d_G(e_G, a_n) = t_n$. Posons ensuite $s_n = \lfloor t_n \rfloor$ et $b_n = \exp(u_n)$. Alors (b_n) est une suite bornée et

$$\| (b_n^{s_n})_* v_n \| \geq \exp(\epsilon s_n). \tag{34}$$

En extrayant une sous-suite, nous pouvons supposer, et nous supposerons, que la suite (b_n) converge vers un élément b de A.

La moyenne le long de l'orbite de v_n sous l'action de b_n pour les temps $0 \leq j < s_n$ détermine une mesure de probabilité ν_n sur T^1N : si $\varphi \colon T^1N \to \mathbf{R}$ est continue,

$$\int_{T^1N} \varphi\, d\nu_n = \frac{1}{s_n} \sum_{j=0}^{s_n - 1} \varphi((b_n^j)_*^1 v_n). \tag{35}$$

L'inégalité (34) entraîne alors $\mathrm{dil}(b_n, \nu_n) \geq \epsilon$ car

$$\begin{aligned} \mathrm{dil}(b_n, \nu_n) &= \frac{1}{s_n} \sum_{j=0}^{s_n-1} \mathrm{dil}(b_n, (b_n^j)_*^1 v_n) \\ &= \frac{1}{s_n} \log \prod_{j=0}^{s_n-1} \frac{\| (b_n^{j+1})_* v_n \|}{\| (b_n^j)_* v_n \|} \\ &= \frac{1}{s_n} \log \frac{\| (b_n^{s_n})_* v_n \|}{\| v_n \|}. \end{aligned} \tag{36}$$

Soit ν une limite faible de la suite ν_n. Puisque les difféomorphismes b_n tendent vers b, on constate facilement que ν est une mesure de probabilité b-invariante pour laquelle $\mathrm{dil}(b, \nu) \geq \epsilon$. Il existe donc une composante b-ergodique de ν (toujours notée ν) qui vérifie la même inégalité. Soit μ_b la projection de ν sur N ; c'est une mesure de probabilité b-invariante et ergodique.

Le théorème ergodique de Birkhoff peut être appliqué à ν : pour ν-presque tout vecteur unitaire w, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\epsilon &\leq \int_{T^1N} \mathrm{dil}(b,v)\, d\nu(v) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{dil}(b,(b^j)^1_* w) \qquad (37)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log \| b^n_* w \| \, .
\end{aligned}$$

Il existe donc un exposant de Lyapounoff strictement positif pour μ_b. On moyenne alors μ_b à l'aide d'une suite de Følner dans A ; la mesure μ obtenue est A-invariante et vérifie $\lambda_+(b,\mu) > 0$ (la démonstration est semblable à celle du lemme 3.4) . □

La même démonstration, appliquée aux exposants de Lyapounoff le long des fibres de la projection $\pi\colon M_\alpha \to G/\Gamma$, fournit l'énoncé suivant.

THÉORÈME 7.2. — *Si l'action de Γ sur M est vigoureuse, il existe une mesure de probabilité μ sur M_α qui est A-invariante et un élément $b \in A$ tels que l'exposant de Lyapounoff maximal de b le long des fibres de π soit strictement positif : $\lambda^\pi_+(b,\mu) > 0$.*

8. MOYENNES ET INVARIANCE

8.1. Théorèmes de Ratner et Shah

8.1.1. *Sous-groupes unipotents.* — Un élément $g \in G$ est **unipotent** si l'endomorphisme $\mathrm{Ad}(g) - \mathrm{Id}$ de $\mathfrak{g}$ est nilpotent ; un sous-groupe U est unipotent si tous ses éléments le sont. Soit U un sous-groupe fermé de G qui est connexe, simplement connexe et unipotent, et soit $\mathfrak{u}$ son algèbre de Lie (par le théorème d'Engel, U est nilpotent). Soit $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_s)$ une base de $\mathfrak{u}$. Chaque élément v de $\mathfrak{u}$ s'écrit donc $v = \sum_{i=1}^s \alpha_i(v) b_i$; la base est dite **triangulaire** si $\alpha_k([b_i, b_j]) = 0$ dès que $k \leq \max\{i,j\}$, et **régulière** s'il existe une permutation des vecteurs b_i qui fournisse une base triangulaire.

Exemple 8.1. — Les matrices triangulaires supérieures avec des 0 sur la diagonale forment une sous-algèbre $\mathfrak{u}_{n+1}$ de $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{R})$. La famille de matrices élémentaires

$$(e_{1,2}, e_{2,3}, \ldots, e_{n,n+1}, e_{1,3}, e_{2,4}, \ldots, e_{n-1,n+1}, \ldots, e_{1,n}, e_{2,n+1}, e_{1,n+1}) \qquad (38)$$

définit une base triangulaire de $\mathfrak{u}_n$. Le groupe $U_{n+1} \subset \mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$ associé est celui des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale.

Fixons une base régulière $\mathbf{b}$ de $\mathfrak{u}$. L'application exponentielle $\exp\colon \mathfrak{u} \to U$ est alors polynomiale en les coordonnées. Si $m = (m_1, \ldots, m_s)$ est un élément de $[0, +\infty[^s$, l'ensemble

$$F_m = \{\exp(t_s b_s) \cdots \exp(t_1 b_1)\,; 0 \leq t_i \leq m_i, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq s\} \qquad (39)$$

est un compact de U et lorsque les réels m_i tendent simultanément vers $+\infty$, les F_m forment une suite de Følner pour U. Nous noterons ν_m les mesures associées (§ 3.4) :

$$\nu_m = \frac{\mathbf{1}_{F_m}}{\mathrm{vol}_U(F_m)} \mathrm{vol}_U. \tag{40}$$

8.1.2. *Ensembles et mesures algébriques.* — Un sous-ensemble fermé $Z \subset G/\Gamma$ est **algébrique** s'il existe un sous-groupe fermé F de G et un point z de Z tels que $Fz = Z$; autrement dit, Z est une orbite fermée de F : c'est le quotient de F par $F \cap (z\Gamma z^{-1})$. Supposons de plus que le sous-groupe discret $F \cap (z\Gamma z^{-1})$ soit un réseau de F ; c'est automatique lorsque G/Γ est compact, car Fz est fermée, donc compacte. Il existe alors une unique mesure de probabilité F-invariante portée par l'ensemble algébrique Z ; elle est induite par une mesure de Haar de F. Les mesures ainsi construites sont dites algébriques.

8.1.3. *Les théorèmes.* — Soient Γ un réseau dans le groupe de Lie connexe G, et U un sous-groupe unipotent de G. Les théorèmes de Ratner et Shah dont nous ferons usage sont les quatre énoncés (a), (b), (c) et (d) qui suivent ; ils concernent tous l'action de U par translations à gauche sur G/Γ (voir [28] et [68] pour une introduction).

(a) *L'adhérence $\overline{Ux}$ de toute orbite de U est algébrique. Plus précisément, pour tout $x \in G/\Gamma$ il existe un sous-groupe fermé $F \subset G$ tel que $x\Gamma x^{-1}$ soit un réseau de F et $\overline{Ux} = Fx$.*

(b) *Toute mesure de probabilité U-invariante et ergodique est algébrique.*

Ainsi, à tout $x \in G/\Gamma$ est associée une mesure de probabilité m_x^U : c'est l'unique mesure algébrique dont le support est $\overline{Ux}$. Si μ est une mesure de probabilité sur G/Γ, nous noterons $U \star \mu$ la mesure définie par

$$U \star \mu = \int_{G/\Gamma} m_x^U \, d\mu(x). \tag{41}$$

Soit $\mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^s$ une base régulière de $\mathfrak{u}$. La propriété suivante est le corollaire 1.3 de [63].

(c) *Si les s coordonnées de la suite $m_n = (m_{i,n}) \in [0, +\infty[^s$ tendent simultanément vers $+\infty$, la suite de mesures de probabilité $\nu_{m_n} \star \delta_x$ converge vers la mesure algébrique m_x^U ; donc $\nu_{m_n} \star \mu$ converge vers $U \star \mu$ pour toute mesure de probabilité μ sur G/Γ.*

L'énoncé (d) utilise les précédents pour fournir des invariances automatiques. Comme au paragraphe 2.1, $\mathfrak{a}$ désigne le sous-espace de Cartan de $\mathfrak{g}$, L est une racine, et G^L est le sous-groupe connexe normalisé par $A = \exp(\mathfrak{a})$ dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}^L$.

(d) *Si μ est une mesure de probabilité qui est invariante sous l'action de A et de G^L, alors μ est aussi G^{-L}-invariante.*

Au paragraphe 5.3.1, nous avons démontré cette assertion lorsque G est $\mathsf{PSL}_2(\mathbf{R})$ et A est le groupe diagonal en la déduisant du théorème de Ledrappier-Young.

Nous utiliserons également le corollaire suivant, que nous énonçons comme une cinquième propriété. Soit U un sous-groupe unipotent normalisé par A.

(e) *Soit μ une mesure de probabilité sur G/Γ. Si μ est A-invariante, alors $U \star \mu$ est aussi A-invariante ; et si μ est A-ergodique, $U \star \mu$ l'est aussi.*

L'invariance résulte de l'assertion (c). L'ergodicité provient de l'existence d'un élément a de A qui contracte strictement U : l'algèbre de Lie de U est contenue dans la somme des algèbres g^L avec $L(a) < 0$ (voir le corollaire 3.7 de [5]). Si une fonction bornée φ est A-invariante, elle est a-invariante, donc constante le long des orbites de U ; $\varphi(x)$ coïncide donc avec $m_x^U(\varphi)$ pour $U \star \mu$-presque tout x. L'ergodicité résulte alors de celle de μ (voir la proposition 5.2 de [11]).

8.2. Moyennes et invariance dans G/Γ

PROPOSITION 8.2. — *Soit μ une mesure de probabilité sur M_α qui est A-invariante et possède une forme de Lyapounoff verticale non nulle. Si le rang de G est ≥ 2, il existe une mesure de probabilité ν sur M_α qui est A-invariante, est A-ergodique, possède une forme de Lyapounoff verticale non nulle, et se projette sur la mesure de Haar : $\pi_*\nu = \mathrm{vol}$.*

Remarque 8.3. — Comme $\mathrm{rg}(G) \geq 2$, nous sommes dans le cadre de la conjecture de Margulis qui prédit que A préserve très peu de mesures de probabilité dans G/Γ (voir [7, 17, 54]). Certaines idées de ce texte sont d'ailleurs déjà présentes dans [17, 39].

Nous allons montrer la proposition 8.2 pour les actions de $G = \mathsf{SL}_3(\mathbf{R})$, avec A le groupe des matrices diagonales à coefficients positifs ; le cas du groupe $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$ ne présente pas de difficulté supplémentaire. Le cas général est traité au paragraphe 5.4 de [11].

Remarque 8.4. — À partir de μ, il n'est pas difficile de construire une mesure A-invariante dans M_α dont la projection sur G/Γ soit la mesure vol. En effet, le groupe (de Borel) B des matrices triangulaires supérieures contient A et est moyennable ; il est donc possible de moyenner la mesure μ à l'aide d'une suite de Følner dans B, ce qui fournit une mesure ν. La projection $\pi_*\nu$ coïncide alors avec vol (propriété (d)). Pour démontrer la proposition, il s'agit maintenant de raffiner cet argument pour que ν conserve un exposant de Lyapounoff vertical strictement positif.

8.2.1. *Première moyenne.* — Comme dans les exemples 2.2 et 4.2, nous notons $\mathsf{a} = \mathbf{R}^2$ l'algèbre de Lie de A, $L_i \in \mathsf{a}^\vee$ les formes linéaires définies par $L_i(a) = t_i$, et $E_{i,j} \subset G$ les sous-groupes élémentaires.

Remplaçons μ par l'une de ses composantes ergodiques, encore notée μ, possédant une forme de Lyapounoff verticale non nulle ; soit λ^π une telle forme : c'est un élément de $\mathsf{a}^\vee \setminus \{0\}$. Quitte à permuter les indices (i.e. à faire agir le groupe de Weyl de G), nous pouvons supposer que λ^π n'est pas proportionnelle à la forme $L_2 - L_3$. Soit a un élément de A dont les termes diagonaux sont $\exp(-2t)$, $\exp(t)$, $\exp(t)$. Alors a et $E_{2,3}$ commutent, et quitte à choisir t du bon signe $\lambda^\pi(a) > 0$.

On moyenne alors μ sous l'action de $E_{2,3}$ sur M_α à l'aide d'une suite de Følner dans $E_{2,3}$, ce qui donne une mesure de probabilité μ' à la limite. Le lemme 3.4 montre que μ' est a-invariante et vérifie $\lambda_+^\pi(a, \mu') > 0$. Par construction, μ' est aussi $E_{2,3}$-invariante. De plus, dans G/Γ, la projection $\pi_*\mu'$ est à la fois $E_{2,3}$, A-invariante, et A-ergodique ; en effet, $\pi_*\mu$ était A-invariante, et l'on peut appliquer la propriété (e) puisque A normalise $E_{2,3}$. On déduit alors de (d) que $\pi_*\mu'$ est à la fois A, $E_{2,3}$, et $E_{3,2}$-invariante.

On moyenne ensuite μ' sous l'action de A sur M_α à l'aide d'une suite de Følner de A afin d'obtenir une mesure μ_1 à la limite. La projection de μ_1 sur G/Γ est égale à $\pi_*\mu'$ et conserve donc les propriétés d'invariance sous A, $E_{2,3}$, et $E_{3,2}$. De plus, μ_1 est A-invariante et $\lambda_+^\pi(a, \mu_1) > 0$ grâce au lemme 3.4 car A et a commutent.

8.2.2. *Seconde moyenne.* — Supposons pour simplifier que μ_1 est A-ergodique (voir la remarque 8.5 ci-dessous). Les formes de Lyapounoff λ_i^π pour μ_1 sont des formes linéaires sur a ; l'une d'entre elles, à nouveau notée λ^π, fournit l'exposant maximal de a : $\lambda^\pi(a) = \lambda_+^\pi(a; \mu_1) > 0$.

Supposons dans un premier temps que λ^π n'est pas proportionnelle à la forme linéaire $L_1 - L_2$. Soit u un élément de a tel que $L_1(u) - L_2(u) = 0$, c'est-à-dire que $u = (t, t, -2t)$. Soit $b = \exp(u)$. Alors $E_{1,2}$ commute à b et $\lambda^\pi(b) > 0$ si le signe de t est convenablement choisi. Moyennons μ_1 par rapport à $E_{1,2}$ pour obtenir une mesure limite μ_1', puis par rapport à A pour obtenir une mesure limite μ_2. Par le lemme 3.4 et la propriété (e), μ_2 est A-invariante, elle vérifie $\lambda_+^\pi(b; \mu_2) > 0$, et sa projection $\pi_*\mu_2$ dans G/Γ est invariante par A et par $E_{1,2}$; la propriété (d) montre donc que $\pi_*\mu_2$ est invariante par $E_{2,1}$. Ce faisant, on perd a priori l'invariance par $E_{2,3}$ qui était satisfaite par $\pi_*\mu_1$. Mais comme $E_{1,2}$ commute à $E_{3,2}$ la mesure $\pi_*\mu_1'$ reste $E_{3,2}$-invariante ; et comme A normalise $E_{3,2}$, la mesure $\pi_*\mu_2$ est invariante par A, par $E_{3,2}$ et par $E_{2,3}$ (propriétés (e) et (d)). Finalement, $\pi_*\mu_2$ est invariante sous l'action de toutes les matrices de $\mathsf{SL}_3(\mathbf{R})$ dont les coefficients $a_{1,3}$ et $a_{3,1}$ sont nuls. Puisque ces matrices engendrent $\mathsf{SL}_3(\mathbf{R})$, la mesure $\pi_*\mu_2$ est G-invariante et coïncide avec la mesure vol.

Soit ν une composante A-ergodique de μ_2 ayant un exposant de Lyapounoff maximal λ_+^π non nul. Puisque la mesure vol est A-ergodique (théorème de Moore), la projection $\pi_*\nu$ coïncide avec vol ; donc ν vérifie chacune des conclusions de la proposition.

Il se pourrait toutefois que la forme de Lyapounoff λ^π soit proportionnelle à $L_1 - L_2$. Dans ce cas, on fait jouer à $E_{1,3}$ le rôle qui était dévolu à $E_{1,2}$ en considérant un élément $b \in A$ qui commute à $E_{1,3}$ et vérifie $\lambda^\pi(b) > 0$ (b est de la forme $\exp(u)$ avec $u = (t, -2t, t)$). On moyenne alors successivement le long des orbites de $E_{1,3}$ et de A : la mesure μ_2 ainsi construite est invariante par A et vérifie $\lambda_+^\pi(b; \mu_2) > 0$. Sa projection $\pi_*\mu_2$ est invariante par $E_{1,3}$, par $E_{2,3}$ car $E_{1,3}$ et $E_{2,3}$ commutent, et par A car A normalise ces deux groupes. Elle est donc aussi invariante par $E_{3,2}$ et $E_{2,1}$, donc par G. Ceci termine la preuve.

Remarque 8.5. — Nous avons fait une hypothèse simplificatrice en supposant que μ_1 est A-ergodique. Le même raisonnement s'applique sans cette hypothèse en définissant différemment la forme de Lyapounoff λ^π. On décompose μ_1 en composantes ergodiques $\mu_{1,x}$: $\mu_1 = \int_{M_\alpha} \mu_{1,x} d\mu_1(x)$. Chaque composante fournit une forme de Lyapounoff maximale λ^π_x pour a, et l'on définit λ^π comme la moyenne $\lambda^\pi = \int_{M_\alpha} \lambda^\pi_x d\mu_1(x)$ (voir le lemme 3.4 de [11]). La preuve s'adapte alors mot pour mot.

Exemple 8.6. — Considérons l'action projective de $G = \mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{R})$ sur $\mathbb{P}^n(\mathbf{R})$: si g appartient à G, $\hat{\alpha}(g)$ désignera la transformation linéaire projective associée. Restreignons cette action au réseau $\Gamma \subset G$ et construisons la suspension M_α. D'après la remarque 3.1, l'application $\psi\colon (g,m) \mapsto (g, \hat{\alpha}(g)(m))$ induit un difféomorphisme de M_α sur $M'_\alpha = G/\Gamma \times \mathbb{P}^n(\mathbf{R})$ qui conjugue l'action de G sur M_α à l'action diagonale de G sur M'_α. Notons A le tore formé des matrices diagonales positives. Soient μ une mesure de probabilité A-invariante et ergodique sur M_α et μ' son image par ψ : c'est une mesure invariante et ergodique pour l'action diagonale de A. Les points fixes de $\hat{\alpha}(A)$ sont les $n+1$ points p_i ayant une seule coordonnée homogène non nulle ; et toute mesure de probabilité $\hat{\alpha}(A)$-invariante et ergodique est une masse de Dirac en l'un de ces points. Ainsi, la projection de μ' sur $\mathbb{P}^n(\mathbf{R})$ est l'une de ces masses de Dirac. Si $\pi_*\mu = \mathrm{vol}$, comme c'est le cas pour la mesure construite dans la proposition 8.2, alors $\mu' = \mathrm{vol} \otimes \delta_p$ où p est l'un des p_i. Ainsi, μ est l'image de vol par l'application $g \in G/\Gamma \mapsto (g, \hat{\alpha}(g)^{-1}(p)) \in M_\alpha$.

8.3. Invariance dans M_α

Proposition 8.7. — *Soit ν une mesure de probabilité A-invariante et ergodique sur M_α, dont la projection sur G/Γ est la mesure de Haar. Si $\dim(M) < rg(G)$, ou si $\dim(M) \leq \mathrm{rg}(G)$ et Γ préserve une forme volume sur M, alors ν est G-invariante.*

Lemme 8.8. — *Soient g une algèbre de Lie réelle simple et u un élément non nul d'un sous-espace de Cartan $\mathsf{a} \subset \mathsf{g}$. Soit $\Phi_u \subset \Phi$ l'ensemble des racines L telles que $L(u) \neq 0$. La sous-algèbre de g engendrée par les espaces propres g^L pour $L \in \Phi_u$ coïncide avec g.*

Démonstration du lemme. — Notons h cette sous-algèbre. Si v appartient à a, alors $[v, \mathsf{g}^L] \subset \mathsf{g}^L$ pour toute racine, donc $[v, \mathsf{h}] \subset \mathsf{h}$. Si $L' \in \Phi$ et $L'(u) = 0$, alors $[\mathsf{g}^{L'}, \mathsf{g}^L] \subset \mathsf{g}^{L'+L}$ et $(L' + L)(u) = L(u) \neq 0$ pour tout $L \in \Phi_u$, donc $[\mathsf{g}^{L'}, \mathsf{h}] \subset \mathsf{h}$. Ainsi, h est un idéal de g, non nul car toutes les racines ne peuvent s'annuler en u ; donc $\mathsf{h} = \mathsf{g}$ par simplicité de g. □

Démonstration. — Notons λ^π_i, $1 \leq i \leq l$, les formes de Lyapounoff verticales de la mesure ergodique ν. Le sous-espace de $\mathsf{a}^\vee$ engendré par les λ^π_i est contenu dans un hyperplan : ceci est évident lorsque $\dim(M) < \mathrm{rg}(G)$ car $l \leq \dim(M)$, et cela reste valable lorsque $\dim(M) = \mathrm{rg}(G)$ et Γ préserve le volume puisque dans ce cas la somme des λ^π_i, comptées avec leurs multiplicités, est égale à 0 (théorème 4.1, assertion (4)). Nous pouvons donc fixer un élément non nul $u \in \mathsf{a}$ en lequel les λ^π_i s'annulent toutes. Soit $a = \exp(u) \in A$.

L'action de A sur G/Γ préserve la mesure vol, cette mesure est ergodique, et les formes de Lyapounoff non nulles sont les racines $L \in \Phi$. Soit Φ_u^+ (resp. Φ_u^-) l'ensemble des racines prenant une valeur strictement positive (resp. négative) en u. Les espaces instables de a dans G/Γ sont fournis par les champs de vecteurs g^L, $L \in \Phi_u^+$. La formule de Pesin pour l'entropie $h_{\mathrm{vol}}(a)$ s'écrit alors

$$h_{\mathrm{vol}}(a) = \sum_{L \in \Phi_u^+} \dim(\mathsf{g}^L) L(u). \tag{42}$$

Le groupe G agit aussi sur M_α. Fixons une racine $L \in \Phi$. Les orbites de $G^L = \exp(\mathsf{g}^L)$ dans M_α sont permutées par l'action de $\alpha_G(a)$ et sont contenues dans les feuilles du feuilletage $\mathcal{G}$ transverse aux fibres de π (voir le § 3.1). L'exposant de Lyapounoff de $\alpha_G(a)$ le long de ces orbites est égal à $L(u)$; en effet, π est équivariante et π_* réalise une isométrie de $T_x\mathcal{G}$ vers $T_{\pi(x)}G/\Gamma$, donc l'exposant calculé dans M_α est égal à celui de la translation par a le long des orbites de G^L dans G/Γ. Les racines $L \in \Phi$ sont donc aussi des formes de Lyapounoff pour ν et les espaces stables ou instables correspondants sont tangents aux orbites des groupes G^L dans M_α.

Puisque $\lambda_i^\pi(u) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq l$, les fibres de $\pi \colon M_\alpha \to G/\Gamma$ ne contribuent pas à la formule de Ledrappier et Young. L'inégalité de Margulis-Ruelle pour ν est donc

$$\begin{aligned} h_\nu(\alpha_G(a)) &\leq \int_{M_\alpha} \sum_{L \in \Phi_u^+} \dim(\mathsf{g}^L) L(u)\, d\nu(x) \\ &= \sum_{L \in \Phi_u^+} \dim(\mathsf{g}^L) L(u). \end{aligned} \tag{43}$$

Mais π entrelace les actions sur M_α et G/Γ, et $\pi_*\nu$ est la mesure de Haar de G/Γ. Donc

$$h_{\mathrm{vol}}(a) \leq h_\nu(\alpha_G(a)). \tag{44}$$

Les relations (42), (43) et (44) montrent ainsi que l'inégalité de Margulis-Ruelle est en fait une égalité pour la mesure ν. Du théorème de Ledrappier et Young et du paragraphe 5.3.1, on déduit que ν est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue le long des variétés instables de $\alpha_G(a)$, puis qu'elle est invariante sous l'action des groupes G^L, pour L dans Φ_u^+. En changeant u en son opposé, et a en son inverse, ν est aussi invariante sous l'action des groupes G^L pour L dans Φ_u^-. Le lemme 8.8 montre donc que ν est invariante sous l'action de G tout entier. □

8.4. L'action de Γ est anémique

Proposition 8.9. — *Si* $\dim(M) < \mathrm{rg}(G)$*, ou si* $\dim(M) = \mathrm{rg}(G) \geq 2$ *et* Γ *préserve une forme volume, l'action de* Γ *sur* M *est anémique.*

Nous utiliserons que toute représentation linéaire $\rho \colon G \to \mathsf{GL}_d(\mathbf{R})$ est triviale quand $d \leq \mathrm{rg}(G)$. En effet, $\rho(G)$ est contenue dans $\mathsf{SL}_d(\mathbf{R})$ car g est simple et G est connexe ; d'autre part, l'invariance de la décomposition de Jordan montre que l'image $\rho(A)$ du tore maximal déployé est constituée d'éléments semi-simples (voir [4], § 1.4) : c'est donc un sous-groupe diagonalisable de $\mathsf{SL}_d(\mathbf{R})$, ce qui entraîne $\dim(A) = \mathrm{rg}(G) \leq d-1$.

Démonstration. — Si l'action est vigoureuse, le théorème 7.2 fournit une mesure μ sur M_α qui est A-invariante et possède une forme de Lyapounoff verticale non nulle ; la proposition 8.2 permet de supposer que μ est ergodique et que sa projection $\pi_*\mu$ coïncide avec la mesure vol. La proposition 8.7 montre que μ est G-invariante ; on peut donc lui appliquer le théorème de super-rigidité de Zimmer pour le cocycle D^π qui est déterminé par les différentielles le long des fibres de $\pi : M_\alpha \to G/\Gamma$. Puisque $\dim(M) \leq \mathrm{rg}(G)$, toute représentation linéaire $G \to \mathsf{GL}_d(\mathbf{R})$ est triviale. D'après le corollaire 6.2, les exposants de μ devraient être nuls, en contradiction avec sa construction. □

8.5. Invariance dans M_α : énoncé général et applications

Nous recommandons de sauter ce paragraphe en première lecture, car il n'est pas nécessaire à la démonstration du théorème A. Il s'agit d'esquisser l'ingrédient supplémentaire montrant que l'action de Γ sur M_α est anémique sous les hypothèses du théorème B.

8.5.1. — Rappelons que $\Phi \subset \mathsf{a}^\vee$ est l'ensemble des racines. Si L appartient à Φ, $[L]$ désignera l'ensemble $\Phi \cap (\mathbf{R}_+ L)$, et $\mathsf{g}^{[L]}$ désignera l'algèbre de Lie engendrée par les $\mathsf{g}^{L'}$, L' décrivant $[L]$. Nous noterons $G^{[L]} \subset G$ le sous-groupe connexe dont l'algèbre de Lie est $\mathsf{g}^{[L]}$; l'application exponentielle est un difféomorphisme $\mathsf{g}^{[L]} \to G^{[L]}$.

Théorème 8.10. — *Soit ν une mesure de probabilité sur M_α qui est A-invariante et ergodique, et vérifie $\pi_*\nu = $ vol. Soit L_0 une racine. Si aucune forme de Lyapounoff verticale de ν n'appartient à $[L_0]$, la mesure ν est $G^{[L_0]}$-invariante.*

Ce théorème est obtenu par Aaron Brown, Federico Rodriguez Hertz et Zhiren Wang dans [12] (proposition 5.1). Pour l'appliquer, plaçons-nous sous les hypothèses du théorème B, en supposant que $G = \mathsf{Sp}_{2n}(\mathbf{R})$ et que $\dim(M) = d < \mathrm{hom}(G) = 2n-1$. Soit ν une mesure de probabilité qui vérifie les hypothèses de la proposition 8.7 (donc aussi celles du théorème 8.10).

Soit $\Phi' \subset \Phi$ l'ensemble des racines L telles que $[L]$ ne contienne aucune des formes de Lyapounoff verticales. Dans $\mathsf{sp}_{2n}(\mathbf{R})$ deux racines positivement proportionnelles sont égales, donc $[L] = \{L\}$ pour tout $L \in \Phi$ et $\Phi \setminus \Phi'$ contient au plus d racines. Soit $\mathsf{h} \subset \mathsf{g}$ la sous-algèbre engendrée par a et les espaces radiciels $\mathsf{g}^{[L]}$, pour $L \in \Phi'$. Alors h est ad(a)-invariante, et sa codimension est majorée par d ; donc $\mathsf{h} = \mathsf{g}$: en effet, l'inégalité $d < \mathrm{hom}(G)$ signifie que toute sous-algèbre de codimension $\leq d$ coïncide avec g. Le théorème 8.10 montre alors que μ est invariante sous l'action des sous-groupes $G^{[L]}$ pour tout L dans Φ'. Comme $\mathsf{h} = \mathsf{g}$, la mesure μ est G-invariante.

Le théorème 8.10 entraîne donc une version renforcée de la proposition 8.7 dans laquelle $G = \mathsf{Sp}_{2n}(\mathbf{R})$ et $\dim(M) < 2n-1$. La proposition 8.9 devient : *Soit* Γ *un réseau uniforme de* $\mathsf{Sp}_{2n}(\mathbf{R})$ *agissant par difféomorphismes* $\mathcal{C}^k$ *sur une variété compacte* M*, avec* $k > 1$. *Si* $\dim(M) < 2n-1$, *ou si* $\dim(M) = 2n-1$ *et* Γ *préserve une forme volume,* *l'action de* Γ *sur* M *est anémique.* Un argument analogue s'applique aux groupes orthogonaux déployés.

8.5.2. — Revenons au théorème 8.10.

Si b appartient à A et x appartient à M_α, on note $W_b^{ins}(x)$ la variété instable maximale de x pour le difféomorphisme $\alpha_G(b)$. Si L appartient à $\mathsf{a}^\vee$, $W_{[L]}^{ins}(x)$ désignera l'intersection des $W_b^{ins}(x)$ lorsque b décrit l'ensemble des éléments $b = \exp(v) \in A$ avec $L(v) > 0$. Lorsqu'aucune forme de Lyapounoff verticale n'appartient à $[L]$, $W_{[L]}^{ins}(x)$ est l'orbite de $G^{[L]}$ passant par x ; c'est une feuille du feuilletage $\mathcal{G}^{[L]} \subset \mathcal{G}$ donné par l'action de $G^{[L]}$ sur M_α.

Soient L une racine, u un élément de a avec $L(u) > 0$, et $a = \exp(u) \in A$. La projection π entrelace l'action sur M_α avec celle par translations sur G/Γ. Dans cette situation, la formule d'Abramov-Rohlin décompose $h_\nu(\alpha_G(a))$ en la somme de l'entropie dans la base, c'est-à-dire $h_{\mathrm{vol}}(a)$ car $\pi_*\nu = \mathrm{vol}$, et d'une entropie dans les fibres. Une formule du même type est démontrée dans [14], mais pour une version de l'entropie relative aux variétés instables ; en particulier, cette entropie $h_\mu(a \,|\, W_{[L]}^{ins})$ vérifie l'inégalité

$$h_\mu(\alpha_G(a) \,|\, W_{[L]}^{ins}) \geq h_{\mathrm{vol}}(a \,|\, \mathsf{g}^{[L]}) \tag{45}$$

où $h_{\mathrm{vol}}(a \,|\, \mathsf{g}^{[L]})$ est l'entropie de la mesure vol relative au feuilletage en les orbites de $G^{[L]}$ dans G/Γ.

L'hypothèse centrale du théorème 8.10 stipule que $[L_0]$ ne contient pas de forme de Lyapounoff verticale ; les variétés instables $W_{[L_0]}^{ins}(x)$ sont donc les feuilles de $\mathcal{G}^{[L_0]}$. Comme dans la preuve de la proposition 8.7, on obtient alors

$$h_\mu(\alpha_G(a)|\mathcal{G}^{[L_0]}) = h_\mu(\alpha_G(a)|W_{[L_0]}^{ins}) = h_{\mathrm{vol}}(a|\mathsf{g}^{[L_0]}) = \sum_{L' \in [L_0]} \dim(\mathsf{g}^{L'}) L'(u). \tag{46}$$

C'est un cas d'égalité dans l'inégalité de Margulis-Ruelle, mais pour des entropies relatives à des feuilletages invariants ; l'argument de Ledrappier s'applique à nouveau et montre que ν est $G^{[L_0]}$-invariante.

La stratégie est donc la même que précédemment : l'invariance est obtenue par la caractérisation du cas d'égalité dans l'inégalité de Margulis-Ruelle. C'est donc dorénavant un argument classique (voir [53, 43, 2, 17, 18]). L'ingrédient nouveau que nous n'avons pas présenté est la notion d'entropie feuilletée et la formule de type Abramov-Rohlin qui conduit à l'inégalité (45).

Exemple 8.11. — Poursuivons l'exemple 8.6, avec $n = 2$ pour simplifier et μ la mesure correspondant au point $p = [0 : 0 : 1]$. L'action du groupe diagonal A en coordonnées locales est $[x : y : 1] \mapsto [a_1/a_3 x : a_2/a_3 y : 1]$. La racine $L = L_1 - L_3$ est à la fois une forme de Lyapounoff pour l'action de A dans la base G/Γ, et pour le cocycle vertical D^π. L'hypothèse du théorème 8.10 n'est donc pas satisfaite par L. Les variétés instables $W_{[L]}^{ins}(z)$ sont des plans $\mathbf{R}^2$ alors que G^L est de dimension 1. Désintégrons μ par rapport à une partition subordonnée à ces variétés instables : un cacul explicite simple montre que les conditionnelles de μ sont des mesures unidimensionelles qui, dans chaque

$W^{ins}_{[L]}(z) = \mathbf{R}^2$, sont confinées dans une droite transverse aux orbites de G^L et aux fibres de la projection π. Ces conditionnelles ont donc une entropie feuilletée $h_\mu(\alpha_G(a)|\mathcal{G}^{[L_0]})$ qui est nulle et les deux premières égalités dans (46) tombent en défaut.

9. LA PROPRIÉTÉ (T) RENFORCÉE

Soit H un groupe topologique engendré par une partie symétrique compacte $S \subset H$. Comme dans le paragraphe 7.1, nous notons ℓ la longueur associée à S, et $B(n) \subset H$ la boule de rayon n pour ℓ. Soit $\pi \colon H \to B(X)$ une représentation linéaire continue de H à valeurs dans les opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert X. L'espace des vecteurs invariants sera noté X^π. Nous dirons que π est τ-modérée, pour $\tau > 0$, si

$$\|\pi(h)\| \leq \exp(\tau\ell(h)) \tag{47}$$

dès que $\ell(h)$ est suffisamment grand. Si m est une mesure à support compact et de masse totale finie dans H, on définit l'opérateur continu

$$\pi(m) = \int_H \pi(h)\, dm(h). \tag{48}$$

Une projection de X sur un sous-espace fermé Y est un opérateur linéaire continu $P \colon X \to X$ tel que $P \circ P = P$ et $P(X) = Y$.

Par définition, H a la **propriété (T) renforcée** s'il existe deux constantes $\tau > 0$ et $\chi > 0$ et une suite de mesures (signées) (m_n) sur H avec $m_n(H) = 1$ et $\mathrm{Support}(m_n) \subset B(n)$ pour tout n, telles que l'assertion suivante soit satisfaite : pour toute représentation linéaire $\pi \colon H \to B(X)$ sur un espace de Hilbert X qui est τ-modérée, il existe une projection P de X sur X^π telle que

$$\|\pi(m_n) - P\| \leq \exp(-\chi n) \tag{49}$$

dès que n est suffisamment grand.

Remarque 9.1. — Il s'agit en fait de la propriété (T) renforcée pour la classe d'espaces de Banach réduite à celle des espaces de Hilbert. Cette notion ne dépend pas du choix initial de la partie génératrice compacte S (mais les constantes τ et χ en dépendent). La propriété (T) renforcée entraîne la propriété (T) de Kazhdan. En effet, si π est une représentation unitaire, elle est τ-modérée pour tout $\tau \geq 0$. Si π possède presque des vecteurs invariants, on choisit n tel que $\|\pi(m_n) - P\| \leq 1/3$, puis un vecteur unitaire u qui est déplacé d'au plus $1/3$ par $B(n)$. Alors $P(u)$ est un vecteur non nul invariant.

THÉORÈME 9.2. — *Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe sans facteur de rang ≤ 1. Soit Γ un réseau uniforme de G. Alors G et Γ vérifient la propriété (T) renforcée.*

Ce théorème est dû à Vincent Lafforgue, Tim de Laat et Mikael de la Salle (voir [41, 40], et [47] pour d'autres corps locaux). Considérons le cas du groupe $G = \mathsf{SL}_3(\mathbf{R})$ et notons K le sous-groupe $\mathsf{SO}_3(\mathbf{R})$; il sera muni d'une mesure de Haar vol_K de masse totale égale à 1. Étant donnés une représentation τ-modérée $\pi\colon G \to B(X)$, où X est un espace de Hilbert, et un élément g de G, posons

$$A_\pi(g) = \int\int_{K\times K} \pi(kgl)\, d\mathrm{vol}_K(k) d\mathrm{vol}_K(l). \tag{50}$$

Pour obtenir le théorème 9.2, Lafforgue montre qu'il existe une projection P sur X^π telle que $A_\pi(g_n)$ converge vers P exponentiellement vite lorsque $g_n \to \infty$. Ensuite, si G est un groupe de Lie presque simple et connexe qui contient une copie R de $\mathsf{SL}_3(\mathbf{R})$, on montre que la projection P obtenue à l'aide de R est en fait une projection sur l'espace des vecteurs $\pi(G)$-invariants (phénomène de Mautner). Ainsi, pour un tel groupe G, *on peut supposer que les mesures m_n qui apparaissent dans l'équation* (49) *sont des mesures positives* (donc de probabilité). Une analyse similaire du groupe $\mathsf{Sp}_4(\mathbf{R})$ permet d'obtenir la même propriété pour tous les groupes de Lie simples de rang ≥ 2 (voir [40]) ; cette propriété est également valable pour leurs réseaux uniformes (voir [41]).

10. MÉTRIQUE INVARIANTE ET CONCLUSION

10.1. Métriques riemanniennes et espaces de Sobolev

Les métriques riemanniennes sur une variété N sont les sections s du fibré $\mathrm{Sym}^2(T^*N)$ telles que $s(u,u) > 0$ pour tout vecteur tangent $u \neq 0$. Notons $J^k(\mathrm{Sym}^2(T^*N))$ le fibré des k-jets de sections de $\mathrm{Sym}^2(T^*N)$. Chaque section globale de $\mathrm{Sym}^2(T^*N)$ de classe $\mathcal{C}^k$ fournit une section globale continue de $J^k(\mathrm{Sym}^2(T^*N))$, ce qui donne une inclusion linéaire

$$\mathcal{C}^k(\mathrm{Sym}^2(T^*N)) \to \mathcal{C}^0(J^k(\mathrm{Sym}^2(T^*N))); \tag{51}$$

la symétrie $\partial_x\partial_y f = \partial_y\partial_x f$ des dérivées partielles d'une fonction régulière montre que cette inclusion n'est pas surjective quand $k \geq 2$.

Fixons une métrique riemannienne s sur N et une forme volume ω. La métrique s induit des métriques sur les fibrés $\mathrm{Sym}^2(T^*N)$ et $J^k(\mathrm{Sym}^2(T^*N))$, que nous noterons toutes $\|\cdot\|$ pour simplifier. Si σ est une section de $J^k(\mathrm{Sym}^2(T^*N))$, sa norme L^p est

$$\|\sigma\|_p = \left(\int_N \|\sigma(x)\|^p \; d\omega(x)\right)^{1/p}. \tag{52}$$

Par définition, l'espace de Sobolev $W^{k,p}(N, \mathrm{Sym}^2(T^*N))$ est la complétion de $\mathcal{C}^k(\mathrm{Sym}^2(T^*N))$ pour la norme qui est obtenue en composant le plongement (51) avec la norme L^p. C'est un espace de Hilbert lorsque $p = 2$. Par le théorème de plongement de Sobolev ([1], chapitre 5), les éléments de $W^{k,p}(N, \mathrm{Sym}^2(T^*N))$ fournissent des métriques riemanniennes de classe $\mathcal{C}^r$ dès que

$$k > r + \frac{\dim(N)}{p}. \tag{53}$$

Ainsi, lorsque N est une surface, les éléments de $W^{k,2}(N, \mathrm{Sym}^2(T^*N))$ fournissent des métriques riemanniennes de classe $\mathcal{C}^{k-2}$ (avec une régularité höldérienne des dérivées d'ordre $k-2$).

10.2. Majoration des dérivées d'ordre supérieur

Si f est un difféomorphisme de N, $\| D^{(j)} f \|_s$ désignera le maximum des normes des j-premières dérivées de f, mesurées à l'aide de la métrique s. Reprenons la notion introduite au paragraphe 7.1, mais modifions-la pour tenir compte des dérivées d'ordre supérieur. Le groupe H est donc muni d'une partie génératrice S qui est symétrique et compacte, et ℓ est la fonction de longueur associée à S. Nous dirons que l'action de H sur N est k-**anémique** si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\| D^{(j)} h \|_s \leq C \exp(\epsilon \ell(h)) \tag{54}$$

pour tout $h \in H$.

Lemme 10.1. — *L'action de H sur M est anémique si, et seulement si elle est k-anémique pour tout $k \geq 1$.*

Ceci est démontré dans [25] (lemme 6.4 et annexe B). Le cas où M est de dimension 1 permet d'illustrer le phénomène principal. Supposons donc que H agit de manière anémique en dimension 1. Notons x une coordonnée locale, et calculons la dérivée seconde d'un produit de difféomorphismes $h = h_1 \circ \cdots \circ h_l \in H$ de longueur $\ell(h) = l$, chaque h_i étant dans S. En notant $F_j = h_1 \circ \cdots \circ h_j$ et $G_j = h_j \circ \cdots \circ h_l$, nous obtenons

$$\begin{aligned} h'' &= (h_1' \circ G_2 \times (G_2)')' \\ &= h_1'' \circ G_2 \times (G_2')^2 + F_1' \circ G_2 \times (G_2)'' \\ &= h_1'' \circ G_2 \times (G_2')^2 + F_1' \circ G_2 \times h_2'' \circ G_3 \times (G_3')^2 + (F_2)' \circ G_3 \times (G_3)'' \end{aligned} \tag{55}$$

si bien que

$$\| h'' \| \leq C^4 \ell(h) \max_{g \in S} (\| g'' \|) \exp(2\epsilon \ell(h)) \tag{56}$$

car $\ell(F_j) + \ell(G_{j+1}) = \ell(h) = l$ pour tout j. Le calcul est analogue pour les dérivées supérieures.

10.3. Métrique invariante

Théorème 10.2. — *Soit Γ un réseau uniforme d'un groupe de Lie connexe presque simple de rang ≥ 2. Soit $\Gamma \times M \to M$ une action anémique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété compacte. Alors Γ préserve une métrique riemannienne sur M.*

La démonstration s'applique à tout groupe Γ qui possède la propriété (T) renforcée, si l'on sait en plus que les mesures m_n apparaissant dans la convergence (49) sont positives. Comme on l'a vu à la fin du paragraphe 9, c'est le cas pour les réseaux. [3]

Démonstration — Fixons un entier $k > 2 + \dim(M)/2$. Comme l'action de Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, Γ agit linéairement sur $W^{k,2}(M, \mathrm{Sym}^2(T^*M))$. Puisqu'elle est anémique, elle est k-anémique : pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\| D^{(k)}\gamma \| \leq C \exp(\epsilon \ell(\gamma)) \tag{57}$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$. Ainsi, la représentation π de Γ sur l'espace $W^{k,2}(M, \mathrm{Sym}^2(T^*M))$ est à croissance ϵ-modérée pour tout $\epsilon > 0$. Notons (τ, χ) les constantes apparaissant dans la propriété (T) renforcée pour Γ, et choisissons $\epsilon < \tau$. Par le théorème 9.2 et les quelques lignes qui lui succèdent, il existe une suite de mesures de probabilité (m_n) sur Γ telle que $\pi(m_n)$ converge vers une projection P dont l'image est constituée de sections de $\mathrm{Sym}^2(T^*M)$ qui sont Γ-invariantes. Partant de la métrique riemannienne s, on voit que

$$P(s) = \lim_{n\to+\infty} \pi(m_n)(s) = \lim_{n\to+\infty} \int_\Gamma \gamma_*(s)\, dm_n(\gamma) \tag{58}$$

est une limite de métriques riemanniennes. C'est donc une section de $\mathrm{Sym}^2(T^*M)$ qui, par le théorème de plongement de Sobolev, est de classe $\mathcal{C}^2$ et qui est partout positive ou nulle : $\forall u \in T^*M, \quad P(s)(u,u) \geq 0$. Il reste à montrer que $P(s)(u,u) > 0$ si $u \neq 0$. Pour cela, on utilise la convergence exponentiellement rapide. On choisit n_0 tel que $\| P - \pi(m_n) \| \leq \exp(-\chi n)$ pour tout $n \geq n_0$. L'action étant anémique, il existe C_1 tel que $\| D^{(1)}\gamma \|_s \leq C_1 \exp(\chi n/3)$ pour tout $\gamma \in B(n) \subset \Gamma$. Alors, pour tout vecteur unitaire u tangent à M

$$\pi(m_n)(s)(u,u) = \int_\Gamma s(D\gamma(u), D\gamma(u))\, dm_n(\gamma) \geq C_1^2 \exp(-2\chi n/3). \tag{59}$$

Ceci entraîne $P(s)(u,u) > 0$ en prenant n suffisamment grand (car $2/3 < 1$). $\square$

10.4. Démonstration des théorèmes A et B

Considérons un homomorphisme $\alpha\colon \Gamma \to \mathsf{Diff}^\infty(M)$, avec $\dim(M) \leq \mathrm{rg}(G) - 1$ et $\mathrm{rg}(G) \geq 2$. D'après la proposition 8.9, l'action de Γ sur M est anémique. Le théorème 10.2 fournit donc une métrique riemannienne Γ-invariante s_0 sur M. Nous obtenons donc un homomorphisme de Γ vers le groupe $\mathsf{Isom}(M, s_0)$ des isométries de M. C'est un groupe de Lie compact, agissant différentiablement sur M. Puisque $\dim(M) \leq \mathrm{rg}(G) - 1 < \mathrm{minhom}(G)$ (par le lemme 2.5), ceci montre que $\alpha(\Gamma)$ est fini.

Le cas des actions préservant une forme volume s'obtient de la même façon en remarquant que $\mathrm{rg}(G) < \mathrm{minvol}(G)$. Le théorème B aussi, en admettant les résultats esquissés au paragraphe 8.5.

3. En fait, le vocabulaire relatif à la propriété (T) renforcée n'est pas encore stable ; dans certains contextes, notamment celui de cet exposé, il serait plus naturel d'intégrer la positivité des mesures m_n à la définition.

11. COMPLÉMENTS

11.1. Régularité

Nous avons supposé que l'action était de classe $\mathcal{C}^\infty$. Dans les théorèmes A et B, *il suffit en fait que l'action soit de classe* $\mathcal{C}^2$. Cela permet d'appliquer la théorie de Pesin, car elle nécessite simplement $k > 1$. Le changement principal apparaît en appliquant le théorème de plongement de Sobolev ; pour un choix optimal, il faut travailler avec les espaces de Banach $W^{k,p}(M, \mathrm{Sym}^2(T^*M))$, pour $p \neq 2$, ce qui nécessite donc une version de la propriété (T) renforcée valable pour des espaces de Banach (voir [11, 40]). Les métriques riemanniennes invariantes produites par le théorème 10.2 sont alors höldériennes, au lieu d'être de classe $\mathcal{C}^2$. Pour montrer que $\mathsf{Isom}(M, s_0)$ est un groupe de Lie, Brown, Fisher et Hurtado font ensuite appel à la résolution de la conjecture d'Hilbert-Smith pour les homéomorphismes lipschitziens.

11.2. Réseaux non uniformes

Les théorèmes A et B devraient aussi être valables pour les réseaux non uniformes. Deux difficultés apparaissent. D'une part, la propriété (T) renforcée n'est pas encore établie pour les réseaux non uniformes ; des travaux en cours de Mikael de la Salle devraient résoudre ce problème. D'autre part, G/Γ n'est pas compacte, ce qui complique l'étude dynamique ; Brown, Fisher et Hurtado semblent toutefois en mesure de traiter le cas du réseau $\mathsf{SL}_{n+1}(\mathbf{Z})$.

11.3. Le cas des surfaces

Les théorèmes de Ghys et Witte-Morris répondent positivement aux conjectures de Zimmer pour les actions $\mathcal{C}^1$ sur le cercle, que le réseau soit uniforme ou non. Pour les actions sur les surfaces, les résultats de [10, 11, 12, 13, 14] viennent compléter des énoncés antérieurs de Leonid Polterovich [59] et de John Franks et Michael Handel [26].

Théorème C.— *Soit S une surface compacte. Soit G un groupe de Lie connexe, dont l'algèbre de Lie* g *est simple et le centre est fini, et soit Γ un réseau de G. Supposons que le rang de G est ≥ 2 et que* g *n'est isomorphe à aucune des algèbres* $\mathsf{sl}_3(\mathbf{R})$, $\mathsf{sl}_3(\mathbf{C})$ *et* $\mathsf{sl}_3(\mathbf{H})$. *Alors tout homomorphisme de Γ dans* $\mathsf{Diff}^2(S)$ *a une image finie.*

Malheureusement, l'arsenal employé actuellement pour obtenir un résultat aussi complet dépasse largement les techniques décrites dans cet exposé.

Remerciements.— Je remercie Bachir Bekka, Aaron Brown, Antoine Chambert-Loir, David Fisher, Sébastien Gouëzel, Vincent Guirardel, Sebastian Hurtado, Martin Liebeck, Ludovic Marquis, François Maucourant, Mihai Păun, Federico Rodriguez-Hertz et Dave Witte-Morris d'avoir répondu à mes sollicitations et d'avoir relu des versions préliminaires de ce texte, qui n'aurait pas vu le jour sans leur aide. La démonstration du théorème A présentée ici résulte de mes échanges avec Sebastian Hurtado : un grand merci pour ses explications enthousiastes.

RÉFÉRENCES

[1] Robert A. Adams & John J. F. Fournier – *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics (Amsterdam) **140**, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second ed., 2003.

[2] Artur Avila & Marcelo Viana – *Extremal Lyapunov exponents : an invariance principle and applications*, Invent. Math. **181** (2010), 115–189.

[3] Bachir Bekka, Pierre de la Harpe & Alain Valette – *Kazhdan's property (T)*, New Mathematical Monographs **11**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.

[4] Armand Borel – *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics **126**, Springer-Verlag, New York, second ed., 1991.

[5] Armand Borel & Jacques Tits – *Éléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs. I.*, Invent. Math. **12** (1971), 95–104.

[6] Nicolas Bourbaki – *Éléments de mathématique. Fasc. XXXVIII : Groupes et algèbres de Lie. Chapitre VII : Sous-algèbres de Cartan, éléments réguliers. Chapitre VIII : Algèbres de Lie semi-simples déployées*, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1364. Hermann, Paris, 1975. Réimpression Springer, 2006.

[7] Emmanuel Breuillard – *Équidistribution des orbites toriques sur les espaces homogènes (d'après M. Einsiedler, E. Lindenstrauss, Ph. Michel, A. Venkatesh)*, Sém. Bourbaki (2008/2009), exp. n° 1008, Astérisque **332** (2010), 305–339.

[8] Matthew G. Brin & Craig C. Squier – *Groups of piecewise linear homeomorphisms of the real line*, Invent. Math. **79** (1985), 485–498.

[9] Aaron Brown – *Smoothness of stable holonomies inside center-stable manifolds and the $\mathcal{C}^2$ hypothesis in Pugh-Shub and Ledrappier-Young theory*, arXiv :1608.05886, pages 1–18, août 2016.

[10] Aaron Brown – *Smooth ergodic theory of $\mathbf{Z}^d$-actions. Part 2 : entropy formulas for rank 1 systems*, arXiv :1610.09997, pages 22–45, octobre 2016.

[11] Aaron Brown, David Fisher & Sebastian Hurtado – *Zimmer conjecture : sub exponential growth, measure rigidity, and strong property (T)*, arXiv :1608.04995, pages 1–32, septembre 2016.

[12] Aaron Brown, Federico Rodriguez Hertz & Zhiren Wang – *Invariant measures and measurable projective factors for actions of higher-rank lattices on manifolds*, arXiv :1609.05565, pages 1–29, janvier 2017.

[13] Aaron Brown, Federico Rodriguez Hertz & Zhiren Wang – *Smooth ergodic theory of* $\mathbf{Z}^d$*-actions. Part 1 : Lyapunov exponents, dynamical charts, and coarse Lyapunov exponents*, arXiv :1610.09997, pages 1–21, octobre 2016.

[14] Aaron Brown, Federico Rodriguez Hertz & Zhiren Wang – *Smooth ergodic theory of* $\mathbf{Z}^d$*-actions Part 3 : product structure of entropy*, arXiv :1610.09997, pages 46–58, octobre 2016.

[15] Serge Cantat – *The Cremona Group*, Proceedings of 2015 Summer Institute on Algebraic Geometry, AMS Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, pages 1–48, 2016.

[16] Charles W. Curtis & Irving Reiner – *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Pure and Applied Mathematics, Vol. XI. Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London, 1962.

[17] Manfred Einsiedler, Anatole Katok & Elon Lindenstrauss – *Invariant measures and the set of exceptions to Littlewood's conjecture*, Ann. of Math. (2) **164** (2006), 513–560.

[18] Alex Eskin & Maryam Mirzakhani – *Invariant and stationary measures for the* $SL(2, \mathbf{R})$ *action on moduli space*, arXiv, pages 1–204, février 2016.

[19] Benson Farb & Peter Shalen – *Real-analytic actions of lattices*, Invent. Math. **135** (1999), 273–296.

[20] Benson Farb & Peter Shalen – *Lattice actions, 3-manifolds and homology*, Topology **39** (2000), 573–587.

[21] Renato Feres – *Dynamical systems and semisimple groups : an introduction*, Cambridge Tracts in Mathematics **126**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[22] David Fisher – *Local rigidity of group actions : past, present, future*, in Dynamics, ergodic theory, and geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **54**, pages 45–97, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

[23] David Fisher – *Groups acting on manifolds : around the Zimmer program*, in Geometry, rigidity, and group actions, Chicago Lectures in Math., pages 72–157, Univ. Chicago Press, Chicago, 2011.

[24] David Fisher & Gregory A. Margulis – *Local rigidity for cocycle*, in Surveys in differential geometry, Vol. VIII (Boston, MA, 2002), Surv. Differ. Geom. **8**, pages 191–234, Int. Press, Somerville, 2003.

[25] David Fisher & Gregory A. Margulis – *Almost isometric actions, property (T), and local rigidity*, Invent. Math. **162** (2005), 19–80.

[26] John Franks & Michael Handel – *Distortion elements in group actions on surfaces*, Duke Math. J. **131** (2006), 441–468.

[27] Harry Furstenberg – *Rigidity and cocycles for ergodic actions of semisimple Lie groups (after G. A. Margulis and R. Zimmer)*, Sém. Bourbaki (1979/1980), exp. n° 559, Lecture Notes in Math. **842** (1981), Springer, Berlin-New York, 273–292.

[28] Étienne Ghys – *Dynamique des flots unipotents sur les espaces homogènes*, Sém. Bourbaki (1991/1992), exp. n° 747, Astérisque **206** (1992), 93–136.

[29] Étienne Ghys – *Sur les groupes engendrés par des difféomorphismes proches de l'identité*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **24** (1993), 137–178.

[30] Étienne Ghys – *Actions de réseaux sur le cercle*, Invent. Math. **137** (1999), 199–231.

[31] Étienne Ghys – *Groups acting on the circle*, Enseign. Math. (2) **47** (2001), 329–407.

[32] Étienne Ghys & Vlad Sergiescu – *Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle*, Comment. Math. Helv. **62** (1987), 185–239.

[33] Edward R. Goetze – *Connection preserving actions of connected and discrete Lie groups*, J. Differential Geom. **40** (1994), 595–620.

[34] Nancy Guelman & Isabelle Liousse – *Burnside problem for measure preserving groups and for 2-groups of toral homeomorphisms*, Geom. Dedicata **168** (2014), 387–396.

[35] Lucien Guillou – *Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré-Birkhoff*, Topology **33** (1994), 331–351.

[36] Hu Yi Hu – *Some ergodic properties of commuting diffeomorphisms*, Ergodic Theory Dynam. Systems **13** (1993), 73–100.

[37] Sebastian Hurtado – *The Burnside problem for* $\mathrm{Diff}_{\mathrm{vol}}(\mathbb{S}^2)$, arXiv :1607.04603, pages 1–25, juillet 2016.

[38] Anatole Katok & James W. Lewis – *Global rigidity results for lattice actions on tori and new examples of volume-preserving actions*, Israel J. Math. **93** (1996), 253–280.

[39] Anatole Katok & Ralf J. Spatzier – *Invariant measures for higher-rank hyperbolic abelian actions*, Ergodic Theory Dynam. Systems **16** (1996), 751–778.

[40] Tim de Laat & Mikael de la Salle – *Strong property (T) for higher-rank simple Lie groups*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **111** (2015), 936–966.

[41] Vincent Lafforgue – *Un renforcement de la propriété (T)*, Duke Math. J. **143** (2008), 559–602.

[42] François Ledrappier – *Propriétés ergodiques des mesures de Sinaï*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math **59** (1984), 163–188.

[43] François Ledrappier – *Positivity of the exponent for stationary sequences of matrices*, in Lyapunov exponents (Bremen, 1984), Lecture Notes in Math. **1186** (1986), Springer, Berlin-New York, 56–73.

[44] François Ledrappier & Jean–Marie Strelcyn – *A proof of the estimation from below in Pesin's entropy formula*, Ergodic Theory Dynam. Systems **2** (1982), 203–219.

[45] François Ledrappier & Lai-Sang Young – *The metric entropy of diffeomorphisms. I. Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula*, Ann. of Math. (2) **122** (1985), 509–539.

[46] François Ledrappier & Lai-Sang Young – *The metric entropy of diffeomorphisms. II. Relations between entropy, exponents and dimension*, Ann. of Math. (2) **122** (1985), 540–574.

[47] Benben Liao – *Strong Banach property (T) for simple algebraic groups of higher rank*, J. Topol. Anal. **6** (2014), 75–105.

[48] Roger C. Lyndon & Paul E. Schupp – *Combinatorial group theory*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1977 edition.

[49] Ricardo Mañé – *Ergodic theory and differentiable dynamics*, Ergeb. Math. Grenzg. (3) **8**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[50] Lawrence N. Mann – *Gaps in the dimensions of transformation groups*, Illinois J. Math. **10** (1966), 532–546.

[51] Gregory A. Margulis – *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Ergebn. Math. Grenzg. **17**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[52] Gregory A. Margulis – *Free subgroups of the homeomorphism group of the circle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **331** (2000), 669–674.

[53] Gregory A. Margulis & George M. Tomanov – *Invariant measures for actions of unipotent groups over local fields on homogeneous spaces*, Invent. Math. **116** (1994), 347–392.

[54] François Maucourant – *A nonhomogeneous orbit closure of a diagonal subgroup*, Ann. of Math. (2) **171** (2010), 557–570.

[55] George Daniel Mostow – *On maximal subgroups of real Lie groups*, Ann. of Math. (2) **74** (1961), 503–517.

[56] Pierre Pansu – *Sous-groupes discrets des groupes de Lie : rigidité, arithméticité*, Sém. Bourbaki (1993/1994), exp. n° 778, Astérisque **227** (1995), 69–105.

[57] Dmitri I. Panyushev & Ernest B. Vinberg – *The work of Vladimir Morozov on Lie algebras*, Transform. Groups **15** (2010), 1001–1013.

[58] Yakov B. Pesin – *Characteristic Ljapunov exponents, and smooth ergodic theory*, Russian Math. Surveys **32** (1977), 55–114.

[59] Leonid Polterovich – *Growth of maps, distortion in groups and symplectic geometry*, Invent. Math. **150** (2002), 655–686.

[60] Gopal Prasad & Madabusi S. Raghunathan – *Cartan subgroups and lattices in semi-simple groups*, Ann. of Math. (2) **96** (1972), 296–317.

[61] Vladimir A. Rohlin – *Lectures on the entropy theory of transformations with invariant measure*, Uspehi Mat. Nauk **22** (1967), 3–56.

[62] David Ruelle – *An inequality for the entropy of differentiable maps*, Bol. Soc. Brasil. Mat. **9** (1978), 83–87.

[63] Nimish A. Shah – *Limit distributions of polynomial trajectories on homogeneous spaces*, Duke Math. J. **75** (1994), 711–732.

[64] Garrett Stuck – *Low-dimensional actions of semisimple groups*, Israel J. Math. **76** (1991), 27–71.

[65] Marcelo Viana – *Lectures on Lyapunov exponents*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **145**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014.

[66] Dave Witte Morris – *Cocompact subgroups of semisimple Lie groups*, in Lie algebra and related topics (Madison, WI, 1988), Contemp. Math. **110**, pages 309–313, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[67] Dave Witte Morris – *Arithmetic groups of higher* $\mathbf{Q}$*-rank cannot act on* 1*-manifolds,* Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), 333–340.

[68] Dave Witte Morris – *Ratner's theorems on unipotent flows*, Chicago Lectures in Math., University of Chicago Press, Chicago, IL, 2005.

[69] Dave Witte Morris – *Introduction to arithmetic groups*, Deductive Press, 2015.

[70] Lai Sang Young – *Dimension, entropy and Lyapunov exponents*, Ergodic Theory Dynamical Systems **2** (1982), 109–124.

[71] Abdelghani Zeghib – *Sur les actions affines des groupes discrets*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **47** (1997), 641–685.

[72] Robert J. Zimmer – *Ergodic theory and semisimple groups*, Monographs in Mathematics **81**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

[73] Robert J. Zimmer – *On connection-preserving actions of discrete linear groups*, Ergodic Theory Dynam. Systems **6** (1986), 639–644.

Serge CANTAT

Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
Bâtiment 22–23
F–35042 Rennes cedex
E-mail : `serge.cantat@univ-rennes1.fr`