

LE GROUPE DES HOMÉOMORPHISMES DE LA SPHÈRE DE  
DIMENSION 2 QUI RESPECTENT L'AIRES ET L'ORIENTATION  
N'EST PAS UN GROUPE SIMPLE.

[d'après D. Cristofaro-Gardiner, V. Humilière et S. Seyfaddini]

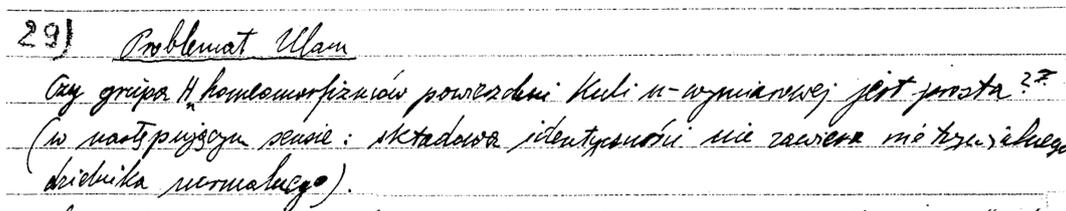
par Étienne Ghys

## 1. UN PEU DE CONTEXTE

Le théorème énoncé dans le titre a des racines anciennes.

### 1.1. La préhistoire

1.1.1. *Les groupes d'homéomorphismes.* — La question suivante était déjà posée par Ulam (1935) dans le « Księga Szkoła », plus connu sous le nom de « Scottish Book » <sup>(1)</sup>.



#### 29) Problème d'Ulam

Le groupe  $H_n$  de tous les homéomorphismes de la surface de la sphère de dimension  $n$  est-il simple? (dans le sens suivant : la composante de l'identité ne contient pas de sous-groupe distingué non trivial).

Le cas du cercle ( $n = 1$ ) avait été résolu une année auparavant par Schreier et Ulam (1934). Ulam et von Neumann (1947) annoncèrent ensuite une solution pour  $n = 2$ . Anderson (1958) et Fisher (1960) résolurent le cas  $n \leq 3$  mais leurs démonstrations se généralisèrent immédiatement en toute dimension une fois que le théorème de Schoenflies généralisé et la conjecture de l'anneau furent établis pour tout  $n$ .

1. Le problème 28, proposé par Mazur, promettait une bouteille de vin à celui qui le résoudreait. Mais aucune récompense n'était prévue pour le problème 29.

**1.1.2. Les difféomorphismes.** — La question bien plus difficile dans le cas des *groupes de difféomorphismes* fut abordée par Epstein (1970), Herman (1971, 1973), Thurston (1974) et Mather (1975) dans une série d’articles impressionnants. Le résultat suivant de Thurston avait été conjecturé par Smale : *la composante neutre du groupe des difféomorphismes de classe  $C^\infty$  et à support compact d’une variété connexe est un groupe simple, en toute dimension*<sup>(2)</sup>.

**1.1.3. Les difféomorphismes qui préservent le volume.** — Tout naturellement, il s’agissait ensuite d’étudier les difféomorphismes qui préservent une structure additionnelle, comme une forme de volume. Ce sont en effet des exemples emblématiques de groupes de Lie de dimension infinie. Le théorème final fut annoncé<sup>(3)</sup> par Thurston (1973) dans un article « à paraître » qui n’est jamais paru. L’article et le livre de Banyaga (1978, 1997) contiennent en revanche des preuves complètes.

La situation est alors plus délicate car les groupes correspondants ne sont pas toujours simples.

Soit  $M$  une variété différentiable connexe sans bord de dimension  $\geq 3$  et  $vol$  une forme de volume (de masse totale finie pour fixer les idées). Notons  $\text{Difféo}(M, vol)$  le groupe des difféomorphismes de  $M$  (de classe  $C^\infty$ ), à support compact, qui respectent  $vol$ . Soit  $\text{Difféo}_0(M, vol)$  la composante connexe de l’identité et  $\widetilde{\text{Difféo}}_0(M, vol)$  son revêtement universel. On peut alors définir un homomorphisme, appelé *flux*, de  $\widetilde{\text{Difféo}}_0(M, vol)$  vers le premier groupe d’homologie  $H_1(M, \mathbf{R})$ , de la manière suivante. Soit  $f^t$  un chemin dans  $\text{Difféo}(M, vol)$  reliant  $id = f^0$  à un difféomorphisme  $f = f^1$ . Pour chaque point  $x$  de  $M$ , le chemin  $c_x : t \in [0, 1] \mapsto f_t(x)$  peut être considéré comme un 1-courant de de Rham (dont le bord est  $f(x) - x$ ). L’intégrale sur  $M$  de  $c_x$  par rapport à  $vol$  est un 1-cycle dont la classe d’homologie ne dépend que de la classe d’homotopie de  $f^t$  à extrémités fixes. Cela définit le flux

$$\Phi : \widetilde{\text{Difféo}}_0(M, vol) \rightarrow H_1(M, \mathbf{R})$$

qui s’avère être surjectif et qui descend en un homomorphisme

$$\phi : \text{Difféo}_0(M, vol) \rightarrow H_1(M, \mathbf{R}) / \Phi(\pi_1(\text{Difféo}_0(M, vol))).$$

*En dimension  $n \geq 3$ , le noyau de  $\phi$  est un groupe simple.*

**1.1.4. Les difféomorphismes des surfaces qui préservent l’aire.** — La situation est parfaitement comprise dans le cas des surfaces mais pour ne pas alourdir la discussion, limitons-nous ici aux deux cas qui seront au cœur de cet exposé : la sphère et le disque. Puisque ces deux exemples sont simplement connexes, nous n’aurons pas à nous préoccuper du flux. En dimension 2, nous noterons plutôt *aire* une forme de « volume ». Nous considérons *aire* tantôt comme une mesure et tantôt comme une 2-forme différentielle.

2. Voir Mann (2016) pour une preuve simplifiée et moderne.

3. McDuff (1980) écrit : « Unfortunately Thurston’s proof has remained unpublished. However his results were later generalized by Banyaga to the symplectic case, and one can (with some difficulty) reconstruct Thurston (1973)’s argument ».

Le théorème de Thurston-Banyaga que nous venons de citer est également valide en dimension 2 pour les *surfaces compactes sans bord*. En particulier :

*Le groupe  $\text{Difféo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  des **difféomorphismes** de la sphère qui respectent l'aire est simple.*

Pour le disque fermé  $\mathbf{D}^2$ , on note  $\text{Difféo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire})$  le groupe des difféomorphismes qui respectent l'aire et qui sont l'identité près du bord <sup>(4)</sup>. On dispose alors d'un nouvel homomorphisme surjectif, introduit par Calabi (1970) <sup>(5)</sup>

$$\text{Cal}: \text{Difféo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire}) \rightarrow \mathbf{R}.$$

Nous reviendrons plus loin sur la définition de cet invariant qui jouera un rôle important dans la suite. Dans ce cas, Banyaga (1997) montre que *le noyau de l'homomorphisme de Calabi est un groupe simple*.

En dimension 2 une forme symplectique n'est rien d'autre qu'une forme d'aire. Il faut signaler que Banyaga va beaucoup plus loin puisqu'il traite complètement des groupes de difféomorphismes symplectiques ou de contact en toute dimension (voir aussi le complément de Rousseau, 1978).

**1.1.5. Les homéomorphismes qui préservent le volume.** — Il fallait étudier également les *homéomorphismes* qui préservent le volume. Cela fut fait dans un article remarquable de Fathi (1980a). Tout d'abord, il généralisa la définition du flux au groupe  $\text{Homéo}_0(M, \text{vol})$ , composante neutre du groupe des homéomorphismes à support compact qui respectent le volume. Surtout, il démontra qu'**en dimension**  $\geq 3$  *le noyau du flux est un groupe simple*.

## 1.2. Les homéomorphismes du disque et de la sphère qui préservent l'aire

Le cas des surfaces, et tout particulièrement de la sphère et du disque de dimension 2, a résisté à de nombreux efforts depuis une quarantaine d'années. Les théorèmes de Cristofaro-Gardiner, Humilière et Seyfaddini (2020, 2021) sont une surprise <sup>(6)</sup> :

*Le groupe des **homéomorphismes** de la sphère de dimension 2 qui respectent l'aire et l'orientation n'est **pas** un groupe simple.*

*Le groupe des **homéomorphismes** du disque de dimension 2 qui respectent l'aire et qui coïncident avec l'identité près du bord n'est **pas** un groupe simple.*

La démonstration est un tour de force et fait largement usage de l'homologie de Floer.

---

4. C'est aussi le groupe des difféomorphismes à support compact du disque ouvert qui respectent l'aire.

5. C'est l'occasion de rendre hommage à Eugenio Calabi, qui fêtera son centième anniversaire le 11 mai 2023.

6. Surprise pour l'auteur de ce texte qui a longtemps tenté de démontrer le contraire. En revanche, ce n'est pas une surprise pour McDuff et Salamon (2017) (problem 42) qui avaient fait la « bonne » conjecture.

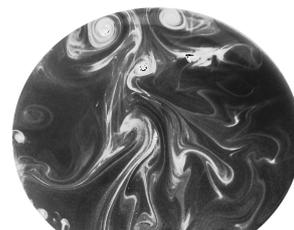
La construction explicite d'un sous-groupe distingué n'est pas difficile mais il faut montrer qu'un homéomorphisme très facile à décrire n'est pas dans ce sous-groupe. Hélas, la nature du groupe quotient reste mystérieuse, même si nous en décrivons quelques propriétés.

Ce théorème a été immédiatement précisé et généralisé dans plusieurs prépublications très récentes, avec des méthodes assez différentes. Nous évoquerons plus loin quelques-uns de ces résultats, malheureusement trop superficiellement.

Il est peut-être utile de préciser qu'il s'agit de simplicité au sens algébrique : un groupe est simple s'il ne possède pas de sous-groupe distingué non trivial. Pour un groupe topologique on parle de *simplicité topologique* s'il n'existe pas de sous-groupe distingué *fermé* non trivial. Nous verrons que *le groupe des homéomorphismes de la sphère de dimension 2 qui respectent l'aire et l'orientation est topologiquement simple lorsqu'on le munit de la topologie de la convergence uniforme.*

**1.2.1. Pourquoi s'intéresser aux homéomorphismes ?** — On peut légitimement se demander s'il est utile de dépenser tant d'énergie <sup>(7)</sup> pendant quarante ans pour étudier les groupes d'homéomorphismes qui préservent l'aire alors que la situation des difféomorphismes est connue depuis longtemps.

Une première réponse est de nature physique : il suffit d'observer une rivière pour comprendre que le flot n'est pas de classe  $C^\infty$ . Une solution classique de l'équation d'Euler pour un fluide parfait incompressible de dimension 2 est donnée par un *tourbillon ponctuel*. Après un temps  $t$  un point de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  est transporté au point  $(r, \theta + t/r^2)$ . Il s'agit d'homéomorphismes non différentiables à l'origine. S'il y a plusieurs tourbillons en interaction, le mouvement global ressemble à celui du lait dans une tasse de café. La dynamique



Le lait dans le café.

d'un ensemble de  $k$  tourbillons ponctuels est un système hamiltonien dans  $\mathbf{R}^{2k}$  qui peut être considéré comme une approximation de l'équation d'Euler (Arnold et Khesin, 1998). Beaucoup de topologues rêvent depuis longtemps (à ce jour sans succès) de développer une étude topologique de la dynamique des fluides, qui serait fondée sur la topologie algébrique, sans la moindre dérivée (voir par exemple D. Sullivan, 2011).

On peut aussi décrire beaucoup de situations très naturelles d'homéomorphismes non lisses qui préservent l'aire. Par exemple, le groupe  $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$  agit linéairement sur le tore  $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$  en préservant l'aire. En passant au quotient par l'involution  $x \mapsto -x$ , on obtient une action *non lisse* de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$  sur la sphère. Les homéomorphismes des surfaces qu'on appelle *difféomorphismes pseudo-Anosov* préservent l'aire mais ce ne sont pas des difféomorphismes !

De manière plus fondamentale, il faut rappeler que l'article de Gromov (1987) intitulé « Soft and hard symplectic geometry » a inauguré l'étude de la *topologie symplectique*. Le théorème de rigidité affirme qu'un difféomorphisme qui est la limite uniforme (en

7. Nous verrons en effet qu'il faut une énergie infinie.

topologie  $C^0$ ) d'une suite de difféomorphismes symplectiques est nécessairement symplectique. Cela conduit à définir un *homéomorphisme symplectique* comme la limite uniforme d'une suite de difféomorphismes symplectiques. Cela signifie-t-il qu'on peut caractériser les homéomorphismes symplectiques en termes uniquement qualitatifs ? Comprendre la structure des homéomorphismes des surfaces qui respectent l'aire est un premier pas vers l'étude des homéomorphismes symplectiques en toute dimension. Il s'agit en quelque sorte de faire passer la mécanique analytique classique du stade de la géométrie différentielle, à la Lagrange, au stade de la topologie.

Il y a bien sûr bien d'autres problèmes actuels de nature algébrique sur les groupes d'homéomorphismes. On en trouvera une présentation très accessible dans Mann (2021).

**1.2.2. *Cet exposé.*** — Même si les articles de Cristofaro-Gardiner, Humilière et Seyfaddini sont remarquablement écrits, ils sont très longs et parfois techniques. Dans le cadre de cet exposé introductif, qui n'est pas destiné aux spécialistes, je ne peux que présenter le contexte ainsi que les outils utilisés dans la preuve, sans prétendre donner une preuve de ces beaux résultats.

Une première partie sera consacrée à la démonstration du théorème de Fathi qui n'est valable qu'en dimension  $\geq 3$ . Pour apprécier le théorème principal de cet exposé à sa juste mesure, il m'a en effet paru indispensable de comprendre ce qui empêche la preuve de Fathi de se généraliser en dimension 2. Pour une raison inconnue, l'article de Fathi est passé relativement inaperçu pendant plus de trente ans. Il a fallu attendre l'analyse de Le Roux (2010) pour clarifier les obstacles dans le cas des surfaces.

J'exposerai ensuite la stratégie générale de Cristofaro-Gardiner, Humilière et Seyfaddini (2020, 2021).

Pour conclure, je citerai d'autres résultats récents, qui ouvrent un vaste champ de recherches.

Je dédie cet article à la mémoire d'André Haefliger (1929-2023) qui fut tant de fois une source d'inspiration dans ma carrière et qui a souvent contribué à ce séminaire.

## 2. LE THÉORÈME DE FATHI

On note  $\text{Homéo}(M)$  le groupe des homéomorphismes d'une variété connexe  $M$  de dimension  $n$ . Un indice 0 est utilisé pour la composante neutre. Lorsque  $M$  possède un bord non vide, on note  $\text{Homéo}(M, \partial M)$  le sous-groupe des homéomorphismes qui sont l'identité près du bord. On note  $\text{Homéo}(M, \text{vol})$  le groupe des homéomorphismes qui préservent (la mesure définie par) un volume  $\text{vol}$ .

Nous allons nous contenter ici d'un cas particulier du théorème de Fathi :  $\text{Homéo}_0(\mathbf{S}^n, \text{vol})$  est simple en dimension  $n \geq 3$ .

## 2.1. Quelques outils

**2.1.1.** *L'astuce d'Alexander (1923).* — Le groupe des homéomorphismes de la boule unité fermée  $\mathbf{B}^n \subset \mathbf{R}^n$  qui coïncident avec l'identité sur le bord est connexe par arcs. En effet un tel homéomorphisme  $f$  peut être joint à l'identité par un chemin  $f^t$  défini pour  $0 < t \leq 1$  par  $f^t(x) = tf(x/t)$  pour  $\|x\| \leq t$  et  $f^t(x) = x$  pour  $\|x\| \geq t$ .

**2.1.2.** *Le théorème de Schoenflies généralisé (Brown, 1960) et le théorème de l'anneau (Kirby, 1969; Quinn, 1982).* — En dimension 2, le théorème de Jordan-Schoenflies garantit que si  $i_1, i_2$  sont deux plongements du cercle  $\mathbf{S}^1$  dans la sphère  $\mathbf{S}^2$ , il existe un homéomorphisme  $h$  de la sphère tel que  $i_2 = hi_1$ . On dispose aujourd'hui de démonstrations élémentaires de ce théorème mais la généralisation en dimension supérieure est bien plus subtile.

Un plongement de la sphère  $\mathbf{S}^{n-1}$  dans  $M$  est *localement plat* s'il se prolonge en un plongement de  $\mathbf{S}^{n-1} \times [-\varepsilon, +\varepsilon]$  dans  $M$ . Lorsque  $n = 2$  tous les plongements sont localement plats mais ce n'est plus le cas pour  $n \geq 3$ . Le *théorème de Schoenflies généralisé* affirme qu'un plongement localement plat de  $\mathbf{S}^{n-1}$  dans  $\mathbf{S}^n$  décompose  $\mathbf{S}^n$  en deux composantes connexes dont les adhérences sont homéomorphes à des boules fermées  $\mathbf{B}^n$ .

En général, on appellera *boule* l'image d'un plongement de  $\mathbf{B}^n$  dans  $M$ . Si la restriction de ce plongement au bord est localement plate, on parle d'une *boule localement plate*. Le théorème de l'anneau affirme que *si  $B$  est une boule localement plate contenue dans l'intérieur de  $\mathbf{B}^n$ , le complémentaire  $\mathbf{B}^n \setminus B^\circ$  de son intérieur est homéomorphe à un anneau standard  $\{1/2 \leq \|x\| \leq 1\}$  par un homéomorphisme qui est l'identité sur la sphère unité  $\mathbf{S}^{n-1}$ , bord de  $\mathbf{B}^n$ .*

**2.1.3.** *La fragmentation.* — Le *support* d'un homéomorphisme est l'adhérence de l'ensemble des points qui ne sont pas fixes. Le lemme de fragmentation affirme que *tout homéomorphisme à support compact peut s'écrire comme la composition d'un certain nombre (a priori non borné) d'homéomorphismes dont les supports sont arbitrairement petits* (c'est-à-dire contenus dans l'un des ouverts d'un recouvrement ouvert fixé a priori).

L'énoncé analogue dans le cas des difféomorphismes est également valide et sa preuve n'est pas difficile. Il suffit de le démontrer pour un difféomorphisme  $f$  arbitrairement proche de l'identité, temps 1 d'un chemin  $f^t$  tel que  $f^0 = id$ . On peut alors utiliser une partition de l'unité  $\lambda_i$  adaptée à un recouvrement du support par un nombre fini d'ouverts  $U_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). On définit alors  $\zeta_j = \sum_{i \leq j} \lambda_i$ . Les applications définies par  $h_j(x) = f^{\zeta_j(x)}(x)$  sont proches de l'identité et sont donc des difféomorphismes qui sont tels que  $h_j$  et  $h_{j-1}$  coïncident hors de  $U_j$ . La décomposition  $f = (h_0^{-1}h_1)(h_1^{-1}h_2) \cdots (h_{k-1}^{-1}h_k)$  est la décomposition cherchée.

Pour les homéomorphismes, la démonstration est plus compliquée et utilise le théorème de l'anneau. On peut en déduire que  $\text{Homéo}_0(M, \partial M)$  agit transitivement sur les boules localement plates.

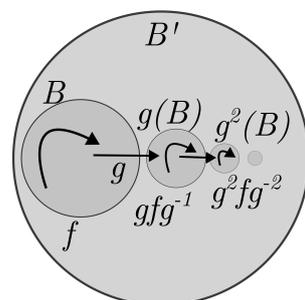
**2.1.4.** *Le théorème de Oxtoby et Ulam (1941).* — Ce théorème montre que le volume utilisé dans notre discussion des groupes d'homéomorphismes n'est pas nécessairement défini par une forme volume. Considérons deux mesures de probabilité  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sur une variété compacte connexe  $M$  qui sont de *bonnes mesures* dans le sens suivant : la mesure du bord est nulle, les mesures des points sont nulles et les mesures des ouverts non vides sont non nulles. Le théorème affirme qu'il existe un homéomorphisme  $f$  de  $M$  qui envoie  $\mu_1$  sur  $\mu_2$ . De plus, on peut supposer que  $f$  est dans  $\text{Homéo}_0(M)$  et l'identité sur le bord.

## 2.2. Le théorème d'Anderson

Pour nous préparer à la preuve du théorème de Fathi, voici une esquisse de preuve du théorème d'Anderson : *la composante neutre du groupe des homéomorphismes d'une variété connexe  $M$  (compacte sans bord pour fixer les idées) est un groupe simple.*

**2.2.1.**  $\text{Homéo}_0(M)$  est un groupe parfait. — Rappelons qu'un groupe est *parfait* si tout élément est un produit de commutateurs <sup>(8)</sup>. Il est clair qu'un groupe simple (non cyclique) est nécessairement parfait car le sous-groupe engendré par les commutateurs est distingué.

Soit  $f$  un homéomorphisme dont le support est contenu dans une boule  $B \subset M$  localement plate. Soit  $B'$  une autre boule localement plate contenant  $B$  dans son intérieur. À conjugaison topologique près, on peut supposer que  $B'$  est la boule unité  $\mathbf{B}^n$  et que  $B$  est une boule euclidienne. Soit  $g$  un homéomorphisme à support dans  $B'$  tel que les boules  $g^k(B)$  soient des boules euclidiennes disjointes deux à deux pour  $k \geq 0$ . Soit  $h$  l'homéomorphisme qui coïncide avec  $g^k f g^{-k}$  sur  $g^k(B)$  et avec l'identité en dehors de la réunion des  $g^k(B)$ .



Le conjugué  $ghg^{-1}$  coïncide avec  $h$  partout sauf sur  $B$  où il coïncide avec  $id$ . Il en résulte que  $(ghg^{-1})^{-1}h = f$  et nous avons écrit  $f$  comme un commutateur  $gh^{-1}g^{-1}h$ . Le groupe  $\text{Homéo}_0(M)$  est donc parfait puisque nous savons que les homéomorphismes à supports dans des boules (localement plates) engendrent ce groupe.

**2.2.2.**  $\text{Homéo}_0(M)$  est un groupe simple. — Passer de la perfection à la simplicité n'est pas toujours facile... mais nous allons utiliser ici une astuce de Thurston.

Soient  $f_1, f_2$  deux homéomorphismes à support dans une boule localement plate  $B$ . Soient  $g_1, g_2$  deux homéomorphismes tels que  $B, g_1(B), g_2(B)$  soient disjoints. On vérifie alors facilement que le commutateur  $[f_1, f_2] = f_1 f_2 f_1^{-1} f_2^{-1}$  est égal au commutateur  $[[f_1, g_1], [f_2, g_2]]$ . Par conséquent  $[f_1, f_2]$  appartient au sous-groupe distingué engendré par  $g_1$ . Pour tout  $g_1 \neq id$ , on peut construire un  $g_2$  qui vérifie les conditions précédentes.

8. Postnikov (1985) parle de groupe *caïmien* puisqu'un tel groupe tue Abel.

Autrement dit, tout sous-groupe distingué non trivial de  $\text{Homéo}_0(M)$  contient les commutateurs  $[f_1, f_2]$ , donc tous les homéomorphismes à support dans une boule localement plate, par perfection, et donc le groupe  $\text{Homéo}_0(M)$  tout entier.

### 2.3. Le théorème de Fathi : le groupe $\text{Homéo}_0(\mathbf{S}^n, \text{vol})$ est simple pour $n \geq 3$

La démonstration de la perfection de  $\text{Homéo}_0(M)$  reposait sur l'existence d'un homéomorphisme  $g$  tel que les images  $g^k(B)$  sont disjointes. C'est clairement impossible si  $g$  préserve un volume de masse finie.

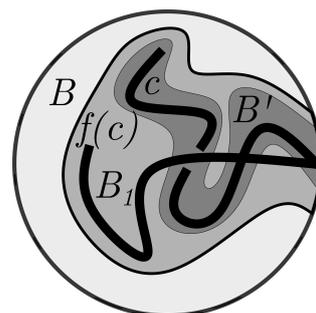
**2.3.1. Fragmentation améliorée.** — Pour  $n \geq 3$ , tout élément de  $\text{Homéo}_0(\mathbf{B}^n, \partial\mathbf{B}^n, \text{vol})$  peut être représenté comme la composition de deux éléments dont les supports sont contenus dans des boules de volumes inférieurs à  $\frac{3}{4}\text{vol}(\mathbf{B}^n)$ .

Nous nous limiterons à une esquisse de preuve.

Convenons de dire qu'une boule localement plate est *bonne* si la mesure  $\text{vol}$  de son bord est nulle. Le groupe  $\text{Homéo}_0(M, \partial M, \text{vol})$  agit transitivement sur les bonnes boules dont la mesure  $\text{vol}$  est donnée.

Soit  $\text{vol}$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{B}^n$  de *masse totale* 1. Soit  $\nu$  la mesure sur le segment  $r: \rho \in [3/4, 1] \mapsto (\rho, 0, \dots, 0) \in \mathbf{B}^n$  obtenue comme image de la mesure de Lebesgue, de masse totale  $1/4$ . La mesure  $\mu = \frac{3}{4}\text{vol} + \nu$  vérifie les hypothèses du théorème de Oxtoby–Ulam. Il existe donc un élément de  $\text{Homéo}_0(\mathbf{B}^n)$ , identité sur le bord, qui envoie  $\mu$  sur  $\text{vol}$  et donc le rayon  $r$  sur un arc  $c$  de mesure de Lebesgue  $\text{vol}(c) = 1/4$  dans  $\mathbf{B}^n$ . Soit  $f$  un élément de  $\text{Homéo}_0(\mathbf{B}^n, \partial\mathbf{B}^n, \text{vol})$ . Puisque  $n \geq 3$ , le complémentaire de la réunion  $c \cup f(c)$  est un ouvert **connexe** dont le volume est compris entre  $1/2$  et  $3/4$ .

Par des arguments purement topologiques, dûs à Brown (1962), et valables en toute dimension, dépendant uniquement de la connexité du complémentaire de  $c \cup f(c)$ , on peut réaliser la situation illustrée sur la figure. La boule  $\mathbf{B}^n$  est la réunion de deux parties  $B$  et  $B_1$ , homéomorphes à une boule, et dont l'intersection, de mesure nulle, est homéomorphe à une boule fermée localement plate de dimension  $n - 1$ . La boule  $B_1$  contient  $c \cup f(c)$  dans son intérieur. Les intersections de  $B$  et  $B_1$  avec  $\mathbf{S}^{n-1} = \partial\mathbf{B}^n$  décomposent  $\mathbf{S}^{n-1}$  en deux boules de dimension  $n - 1$  dont le bord commun est localement plat.



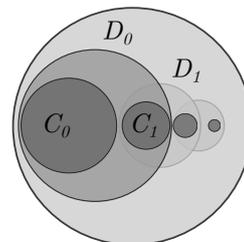
Par ailleurs on peut obtenir cette décomposition de telle sorte que  $B_1$  soit un voisinage arbitrairement petit de  $c \cup f(c)$ . En particulier, on peut faire en sorte que le volume de  $B$  est  $> 1/4$ . On peut alors trouver une bonne boule  $B' \subset B_1$  contenant  $c$  qui, de même que  $B_1$ , rencontre  $\mathbf{S}^{n-1}$  sur une boule de dimension  $n - 1$ . Le volume de  $B_1$  est  $> 1/4$ . On peut aussi supposer que  $B' \cup f(B')$  est contenu dans  $B_1$ . Le théorème de Schoenflies généralisé permet alors de garantir l'existence d'un homéomorphisme  $f_1$  préservant  $\text{vol}$  qui coïncide avec  $f$  sur  $B'$  et qui est l'identité sur  $B$ . On a alors décomposé  $f = f_1 f_2$  où

$f_2 = f_1^{-1}f$ . Le support de  $f_1$  est contenu dans  $B_1$ , de volume inférieur à  $3/4$ . Le support de  $f_2$  est contenu dans le complémentaire de  $f(B')$  donc de volume inférieur à  $3/4$ .

**2.3.2.**  $\text{Homéo}_0(B, \partial B, \text{vol})$  est un groupe parfait. — Nous avons vu que la preuve d'Anderson utilise un homéomorphisme  $g$  tel que des boules  $g^k(B)$  soient disjointes deux à deux pour  $k \geq 0$ . C'est bien sûr impossible si  $g$  préserve un volume de masse totale finie. Fathi utilise la fragmentation améliorée.

Soit  $B$  une bonne boule, identifiée à la boule unité  $\mathbf{B}^n$  (munie d'un multiple constant de  $\text{vol}$  pour que  $B$  et  $\mathbf{B}^n$  aient la même masse totale). Considérons deux suites de boules euclidiennes  $(C_i)_{i \geq 0}$  et  $(D_i)_{i \geq 0}$  à l'intérieur de  $\mathbf{B}^n$  vérifiant les propriétés suivantes. L'intérieur de  $D_i$  contient  $C_i$  et  $C_{i+1}$ , les  $C_i$  sont disjoints, les  $D_{2i}$  sont disjoints, de même que les  $D_{2i+1}$ . On suppose que  $\text{vol}(C_{i+1}) = \frac{3}{4}\text{vol}(C_i)$ . Considérons un homéomorphisme  $f = f_0$  qui respecte le volume et dont le support est dans l'intérieur de  $C_0$ . D'après la fragmentation améliorée, on peut décomposer  $f_0$  en un produit de deux homéomorphismes dont les supports sont dans des boules de volumes  $< \frac{3}{4}\text{vol}(C_0) = \text{vol}(C_1)$ .

Autrement dit  $f_0 = h_{1,0}h_{2,0}$  et le support de  $h_{i,0}$  est contenu dans une boule  $G_{i,0} \subset C_0$  de volume  $< \text{vol}(C_1)$  (pour  $i = 1, 2$ ). On peut donc conjuguer chaque  $h_{i,0}$  par un homéomorphisme  $k_{i,1}$  préservant le volume, de support dans  $D_0$  et envoyant  $G_{i,0}$  dans  $C_1$ . On obtient des éléments  $h_{i,1} = k_{i,1}h_{i,0}k_{i,1}^{-1}$  dont les supports sont contenus  $C_1$ . On pose alors  $f_1 = h_{1,1}h_{2,1}$ . C'est un homéomorphisme dont le support est contenu dans  $C_1$ .



Notons que  $f_0f_1^{-1} = (h_{1,0}h_{2,0})(k_{1,1}h_{1,0}k_{1,1}^{-1}k_{2,1}h_{2,0}k_{2,1}^{-1})^{-1}$  est un produit de commutateurs dans le groupe engendré par les  $h_{i,0}, k_{i,1}$  car ce mot s'annule lorsqu'on le rend abélien. On pourrait facilement expliciter un tel produit et on peut vérifier qu'il suffit de deux commutateurs (même si ce n'est pas important). Autrement dit  $f_0f_1^{-1} = [a_0, b_0][c_0, d_0]$  où les  $a_0, b_0, c_0, d_0$  sont des mots en les  $h, k$ , donc de support dans  $D_0$ .

On peut alors faire subir à  $f_1$  le même traitement que nous avons fait subir à  $f_0$ . On obtient un homéomorphisme  $f_2$  dont le support est dans  $C_2$ . Par récurrence, on construit  $f_1, f_2, f_3, \dots$  dont les supports sont dans  $C_1, C_2, C_3, \dots$  et on a une décomposition  $f_k f_{k+1}^{-1} = [a_k, b_k][c_k, d_k]$  pour  $k \geq 0$ . Les supports des  $a_k, b_k, c_k, d_k$  sont contenus dans  $D_k$ .

Il nous reste à définir les produits infinis (en observant que tous les termes commutent puisque les  $C_i$  sont disjoints)

$$g = f_0 f_1^{-1} f_2 f_3^{-1} \dots \quad \text{et} \quad g' = f_1 f_2^{-1} f_3 f_4^{-1} \dots$$

Notre  $f_0$  initial est  $gg'$ . On peut alors écrire  $f_0$  comme un produit de commutateurs en posant :

$$\begin{aligned} a &= a_0 a_2 a_4 \dots; & b &= b_0 b_2 b_4 \dots; & c &= c_0 c_2 c_4 \dots; & d &= d_0 d_2 d_4 \dots \\ a' &= a_1 a_3 a_5 \dots; & b' &= b_1 b_3 b_5 \dots; & c' &= c_1 c_3 c_5 \dots; & d' &= d_1 d_3 d_5 \dots \end{aligned}$$

Clairement  $g = [a, b][c, d]$  et  $g' = [a', b'][c', d']$ . Nous avons donc écrit  $f_0$  comme un produit de commutateurs.

**2.3.3.** *Fin de la démonstration du théorème de Fathi : le groupe  $\text{Homéo}_0(\mathbf{S}^n, \text{vol})$  est simple pour  $n \geq 3$ .* — Nous avons tous les outils. D’après le théorème de l’anneau, l’adhérence du complémentaire d’une boule localement plate dans  $\mathbf{S}^n$  est une autre boule localement plate. Un homéomorphisme  $\text{Homéo}_0(\mathbf{S}^n, \text{vol})$  proche de l’identité peut-être composé avec un autre pour se ramener au cas où une petite boule (localement plate) est préservée. On en déduit facilement un lemme de fragmentation pour  $\text{Homéo}_0(\mathbf{S}^n, \text{vol})$ . Pour une variété plus générale que la sphère, il faudrait se placer dans le noyau de l’homomorphisme flux. La perfection de  $\text{Homéo}_0(B, \partial B, \text{vol})$  entraîne alors celle de  $\text{Homéo}_0(\mathbf{S}^n, \text{vol})$ . Avec le même argument de Thurston, la simplicité en résulte comme dans le cas du théorème d’Anderson.

## 2.4. Pourquoi la démonstration du théorème de Fathi ne s’applique pas en dimension 2

Le théorème principal décrit dans cet exposé consiste en la négation de celui de Fathi en dimension 2 :  $\text{Homéo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  n’est pas un groupe simple. Il est donc important de comprendre quels sont les arguments dans la preuve de Fathi qui ne sont pas valides en dimension 2. Le seul endroit où on utilise que la dimension est  $\geq 3$  se situe dans la preuve de la fragmentation améliorée : nous avons utilisé le fait que le complémentaire de la réunion de deux arcs plongés est connexe. Ce n’est pas le cas en dimension 2 lorsque les arcs se rencontrent.

**2.4.1.** *Fragmentation bornée.* — Un article lumineux de Le Roux (2010) analyse cette question en détail. Il définit la propriété  $P_\rho$  pour  $0 < \rho < 1$ .

$P_\rho$  : Il existe un entier  $m$  tel que tout élément de  $\text{Homéo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire})$  à support dans un disque d’aire  $< \rho$  est un produit d’au plus  $m$  éléments dont les supports sont dans des disques d’aires  $< \rho/2$ .

Clairement  $P_\rho$  entraîne  $P_{\rho'}$  pour  $\rho' < \rho$  en itérant plusieurs fois le processus de fragmentation. Le Roux démontre alors que la simplicité de  $\text{Homéo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire})$  est équivalente au fait que  $P_\rho$  est satisfaite pour au moins une valeur de  $\rho$ . Nous savons donc maintenant que  $P_\rho$  n’est satisfaite pour aucun  $0 < \rho < 1$  et que c’est bien cette fragmentation qui est au cœur de la question.

**2.4.2.** *Invariant de Calabi.* — Soit  $f$  un élément de  $\text{Difféo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire})$ . Soit  $\zeta$  une 1-forme telle que  $d\zeta = \text{aire}$ . Puisque  $f$  préserve l’aire, i.e.  $f^*d\zeta = d\zeta$ , la forme  $f^*\zeta - \zeta$  est fermée et donc la différentielle d’une unique fonction  $H$  nulle près du bord. On définit alors l’invariant de Calabi, noté  $\mathcal{C}al(f)$ , comme l’intégrale de  $H$  sur le disque. On vérifie facilement qu’il s’agit d’un homomorphisme surjectif à valeurs dans  $\mathbf{R}$  et, comme rappelé plus haut, on sait que le noyau de  $\mathcal{C}al$  est un groupe simple (Banyaga, 1997).

Pour montrer que  $\text{Homéo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire})$  n’est pas simple, il « suffirait » donc de prolonger la définition de  $\mathcal{C}al$  aux homéomorphismes. Nous verrons que c’est en effet le cas, mais on ne peut certainement pas prolonger  $\mathcal{C}al$  par continuité. Pour s’en convaincre, il suffit de considérer des difféomorphismes « twists » définis en coordonnées polaires

par  $(r, \theta) \mapsto (r, \theta + u(r))$  où  $u$  est défini sur  $[0, 1]$  et à valeurs réelles. Si  $u$  par exemple est nul en dehors de l'intervalle  $[1/2k, 1/k]$  il s'agit bien d'un difféomorphisme qui tend uniformément vers l'identité dans la topologie  $C^0$  lorsque  $k$  tend vers l'infini. En revanche, l'invariant de Calabi peut être arbitrairement grand comme le montre un calcul élémentaire que nous verrons plus loin.

**2.4.3. Quasi-morphisme de Calabi.** — Normalisons l'aire de la sphère  $\text{aire}(\mathbf{S}^2) = 1$ . On savait déjà que  $P_\rho$  n'est pas satisfaite pour  $\rho > 1/2$  grâce à une construction d'un *quasi-morphisme* de Calabi due à Entov, Polterovich et Py (2012). Il s'agit d'une application  $\psi: \text{Difféo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire}) \rightarrow \mathbf{R}$  telle que  $|\psi(f_1 f_2) - \psi(f_1) - \psi(f_2)|$  est borné indépendamment de  $f_1, f_2$ . Par ailleurs,  $\psi$  est *homogène*, i.e. on a  $\psi(f^k) = k\psi(f)$  pour tout entier  $k$ . Ce quasi-morphisme est tel que si le support de  $f$  est contenu dans un disque  $D$  d'aire  $< 1/2$ , la valeur de  $\psi(f)$  est égale à (un multiple constant de) l'invariant  $\text{Cal}_D(f)$  vu comme un difféomorphisme du disque  $D$ . Choisissons un disque  $D_0$  dans  $\mathbf{S}^2$  d'aire  $\rho > 1/2$  ce qui permet de définir un plongement  $i: \text{Difféo}(D_0, \partial D_0, \text{aire}) \rightarrow \text{Difféo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$ . Il se trouve que la différence  $\bar{\psi} = \psi \circ i - \text{Cal}_{D_0}$  se prolonge par continuité à  $\text{Homéo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  et s'annule sur tous les éléments dont le support est contenu dans un disque d'aire  $< 1/2$ . Si tous les éléments de  $\text{Homéo}(D_0, \partial D_0, \text{aire})$  pouvaient s'écrire comme le produit d'un nombre *borné* d'éléments à support dans des disques d'aires  $< 1/2$ , le quasi-morphisme  $\psi$  serait borné et donc nul puisqu'il est homogène. Comme ce n'est pas le cas,  $P_\rho$  n'est pas satisfaite pour  $\rho > 1/2$ .

**2.4.4. Une infinité non dénombrable de sous-groupes distingués.** — Le Roux propose une construction de sous-groupes distingués. Si  $f \in \text{Homéo}(\mathbf{D}^2, \partial \mathbf{D}^2, \text{aire})$  et  $0 < \rho < 1$  on note  $\|f\|_\rho$  la longueur minimale d'une écriture de  $f$  comme produit d'éléments dont les supports sont contenus dans des disques d'aire  $< \rho$ . Soit  $\lambda: ]0, 1] \rightarrow \mathbf{R}_+$  une fonction décroissante. On montre facilement que l'ensemble  $N_\lambda$  des homéomorphismes  $f$  tels qu'il existe une constante  $C_f$  telle que  $\|f\|_\rho \leq C_f \lambda(\rho)$  pour  $\rho$  assez petit est un sous-groupe distingué.

Le Roux montre que si  $\text{Homéo}(\mathbf{D}^2, \partial \mathbf{D}^2, \text{aire})$  n'est pas simple — ce que nous savons maintenant être le cas — ces sous-groupes  $N_\lambda$  sont propres. Il démontre même qu'on peut construire de cette manière une infinité non dénombrable de sous-groupes distingués propres. Est-il possible de démontrer ces résultats directement ? par des méthodes « élémentaires » ?

## 2.5. Aparté : de la perfection à la simplicité

D'ordinaire, la démonstration qu'un groupe n'est pas simple consiste à construire un homomorphisme « naturel » vers un autre groupe tout aussi « naturel ». Qu'on pense par exemple au déterminant dans un groupe linéaire ou à la signature dans le groupe des permutations. Ce n'est pas l'approche dans le cas de  $\text{Homéo}(\mathbf{D}^2, \partial \mathbf{D}^2, \text{aire})$  où l'on se « contente » d'exhiber un sous-groupe distingué sans se préoccuper du quotient. Lorsqu'il s'agit de groupes de transformations, il arrive souvent que la perfection entraîne la simplicité, comme nous venons de le voir. Epstein (1970) a d'ailleurs dégagé des

conditions très générales qui sont vérifiées dans notre situation. Nous utilisons ici la contraposée puisque nous savons que les groupes que nous étudions ne sont pas simples :  $\text{Homéo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire})$  et  $\text{Homéo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  ne sont donc pas parfaits.

Il existe cependant quelques exemples « naturels » de groupes parfaits qui ne sont pas simples pour une raison qui n'est pas évidente. Le groupe des germes de difféomorphismes de classe  $C^\infty$  de  $\mathbf{R}$  à l'origine qui sont  $C^\infty$ -tangents à l'identité est un groupe parfait (Sergeraert, 1977). Si  $f$  est un tel germe, on peut considérer l'ensemble de ses points fixes  $\text{fix}(f)$  comme un germe d'ensemble fermé au voisinage de l'origine. L'ensemble des  $f$  tels que 0 soit un point de densité de  $\text{fix}(f)$  au sens de Lebesgue est un sous-groupe distingué. On conçoit que le quotient est compliqué.

McDuff (1981) montre que le groupe des difféomorphismes d'une boule ouverte qui respectent le volume est parfait en dimension  $n \geq 3$  mais il n'est certainement pas simple puisqu'il contient le sous-groupe distingué des difféomorphismes à support compact (qui est un groupe simple). En dimension 2, le groupe des difféomorphismes du disque ouvert qui respectent l'aire n'est pas parfait, comme nous le verrons plus loin.

### 3. LE THÉORÈME DE D. CRISTOFARO-GARDINER, V. HUMILIÈRE ET S. SEYFADDINI

#### 3.1. Quelques outils

**3.1.1.** *Le théorème de Moser (1965).* — Ce théorème est l'analogue différentiable du théorème de Oxtoby–Ulam pour les mesures. Il affirme que deux formes de volume (de classe  $C^\infty$ ) sur la même variété compacte connexe et de même volume total sont images l'une de l'autre par un difféomorphisme isotope à l'identité. Plus précisément, la donnée d'une métrique riemannienne permet de construire une telle isotopie canonique si bien que le groupe de tous les difféomorphismes d'une variété compacte se rétracte par déformation sur le sous-groupe de ceux qui préservent une forme de volume fixée.

**3.1.2.** *La topologie de  $\text{Difféo}(\mathbf{S}^2)$  (Smale, 1959).* — Le groupe  $\text{Difféo}_+(\mathbf{S}^2)$  des difféomorphismes qui respectent l'orientation se rétracte par déformation sur le sous-groupe compact maximal  $\text{SO}(3)$ . On dispose de plusieurs preuves de ce fait, mais la plus rapide est peut-être celle qui consiste à considérer l'espace des structures presque complexes positives sur la sphère, qui est contractile. Pour chaque point de la sphère, il s'agit en effet de choisir un opérateur  $J$  de carré  $-id$  dans l'espace tangent, tel que  $\text{aire}(v, J(v)) > 0$  pour tout vecteur  $v \neq 0$ . L'espace de ces opérateurs est contractile (il s'identifie à un disque). On observe alors que  $\text{Difféo}_+(\mathbf{S}^2)$  opère transitivement sur cet espace de structures presque complexes : c'est une version du théorème classique d'uniformisation. Il en résulte que  $\text{Difféo}_+(\mathbf{S}^2)$  se rétracte sur le sous-groupe des difféomorphismes qui respectent une structure complexe, *i.e.* sur les biholomorphismes de  $\mathbf{CP}^1$ , c'est-à-dire sur  $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$ , et donc sur  $\text{SO}(3)$ . On en déduit que  $\text{Difféo}_+(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  se rétracte sur  $\text{SO}(3)$  et que  $\text{Difféo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire})$  est contractile. En particulier  $\text{Difféo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  est

égal à  $\text{Difféo}_+(\mathbf{S}^2, \text{aire})$ . Le résultat analogue est valide pour les homéomorphismes (Kneser, 1926).

**3.1.3. Les hamiltoniens.** — Un élément de  $\text{Difféo}(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  ou de  $\text{Difféo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire})$  est donc le temps 1 d'un champ de vecteur  $(X_t)_{t \in [0,1]}$  qui dépend du temps et qui respecte l'aire. La 1-forme différentielle définie par  $\beta_t(v) = \text{aire}(X_t, v)$  est alors fermée. C'est donc une forme exacte  $dH_t$ . La fonction  $H_t$  qui dépend de  $t \in [0, 1]$ , et qui est définie sur la sphère ou le disque à une constante additive près, est un *hamiltonien*. Pour cette raison on parle aussi des groupes de *difféomorphismes hamiltoniens*. Dans le cas du disque, on normalise  $H_t$  en demandant que sa restriction au bord est nulle. Dans le cas de la sphère, on demande que l'intégrale de  $H_t$  soit nulle. Si  $H_t$  est un hamiltonien on notera  $f_H^t$  l'isotopie qu'il définit.

Bien entendu pour un difféomorphisme hamiltonien  $f$ , l'isotopie  $f_H^t$  n'est pas unique et il faut fréquemment vérifier que certaines constructions sont indépendantes des choix. Par exemple, dans le cas du disque, on vérifie que l'intégrale  $\int_0^1 \int_{\mathbf{D}^2} H_t \text{aire} dt$  ne dépend que de  $f$  et on s'assure facilement qu'on retrouve ainsi l'invariant de Calabi de  $f$ .

**3.1.4. La métrique de Hofer.** — Pour une fonction  $H$  définie sur la sphère ou sur le disque, on note  $\text{osc}(H)$  la différence entre les valeurs maximales et minimales. La *norme de Hofer* de  $H_t$  est définie par

$$\|(H_t)_{t \in [0,1]}\|_{(1,\infty)} = \int_0^1 \text{osc}(H_t) dt.$$

Si  $f_1, f_2$  sont deux difféomorphismes hamiltoniens, la *distance de Hofer* est la borne intérieure des normes de Hofer des hamiltoniens qui définissent  $f_1 f_2^{-1}$ . Un résultat difficile de Hofer (1990), Lalonde et McDuff (1995) et Polterovich (2001) affirme que ceci définit en effet une distance sur ces groupes de difféomorphismes, qui possède par ailleurs la propriété intéressante d'être invariante par translations à gauche et à droite. Rappelons que les seuls groupes de Lie connexes qui admettent une métrique bi-invariante sont les produits d'un groupe compact et d'un groupe abélien. Bien sûr, nos groupes de difféomorphismes hamiltoniens sont de dimension infinie et ne sont pas des groupes de Lie.

**3.1.5. Une première tentative infructueuse mais intéressante.** — Müller et Oh (2007) ont défini un sous-groupe distingué de  $\text{Homéo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$ , baptisé groupe des *haméomorphismes*, sans pourtant parvenir à montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe propre, même si nous savons maintenant que c'est en effet le cas. Sa définition mérite cependant d'être mentionnée, comme motivation pour la suite. Soit  $f^t$  une isotopie dans  $\text{Homéo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  joignant l'identité  $f^0$  à un homéomorphisme  $f = f^1$ . On dit qu'il s'agit d'une *haméotopie* s'il existe une suite de hamiltoniens lisses  $H_i^t$  ( $i \geq 1, t \in [0, 1]$ ) tels que d'une part  $\|H^i - H^j\|_{(1,\infty)}$  tend vers 0 quand  $i, j$  tendent vers l'infini, et d'autre part les flots  $f_{H_i}^t$  tendent vers  $f^t$  uniformément quand  $i$  tend vers l'infini. L'ensemble des homéomorphismes qui sont l'extrémité d'une telle haméotopie est le groupe  $\text{Haméo}(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  des haméomorphismes.

**3.1.6. Une tentative fructueuse.** — C'est en s'inspirant de diverses tentatives précédentes que D. Cristofaro-Gardiner, V. Humilière et S. Seyfaddini ont construit explicitement un sous-groupe distingué dans  $\text{Homéo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  et, surtout, ont montré qu'il s'agit en effet d'un sous-groupe propre.

On dit qu'un élément  $f$  de  $\text{Homéo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  est d'énergie finie<sup>(9)</sup> s'il est limite uniforme d'une suite  $f_i$  d'éléments de  $\text{Difféo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  bornée pour la distance de Hofer. Le résultat principal est le suivant.

*L'ensemble  $\text{FHoméo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  des homéomorphismes d'énergie finie est un sous-groupe distingué propre.*

Comme pour la tentative précédente, le fait qu'il s'agit d'un sous-groupe distingué est facile. La difficulté est d'exhiber un élément qui n'est pas d'énergie finie.

### 3.2. La stratégie

Le reste de cette section consiste à esquisser l'idée de la preuve. Les cas du disque et de la sphère suivent des stratégies différentes mais comme nous contentons de décrire le principe général, nous nous concentrons sur le cas du disque.

**3.2.1. Le candidat d'énergie infinie.** — Reprenons un difféomorphisme du disque de la forme  $f: (r, \theta) \mapsto (r, \theta + u(r))$  où  $u: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  est nul près de 1, de façon à ce que  $f$  soit l'identité près du bord, et constant près de 0 pour que  $f$  soit une rotation au voisinage de l'origine. Il s'agit du temps 1 d'un hamiltonien  $H: \mathbf{D}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  autonome, qui ne dépend que de  $r$  avec  $u(r) = (dH/dr)/2\pi r$ . L'invariant de Calabi de  $f$  est l'intégrale de  $H$  sur le disque  $\int_0^1 2\pi r H(r) dr$ , soit  $-2\pi^2 \int_0^1 r^3 u(r) dr$ .

Une fonction continue  $u$  sur l'intervalle  $]0, 1]$  définit un homéomorphisme  $f$  préservant l'aire, quel soit le comportement de  $u$  au voisinage de 0. Il est donc tentant de penser qu'un tel homéomorphisme pourrait ne pas être d'énergie finie si  $u$  est continue décroissante, nulle près de 1, et telle que l'intégrale  $\int_0^1 r^3 u(r) dr$  diverge<sup>(10)</sup>. C'est en effet le cas comme nous allons le voir.

**3.2.2. Les invariants spectraux.** — Les invariants spectraux des difféomorphismes hamiltoniens furent d'abord introduits par Viterbo (1992) puis généralisés par Schwarz (2000) et Oh (2005).

Le cœur de la démonstration consiste à construire des *invariants spectraux* associés à un entier  $d \geq 1$ . Si  $H_t: \mathbf{D}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  est un hamiltonien dépendant du temps, nul près du bord, nous allons décrire des invariants  $c_d(H_t)$  qui vérifient les propriétés suivantes.

1.  $c_d(H_t)$  ne dépend que du difféomorphisme hamiltonien  $f_H^1$  défini par  $H_t$ .
2. Continuité :  $|c_d(H_t^1) - c_d(H_t^2)| \leq d \|H_t^1 - H_t^2\|_{(1, \infty)}$ .

9. Formellement, un hamiltonien a la dimension d'une énergie et la norme de Hofer celle d'une action : une énergie multipliée par un temps. Il serait donc préférable de parler d'homéomorphisme d'action finie.

10. Pour le tourbillon ponctuel irrotationnel qu'on rencontre en dynamique des fluides on a  $u(r) \propto r^{-2}$  si bien que l'intégrale converge même si la dynamique n'est pas lisse à l'origine.

3. Monotonie : Si  $H_t^1 \leq H_t^2$  pour tout  $t$ , on a  $c_d(H_t^1) \leq c_d(H_t^2)$ .

**3.2.3.** *La conjecture de Hutchings.* — Pour un élément  $f$  de  $\text{Difféo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire})$ , *Hutchings conjecture que  $c_d(f)/d$  converge vers l'invariant de Calabi de  $f$  quand  $d$  tend vers l'infini.* La question reste ouverte mais c'est en effet le cas lorsque  $f$  est un twist monotone associé à une fonction lisse  $u: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ . Même si la preuve de cette dernière assertion n'est pas facile, on ne s'étonnera pas qu'il soit possible de tout calculer pour des difféomorphismes aussi explicites que ces twists.

**3.2.4.** *La première étape.* — On se fixe donc une fonction  $u$  lisse sur  $]0, 1]$ , décroissante, nulle près de 1, et telle que l'intégrale  $\int_0^1 r^3 u(r) dr$  diverge. Cela définit un élément  $f_u$  de  $\text{Homéo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire})$  dont il s'agit de montrer qu'il n'est pas dans le groupe  $\text{FHoméo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire})$  des homéomorphismes d'énergie finie.

La propriété 1 montre que  $c_d$  est en fait défini sur  $\text{Difféo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire})$ . La propriété 2 permettra de montrer que  $c_d$  se prolonge par continuité à  $\text{Homéo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire})$ . Elle permet en outre de montrer que  $\limsup_{d \rightarrow \infty} c_d(f_H^1)/d < \infty$  pour tout difféomorphisme  $f = f_H^1$ . On montre que cela se généralise aux homéomorphismes d'énergie finie :  $\limsup_{d \rightarrow \infty} c_d(f)/d < \infty$  pour  $f \in \text{FHoméo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire})$ .

**3.2.5.** *La deuxième étape.* — On considère une suite de fonctions lisses et décroissantes  $(u_k)_{k \geq 1}$  définies sur  $]0, 1]$  et à valeurs réelles telles que :

1.  $u_k(r)$  est constant dans un voisinage de 0 de sorte que  $f_{u_k}$  est un difféomorphisme,
2.  $u_k(r) = u(r)$  pour  $r \geq 1/k$ ,
3.  $u_{k+1} \geq u_k$ .

Par monotonie,  $c_d(f_u) \geq c_d(f_{u_k})$ . La conjecture de Hutchings, établie pour les twists, montre que pour tout  $k$  la suite  $c_d(f_{u_k})/d$  tend vers  $\text{Cal}(f_{u_k})$  lorsque  $d$  tend vers l'infini. Enfin  $\text{Cal}(f_{u_k})$  tend vers l'infini quand  $k$  tend vers l'infini puisque  $\int_0^1 r^3 u_k(r) dr$  tend vers l'infini. Il en résulte que  $\limsup_{d \rightarrow \infty} c_d(f_u)/d = \infty$ .

Par conséquent  $f_u$  n'est pas d'énergie finie, ce que nous voulions démontrer.

Il nous reste encore à définir les invariants spectraux et à montrer qu'ils vérifient les propriétés utilisées ci-dessus : il s'agit de l'essentiel du travail, que nous ne ferons pas...

### 3.3. L'homologie de Floer

**3.3.1.** *Un exemple jouet.* — Avant d'évoquer la construction des invariants  $c_d$ , considérons l'exemple classique suivant qui pourra servir de motivation. Soit  $h: \Lambda \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue définie sur une variété  $\Lambda$ , compacte par exemple, et choisissons une classe d'homologie  $d$  dans  $H_\star(\Lambda, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$  (d'un degré quelconque). Notons  $\Lambda^{h \leq l} = h^{-1}(] - \infty, l])$  et  $c_d(h)$  la borne inférieure des  $l$  tels que  $d$  est dans l'image de l'application naturelle de  $H_\star(\Lambda^{h \leq l}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$  vers  $H_\star(\Lambda, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ . Autrement dit,  $c_d(h)$  est le plus petit sous-niveau de  $h$  dans lequel on détecte la classe d'homologie  $d$ .

Les propriétés suivantes sont évidentes :

1. Si  $h$  est lisse,  $c_d(h)$  est une valeur critique.

2. Continuité  $|c_d(h_1) - c_d(h_2)| \leq \sup|h_1 - h_2|$ .
3. Monotonie : Si  $h_1 \leq h_2$  on a  $c_d(h_1) \leq c_d(h_2)$ .

**3.3.2. L'homologie de Morse.** — Avant d'expliquer comment l'homologie de Floer pourra être utilisée, et toujours comme motivation, voici comment on définit classiquement l'homologie de Morse, parfois appelée homologie de Morse–Smale–Thom–Witten (voir par exemple Laudenbach (2004)).

Soit  $h: \Lambda \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de Morse sur une variété compacte. On choisit une métrique riemannienne générique sur  $\Lambda$ , ce qui permet de définir le champ de vecteurs gradient de  $h$ . On définit alors un complexe différentiel  $(E_k)_{k \geq 0}$  d'espaces vectoriels sur  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  de la manière suivante. L'espace  $E_k$  est librement engendré par les points critiques  $x$  de  $h$  d'indice  $k$ . Le bord  $\partial x$  d'un point critique d'indice  $k$  est la somme  $\sum_y n_{x,y} y$  où  $y$  décrit les points critiques d'indice  $k - 1$  et  $n_{x,y}$  est le nombre (modulo 2) de trajectoires (de l'opposé) du gradient tendant vers  $x$  et  $y$  lorsque le temps tend vers  $\pm\infty$ . Il se trouve que  $\partial^2 = 0$  et que l'homologie de ce complexe ne dépend ni de la fonction de Morse ni de la métrique riemannienne : on obtient simplement l'homologie singulière usuelle (à coefficients dans  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ).

**3.3.3. L'action.** — L'exemple jouet utilisait une variété, une fonction, et une classe d'homologie. Dans notre situation, un espace de lacets généralisera la variété et une fonctionnelle d'action jouera le rôle de la fonction. Commençons par simplifier le problème en remplaçant d'abord la sphère par une surface compacte  $S$  (munie d'une forme d'aire) de caractéristique d'Euler-Poincaré  $\leq 0$  de sorte que  $\pi_2(S) = 0$ .

Considérons un difféomorphisme hamiltonien  $f_H^1$  de  $S$  défini par un hamiltonien  $H_t: S \rightarrow \mathbf{R}$  pour  $t \in [0, 1]$ . Soit  $\Lambda$  l'espace des lacets  $c: \mathbf{S}^1 \rightarrow S$  homotopiquement triviaux. Un tel lacet borde une application  $\bar{c}: \mathbf{D}^2 \rightarrow S$ . Nous noterons simplement  $aire(c)$  l'intégrale  $\int_{\mathbf{D}^2} \bar{c}^* aire$ , indépendante du choix de  $\bar{c}$ , parce que  $\pi_2(S) = 0$ . L'action est définie par

$$\mathcal{A}_H: c \in \Lambda \mapsto \int_0^1 H_t(c(t)) dt - aire(c) \in \mathbf{R}.$$

Il est facile de vérifier que les points critiques de cette action sont précisément les orbites périodiques de période 1 du flot non autonome  $f_H^t$  engendré par  $H_t$ .

C'est l'espace  $\Lambda$  qui jouera le rôle de la variété dans l'exemple jouet et  $\mathcal{A}_H$  jouera celui de la fonction de Morse.

**3.3.4. Les valeurs critiques.** — L'action  $\mathcal{A}_H$  dépend du choix de l'hamiltonien  $H_t$ . Le difféomorphisme  $f = f_H^1$  ne suffit pas pour la définir. Cependant les valeurs critiques ne dépendent presque pas de l'hamiltonien... Plus précisément, si  $H_t$  et  $G_t$  sont deux hamiltoniens définissant le même  $f = f_H^1 = f_G^1$ , les ensembles des valeurs critiques de  $\mathcal{A}_H$  et  $\mathcal{A}_G$  coïncident à une translation près.

La façon la plus simple de s'en convaincre consiste à considérer d'abord le cas où un hamiltonien  $H_t$  définit l'identité  $f_H^1 = id$ . Tous les lacets  $t \in [0, 1] \mapsto f_H^t(x)$  sont alors des points critiques. Par connexité, l'action  $\mathcal{A}_H$  est constante sur tous ces lacets critiques.

Dans le cas général on définit la composition  $G\#H$  de deux hamiltoniens  $H_t$  et  $G_t$  de la manière suivante  $(G\#H)_t(x) = G_t(x) + H_t((f_G^t)^{-1}(x))$ . Le flot hamiltonien  $f_{G\#H}^t$  associé à  $G\#H$  est la composition  $f_G^t f_H^t$ . Si les deux hamiltoniens  $G, H$  ont le même temps 1, *i.e.* si  $f = f_G^1 = f_H^1$ , on pose  $\bar{G}_t = -H_t(f_G^t(x))$  de sorte que le temps 1 de  $\bar{G}\#H$  est l'identité. L'argument précédent, appliqué au cas  $f_{\bar{G}\#H}^1 = id$ , permet alors de conclure.

**3.3.5.** *La suspension et sa symplectisation.* — L'objet canoniquement associé à un difféomorphisme  $f$  de  $S$  est sa *suspension*, *i.e.* la variété  $Y_f$  de dimension 3, quotient de  $S \times \mathbf{R}$  par l'action de  $\mathbf{Z}$  dans laquelle  $k$  agit par  $(x, t) \mapsto (f^k(x), t+k)$ . Cette variété fibre sur le cercle  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  et les fibres sont difféomorphes à  $S$ . La donnée d'une isotopie joignant l'identité à  $f$  permet d'identifier le fibré  $Y_f$  au produit  $S \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ . Réciproquement, une trivialisatation définit une isotopie.

Le champ de vecteurs  $\partial/\partial t$  passe au quotient en un champ  $R$  qu'on appelle parfois (à tort) le *champ de Reeb*. Ce champ est bien sûr transverse aux fibres et l'application de premier retour sur une fibre est (conjuguée à)  $f$ . La forme d'aire permet de construire une 2-forme fermée  $\omega$  sur  $Y_f$  dont le noyau est précisément  $R$ .

La *symplectisation* de  $f$  est la variété  $\mathbf{R} \times Y_f$ , de dimension 4, munie de la forme symplectique  $\omega + ds \wedge dt$  où  $s$  désigne la première coordonnée. Une *structure presque complexe*  $J$  sur  $\mathbf{R} \times Y_f$  est *admissible* si

- $J(\partial/\partial s) = R$ ,
- $J$  est invariant par translations sur le premier facteur,
- $(\omega + ds \wedge dt)(v, Jv) > 0$  pour tout vecteur non nul  $v$ .

**3.3.6.** *L'homologie symplectique de Floer.* — Voici une présentation rapide de l'homologie symplectique de Floer « classique » (Floer, 1989). Voir Laudendbach (2004) ou Audin et Damian (2010) pour une exposition détaillée. On suppose que tous les points fixes de  $f$  sont non-dégénérés, *c'est-à-dire* que 1 n'est pas valeur propre de la différentielle de  $f$  en un point fixe. La donnée d'une structure presque complexe admissible  $J$  permet de définir les lignes de gradient de l'action et de les interpréter comme des courbes pseudo-holomorphes dans la symplectisation  $\mathbf{R} \times Y_f$ . Il s'agit de chemins  $c_s$  dans  $\Lambda$  qui balaient un cylindre dans  $\mathbf{R} \times Y_f$  dont le plan tangent est invariant par  $J$ . L'*homologie de Floer* est alors définie à partir d'un complexe de chaînes. Les générateurs sont les points fixes  $x$  de  $f$ . Soient  $x, y$  deux points fixes de  $f$ , considérés comme deux orbites fermées dans  $Y_f$ . On considère les cylindres pseudo-holomorphes dans  $\mathbf{R} \times Y_f$  comme ci-dessus dont les projections dans  $Y_f$  convergent vers  $x$  et  $y$  lorsque  $s$  tend vers  $\pm\infty$  respectivement. Pour un choix générique de  $J$ , l'espace de ces cylindres, quotienté par les translations verticales, est une variété compacte de dimension finie  $\mathcal{M}(x, y)$ . C'est l'analogie de l'espace des trajectoires de gradient d'une fonction de Morse, connectant deux points critiques. On définit alors le bord  $\partial x$  comme la somme  $\sum_y n_{x,y} y$  où  $y$  décrit les points critiques tels que  $\mathcal{M}(x, y)$  se réduit à un nombre fini de cylindres et  $n_{x,y}$  est le nombre de ces cylindres (modulo 2).

Il se trouve que cette homologie de Floer est isomorphe à l'homologie usuelle de  $S$ .

**3.3.7. La sphère.** — Plaçons-nous maintenant dans le cas qui nous intéresse où  $S$  est la sphère  $\mathbf{S}^2$ . Une courbe fermée de  $\Lambda$  borde encore des disques mais ils ne sont plus uniques à homotopie près et l'aire  $\text{aire}(c)$  n'est plus définie qu'à l'aire totale de la sphère près (qu'on suppose égale à 1). On ne dispose plus d'une action définie sur  $\Lambda$  à valeurs réelles, mais à valeurs dans le cercle  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ .

Il est préférable de définir plutôt  $\Lambda$  comme l'espace des courbes  $c: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}^2$  telles que  $c(t+1) = f(c(t))$ . Une variation infinitésimale de  $c$  est une section  $\xi$  de  $c^*TY_f$  telle que  $\xi(t+1) = df(\xi(t))$ . Un élément  $c$  de  $\Lambda$  définit une courbe  $(t, c(t))$  dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{S}^2$ , qui devient une courbe fermée  $\tilde{c}$  dans  $Y_f$ . C'est alors la différentielle de l'action qui est bien définie comme une 1-forme fermée sur  $\Lambda$

$$\alpha_c(\xi) = \int_0^1 \omega \left( \frac{d\tilde{c}}{dt}, \xi(t) \right) dt.$$

Les points critiques de  $\alpha$  ne sont autres que les courbes  $c$  qui ne dépendent pas de  $t$ , c'est-à-dire les points fixes de  $f$ , ou encore les orbites périodiques de  $R$  de période 1.

### 3.4. L'homologie de Floer périodique

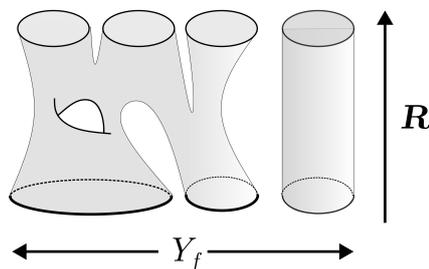
**3.4.1. L'homologie de Floer périodique.** — Nous introduisons maintenant l'homologie de Floer périodique, définie initialement par Hutchings et M. Sullivan (2005), qui dépend d'un entier  $d \geq 1$  et qui se réduit à l'homologie de Floer classique lorsque  $d = 1$ . Au lieu de se limiter aux points fixes de  $f$ , nous allons utiliser des points périodiques, de période  $\leq d$ . On suppose que tous les points périodiques de  $f$  de période  $k \leq d$  sont non dégénérés : 1 n'est pas valeur propre de la différentielle de  $f^k$  au point fixe.

Pour tout entier  $d \geq 1$ , on peut considérer l'hamiltonien  $H^d$  obtenu en composant  $H_t$  avec lui-même  $d$  fois, dont le temps 1 est bien sûr  $f_H^d$ . Les points critiques de l'action associée à  $H^d$  détectent alors les points périodiques de  $f_H$  de période  $d$ .

On définit un complexe de chaînes  $C(f, d)$  qui est un espace vectoriel sur  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ . Un générateur de  $C(f, d)$  est une  $d$ -multi-orbite, c'est-à-dire un ensemble fini de la forme  $\alpha = \{\alpha_i, m_i\}$  où les  $\alpha_i$  sont des entiers  $\geq 1$  et les  $m_i$  sont des orbites périodiques différentes de périodes  $k_i$ , tels que  $\sum_i \alpha_i k_i = d$ . Lorsque  $m_i$  est une orbite hyperbolique (*i.e.* la différentielle de  $f^{k_i}$  au point fixe est diagonalisable) on demande que  $\alpha_i = 1$ .

Si  $\alpha = \{\alpha_i, m_i\}$  et  $\beta = \{\beta_j, n_j\}$  sont deux générateurs, on considère l'ensemble  $H_2(Y_f, \alpha, \beta)$  des classes d'homologie relatives  $Z$  telles que  $\partial Z = \sum_i \alpha_i m_i - \sum_j \beta_j n_j$ . Deux tels  $Z$  diffèrent d'un élément de  $H_2(Y_f; \mathbf{Z}) = H_2(\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ . L'étape suivante consiste à définir un indice  $I(\alpha, \beta, Z) \in \mathbf{Z}$  purement topologique, dont nous ne donnerons pas la définition précise car elle est technique. Changer  $Z$  par une classe de  $H_2(Y_f; \mathbf{Z})$  modifie cet indice par une quantité explicite.

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux générateurs, on considère l'espace des courbes pseudo-holomorphes  $W$  dans  $\mathbf{R} \times Y_f$  qui sont asymptotes à  $\alpha$  quand  $s$  tend vers  $+\infty$  et à  $\beta$  quand  $s$  tend vers  $-\infty$  et telles que  $I(\alpha, \beta, W) = 1$ . Cet espace, modulo les translations en  $s$ , contient un nombre fini d'éléments  $n_{\alpha, \beta}$  pour un  $J$  générique. On pose alors  $\partial\alpha = \sum n_{\alpha, \beta} \beta$ . Il se trouve que  $\partial^2 = 0$  et que l'homologie ainsi définie est indépendante de  $J$  : on la note  $PFH(Y_f, d)$  (pour Periodic Floer Homology). On note  $PFH(Y_f) = \bigoplus_d PFH(Y_f, d)$ .



Lee et Taubes (2012) montrent que cette homologie ne dépend ni de  $J$  ni du difféomorphisme  $f$ .

**3.4.2. L'homologie de Floer périodique modifiée.** — Nous ne sommes pas encore au bout de nos peines. Il nous faut une version modifiée de  $PFH(Y_f)$  qui soit à la fois graduée et munie d'une fonctionnelle d'action.

On commence par fixer une section  $\gamma$  de la fibration  $Y_f \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ . C'est une courbe fermée qui engendre  $H_1(Y_f)$ . Le complexe de chaînes  $\widetilde{PFC}(f, d)$  est engendré par les couples  $(\alpha, Z)$  où  $\alpha$  est une multi-orbite comme plus haut et  $Z$  est une classe d'homologie relative dans  $H_2(Y_f, \alpha, d\gamma)$ . On définit un indice  $I(\alpha, Z)$  par une formule analogue à celle qui définissait  $I(\alpha, \beta, W)$  et... que nous n'avons pas décrite ! Il est alors facile de vérifier que  $I(\alpha, Z) - I(\beta, Z') = I(\alpha, \beta, Z - Z')$ .

Si  $I(\alpha, Z) - I(\beta, Z') = 1$  on considère les courbes pseudo-holomorphes  $W$  dans  $\mathbf{R} \times Y_f$  qui sont asymptotes à  $\alpha$  et  $\beta$  quand  $s$  tend vers  $\pm\infty$  et telles que  $Z + [W] = Z'$ . Comme précédemment, ces courbes, toujours aux translations verticales près, forment un ensemble fini contenant  $n_{[(\alpha, Z), (\beta, Z')]}$  éléments ce qui permet de définir  $\partial(\alpha, Z)$  comme précédemment. Cela définit  $PFH(f, d)$  muni d'une graduation grâce à l'indice.

Ce groupe d'homologie modifié ne dépend pas du choix de  $f$  et on peut le calculer aisément lorsque  $f$  est une rotation d'angle irrationnel de  $\mathbf{S}^2$  qui n'a comme points périodiques que les deux points fixes. On trouve que  $PFH_\star(f, d)$  est nul si  $d$  et  $\star$  ne sont pas de même parité et  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  s'ils sont de même parité.

Par ailleurs, l'intégrale de  $\omega$  sur  $Z$  définit une action sur  $\widetilde{PFC}(f, d)$ , ce qui permet de définir une filtration. Pour tout  $l \in \mathbf{R}$ , on note  $\widetilde{PFC}^l(f, d)$  le sous-espace de  $\widetilde{PFC}(f, d)$  engendré par les  $(\alpha, Z)$  dont l'action est  $\leq l$ . Comme  $\omega$  est positif sur toute courbe pseudo-holomorphe, l'opérateur  $\partial$  préserve  $\widetilde{PFC}^l(f, d)$  et cela définit donc une homologie  $\widetilde{PFH}^l(f, d)$ .

**3.4.3. Les invariants spectraux.** — Nous pouvons enfin évoquer la définition des invariants spectraux. On souhaite définir  $c_d(f)$  comme la borne inférieure des  $l$  tels que l'image injective de  $\widetilde{PFH}_0^l(f, d) \rightarrow \widetilde{PFH}_0(f, d)$  contienne une classe  $\sigma$  donnée.

De nombreuses difficultés techniques subsistent. Par exemple, nous avons choisi arbitrairement une courbe  $\gamma$  qui engendre  $H_1(Y_f)$  ou encore il faut choisir  $\sigma$  etc. Beaucoup de conventions n’ont pas été mentionnées.

Les invariants  $c_d$  ne sont définis pour l’instant que pour les difféomorphismes dont les points périodiques sont non dégénérés. Il faut les prolonger par continuité à tous les difféomorphismes, mais surtout aux homéomorphismes.

Une fois cette extension réalisée, on peut identifier le disque  $\mathbf{D}^2$  à l’hémisphère nord de la sphère  $\mathbf{S}^2$  de façon à plonger  $\text{Difféo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire})$  dans  $\text{Difféo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$ . On obtient finalement

$$c_d: \text{Difféo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire}) \rightarrow \mathbf{R}.$$

et des invariants spectraux analogues dans le cas de la sphère.

**3.4.4.** *Les invariants spectraux se prolongent aux homéomorphismes.* — C’est la preuve de l’extension aux homéomorphismes qui est la plus intéressante. On ne peut en présenter ici qu’une lointaine motivation : la *continuité des codes barres dans l’homologie persistante* (Le Roux, Seyfaddini et Viterbo, 2021).

Reprenons notre modèle jouet d’une fonction  $h: M \rightarrow \mathbf{R}$  continue sur une variété fermée  $M$ . On peut considérer l’homologie  $E_l$  des sous-niveaux  $h^{-1}(] - \infty, l])$  et pour  $l_1 < l_2$  on dispose d’une application linéaire de  $E_{l_1}$  vers  $E_{l_2}$ . En termes pédants, on peut considérer la catégorie  $\vec{\mathbf{R}}$  dont les objets sont les nombres réels  $l$  et pour laquelle il y a un unique morphisme de  $l_1$  vers  $l_2$  si  $l_1 \leq l_2$ . Les homologies des sous-niveaux définissent donc un foncteur de  $\vec{\mathbf{R}}$  vers la catégorie des espaces vectoriels, par exemple sur  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ .

Un exemple très simple est donné par un intervalle  $I \subset \mathbf{R}$  : l’espace vectoriel associé  $E_l$  est  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  si  $l \in I$  et trivial sinon, et les morphismes sont évidents. Il se trouve que, sous une hypothèse très simple de finitude, tout foncteur de  $\vec{\mathbf{R}}$  vers la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie s’exprime de manière unique comme une somme directe de foncteurs associés à des intervalles  $I_k$  (Crawley-Boevey, 2015). Cette famille d’intervalles est le *code barre* associé à la fonction continue  $h$ .

La propriété remarquable (et élémentaire) est que le code barre dépend de manière continue de  $h$ . Le théorème de Cohen-Steiner, Edelsbrunner et Harer (2007) affirme que si  $\sup |h_1 - h_2| \leq C$  les codes barres de  $h_1$  et  $h_2$  sont proches dans le sens précis suivant. On passe d’un code barre à l’autre d’une part en négligeant les intervalles de longueurs  $\leq C$  et d’autre part en faisant glisser les extrémités des autres d’une distance inférieure à  $C$ .

Puisque le code barre détecte les valeurs critiques lorsque  $h$  est lisse et qu’il dépend continument de la fonction  $h$ , on peut penser que les invariants spectraux se prolongent par continuité aux homéomorphismes. Bien sûr, les invariants spectraux  $c_d$  sont définis à partir de valeurs d’une action et d’un sous-niveau dans l’homologie de Floer périodique qui n’est qu’un analogue de notre modèle jouet, et la preuve complète demande beaucoup de pages.

## 4. NOUVEAUX RÉSULTATS

On assiste depuis peu à un florilège de prépublications annonçant des résultats complémentaires. Même s'il s'agit encore d'homologie de Floer, on en utilise d'autres versions. Au lieu d'explicitier un sous-groupe distingué on cherche plutôt à construire un homomorphisme surjectif à valeurs dans un groupe abélien.

### 4.1. Links lagrangiens

Dans la situation la plus simple de la sphère, on considère des *links lagrangiens* : il s'agit simplement d'une collection  $L = \{L_i\}_{1 \leq i \leq d}$  de courbes lisses, fermées, plongées et disjointes, dans la sphère, telle que toutes les composantes connexes du complémentaire de  $\cup_i L_i$  ont la même aire. L'exemple le plus simple  $L_d$  consiste à choisir les bords de  $d$  disques plongés et disjoints dans la sphère, chacun d'aire  $1/(d+1)$ . L'idée d'utiliser ces links apparaissait déjà dans (Polterovich et Shelukhin, 2021) et (Mak et Smith, 2021).

Rappelons que la *puissance symétrique*  $Sym^d(Q)$  d'un espace  $Q$  est le quotient de  $Q^d$  par l'action du groupe des permutations des coordonnées. Lorsque  $Q$  est une surface de Riemann,  $Sym^d(Q)$  est une variété non singulière de dimension  $2d$ . Par exemple,  $Sym^d(\mathbf{CP}^1)$  s'identifie naturellement à l'espace projectif complexe  $\mathbf{CP}^d$ . En effet, étant donné  $d$  droites dans  $\mathbf{C}^2$ , l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré  $d$  qui s'annulent précisément sur ces droites (avec multiplicité) est une droite dans un espace de dimension  $d+1$ .

### 4.2. De nouveaux invariants spectraux

Si  $L$  est un link lagrangien, le produit  $\prod_i L_i$  se plonge dans la puissance symétrique  $d$ -ème de la sphère, qui est la variété symplectique  $\mathbf{CP}^d$ . Un hamiltonien  $H_t$  sur la sphère définit un hamiltonien dans les puissances symétriques, en posant  $\bar{H}_t(z_1, \dots, z_d) = \sum_i H_t(z_i)$ . On dispose donc d'un hamiltonien et d'un tore lagrangien dans  $\mathbf{CP}^d$ . On peut alors utiliser l'*homologie de Floer lagrangienne* et définir des invariants spectraux  $\gamma_d: \text{Difféo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire}) \rightarrow \mathbf{R}$  qui ont des propriétés analogues aux invariants précédents (même si le lien entre ces deux constructions n'est pas clair).

### 4.3. Les autres surfaces

Nous avons déjà signalé que Fathi a construit un homomorphisme surjectif appelé flux

$$\phi: \text{Homéo}_0(M, \text{vol}) \rightarrow H_1(M, \mathbf{R}) / \Phi(\pi_1(\text{Homéo}(M, \text{vol})))$$

et qu'il a montré qu'en dimension  $\geq 3$  le noyau est simple. Nous savons maintenant que ce n'est pas le cas pour la sphère  $\mathbf{S}^2$ . Le cas de toutes les autres surfaces est traité dans Cristofaro-Gardiner, Humilière, Mak, Seyfaddini et Smith (2022a) : *le noyau du flux n'est jamais simple pour une surface compacte*. Cela utilise aussi des links lagrangiens sur les surfaces.

#### 4.4. Autres sous-groupes distingués

Le sous-groupe distingué  $\text{Haméo}(\mathbf{S}^2)$  introduit dans Müller et Oh (2007) est contenu dans le groupe  $\text{FHoméo}(\mathbf{S}^2)$  des homéomorphismes d'énergie finie. Buhovsky (2022) montre que cette inclusion est stricte.

Nous avons vu que la perfection entraîne souvent la simplicité. Par le même genre d'arguments, on montre que tout sous-groupe distingué non trivial de  $\text{Homéo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  contient le sous-groupe des commutateurs. Autrement dit, tout quotient non trivial de  $\text{Homéo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  est abélien. La nature du quotient (abélien) maximal est encore mystérieuse. Puisque le twist d'énergie infinie que nous avons décrit est évidemment contenu dans un groupe à un paramètre dont tous les éléments (non triviaux) sont d'énergie infinie, donc hors de  $\text{FHoméo}(\mathbf{S}^2)$ , ce quotient contient des copies de  $\mathbf{R}$ . Une prépublication récente de Polterovich et Shelukhin (2021) construit explicitement d'énormes groupes abéliens quotients de  $\text{Homéo}(\mathbf{S}^2)$ .

Dans le même ordre d'idées, on montre que le groupe des commutateurs de  $\text{Homéo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  est simple.

Comment ces sous-groupes distingués se comparent-ils avec ceux définis par les normes de fragmentation, décrits plus haut (Le Roux, 2010) ?

On peut identifier le disque ouvert muni d'une forme d'aire de masse finie au complémentaire du pôle sud dans la sphère. De cette façon, tout difféomorphisme du disque ouvert préservant l'aire peut être vu comme un homéomorphisme de la sphère. On peut en déduire le fait que nous avons déjà signalé : le groupe des difféomorphismes du disque ouvert qui respectent l'aire n'est pas parfait, répondant ainsi à une question de McDuff (1981).

Puisque nous savons que  $\text{Difféo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  est parfait, que tout sous-groupe distingué non trivial de  $\text{Homéo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  contient les commutateurs, et que les difféomorphismes respectant l'aire sont denses dans les homéomorphismes respectant l'aire, on conclut que  $\text{Homéo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  est topologiquement simple.

**4.4.1. Un groupe de Lie.** — Le fait que le groupe topologique  $\text{Homéo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  ne soit pas simple alors que son groupe des commutateurs est dense et simple peut paraître surprenant. Ce phénomène est cependant possible pour un groupe de Lie de dimension finie. Soit  $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbf{R})$  le revêtement universel de  $\text{SL}(2, \mathbf{R})$ , dont le centre  $Z$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}$ . Dans le produit  $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbf{R}) \times \text{SO}(2)$ , considérons le sous-groupe  $\Delta$ , discret, cyclique et central, engendré par  $(z, r)$  où  $z$  est un générateur de  $Z$  et  $r$  est une rotation d'angle irrationnel (i.e. d'ordre infini dans  $\text{SO}(2)$ ). Le quotient  $G = \widetilde{\text{SL}}(2, \mathbf{R}) \times \text{SO}(2) / \Delta$  est un groupe de Lie qui a (presque) les propriétés requises. Son groupe dérivé  $[G, G]$  est l'image de  $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbf{R}) \times \{id\}$  dans  $G$ . Ce groupe  $[G, G]$  est dense dans  $G$  et le quotient  $G/[G, G]$  est isomorphe au quotient de  $\text{SO}(2)$  par une rotation irrationnelle. D'autre part  $[G, G]$  est un groupe de Lie simple (comme groupe de Lie : son seul sous-groupe distingué non trivial est son centre discret).

**4.4.2. Des quasi-plats.** — La géométrie de  $\text{Difféo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  équipé de la métrique de Hofer est également mystérieuse mais des progrès considérables ont été obtenus récemment.

Rappelons qu’une application  $i: (E, d_1) \rightarrow (E_2, d_2)$  entre deux espaces métriques est un *plongement quasi-isométrique* s’il existe des constantes  $a \geq 1, b \geq 0$  telles que

$$a^{-1}d_1(x, y) - b \leq d_2(i(x), i(y)) \leq ad_1(x, y) + b.$$

Polterovich (1998) démontra d’abord que le diamètre de la métrique de Hofer dans  $\text{Difféo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  est infini en construisant un plongement quasi-isométrique de  $\mathbf{R}$ . Puis Cristofaro-Gardiner, Humilière et Seyfaddini (2021) construisirent des plongements quasi-isométriques de  $\mathbf{R}^k$  pour des valeurs de  $k$  arbitrairement grandes. Le cas des surfaces de genre  $\geq 2$  avait été traité auparavant par Py (2008). Enfin Polterovich et Shelukhin (2021) montrèrent que *tout espace métrique séparable se plonge quasi-isométriquement dans  $\text{Difféo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$  !*

## 4.5. L’invariant de Calabi

**4.5.1. Des quasi-morphismes.** — Un plongement d’un disque dans la sphère permet de considérer  $\text{Homéo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire})$  comme un sous-groupe de  $\text{Homéo}_0(\mathbf{S}^2, \text{aire})$ . Cristofaro-Gardiner, Humilière et Seyfaddini (2021) montrent comment utiliser les invariants  $\bar{\gamma}_d$  pour définir des quasi-morphismes homogènes

$$\bar{\gamma}_d: \text{Homéo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire}) \rightarrow \mathbf{R},$$

dont les défauts tendent vers 0 quand  $d$  tend vers l’infini. Précisément

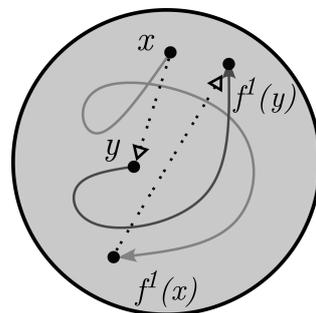
$$|\bar{\gamma}_d(f_1 f_2) - \bar{\gamma}_d(f_1) - \bar{\gamma}_d(f_2)| \leq \frac{2}{d} \quad \text{pour tout } f_1, f_2 \in \text{Homéo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire})$$

$$\bar{\gamma}_d(f^k) = k\bar{\gamma}_d(f) \quad \text{pour tout } f \in \text{Homéo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire}).$$

Ils montrent par ailleurs que *si  $f$  est différentiable, i.e. dans  $\text{Difféo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire})$ , la suite  $\bar{\gamma}_d(f)$  tend vers l’invariant Calabi  $\text{Cal}(f)$  quand  $d$  tend vers l’infini*. Cette dernière propriété est appelée « loi de Weyl » (pour une raison un peu confuse).

**4.5.2. Rotation de l’argument.** — L’invariant de Calabi est défini *a priori* pour un difféomorphisme mais pas pour un homéomorphisme. Fathi (1980a) demande s’il est possible d’en prolonger la définition aux homéomorphismes. Dans ce but, Fathi (1980b) (non publié) a proposé une définition plus topologique (voir aussi Ghys (2007)). Comme motivation, on peut citer le fait que Gambaudo et Ghys (1997) montrent que deux difféomorphismes conjugués par un homéomorphisme ont le même invariant de Calabi.

Le groupe  $\text{Homéo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire})$  est contractile. Choisissons une isotopie  $f^t$  connectant  $f^0 = id$  et  $f^1 = f$ . Si  $x_1, x_2$  sont deux points distincts du disque, l'argument du vecteur  $f^t(x_1) - f^t(x_2) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  tourne d'un certain angle  $\text{Angle}(f; x_1, x_2)$  quand  $t$  varie de 0 à 1 (mesuré par exemple en tours). On s'assure facilement que cette définition est indépendante de l'isotopie choisie et se généralise aux homéomorphismes. La fonction  $\text{Angle}(f; x_1, x_2)$  est définie hors de la diagonale dans  $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^2$  mais elle est bornée si  $f$  est différentiable. Il se trouve que  $\text{Cal}(f)$  est égal à (un multiple constant de) l'intégrale (double) de  $\text{Angle}(f; x_1, x_2)$  sur  $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^2$ .



Pour prolonger l'invariant de Calabi aux homéomorphismes, il suffirait de construire une forme linéaire d'« intégration » définie sur les fonctions continues définies hors de la diagonale dans  $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^2$ , et invariante par l'action diagonale de  $\text{Homéo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire})$ . Une telle forme existe-t-elle? Dans l'esprit des moyennes à la Hahn-Banach dans les groupes moyennables?

**4.5.3. La question de Fathi, résolue après quarante ans.** — Cristofaro-Gardiner, Humilière, Mak, Seyfaddini et Smith (2022a) prolongent  $\text{Cal}$  au groupe des haméomorphismes. Ce n'est pas facile, mais finalement pas très surprenant puisque les haméomorphismes sont définis par des hamiltoniens continus, qu'il « suffit » alors d'intégrer.

Ils démontrent ensuite que *l'invariant de Calabi se prolonge, d'une infinité de manières, à tous les homéomorphismes*, répondant ainsi positivement à la question posée par Fathi il y a plus de quarante ans (Cristofaro-Gardiner, Humilière, Mak, Seyfaddini et Smith, 2022b).

Considérons l'espace vectoriel  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  des suites  $(u_k)_{k \geq 0}$  de nombres réels et soit  $\mathcal{R}$  son quotient par le sous-espace des suites qui tendent vers 0. L'application

$$f \in \text{Homéo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire}) \mapsto (\bar{\gamma}_1(f), \bar{\gamma}_2(f), \dots) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$$

définit alors un homomorphisme  $f \in \text{Homéo}(\mathbf{D}^2, \partial\mathbf{D}^2, \text{aire})$  vers  $\mathcal{R}$  (qui s'avère surjectif).

Le lemme de Zorn permet alors d'affirmer l'existence de nombreux homomorphismes  $\text{lim}: \mathcal{R}$  vers  $\mathbf{R}$  qui valent  $l$  sur la suite constante  $u_k = l$ . Les composés  $\text{lim} \circ \mathcal{C}$  sont tous des prolongements de  $\text{Cal}$  grâce à la loi de Weyl. Notons que  $\mathcal{R}$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel, isomorphe à  $\mathbf{R}$ , *comme groupe abélien abstrait*.

Dans certains modèles de la théorie des ensembles, l'axiome du choix est faux et tout homomorphisme entre groupes polonais est nécessairement continu (Rosendal, 2019). Comme nous savons que  $\text{Cal}$  n'a pas d'extension continue, on comprend qu'il est illusoire de donner un sens « concret » à ces prolongements.

## 5. QUATRE PROBLÈMES

### 5.1. Différentiabilité

Il y a bien sûr beaucoup d'intermédiaires entre les homéomorphismes et les difféomorphismes de classe  $C^\infty$ . La composante neutre du groupe des difféomorphismes de classe  $C^r$  ( $0 \leq r \leq \infty$ ) d'une variété (compacte sans bord pour simplifier) de dimension  $n$  est un groupe simple si  $r \neq n + 1$  (Mather, 1975). Le cas  $r = n + 1$  est totalement mystérieux, même pour  $n = 1$ . Dans un cas analogue, Mather (1985) montre un exemple surprenant : le groupe des difféomorphismes du cercle qui respectent l'orientation et dont le logarithme de la dérivée est à variation bornée n'est pas un groupe parfait. La situation n'est que partiellement comprise pour les difféomorphismes analytiques réels : Tsuboi (2009) montre que la composante neutre est simple dans un certain nombre d'exemples, dont les sphères, mais le cas général reste ouvert. *Que dire du groupe des difféomorphismes de la sphère  $\mathbf{S}^2$  de classe  $C^r$  qui respectent l'aire ?* Un autre cas intéressant est celui des homéomorphismes affines par morceaux du plan, à support compact, qui respectent l'aire. Greenberg (1998) établit un lien avec la  $K$ -théorie algébrique.

### 5.2. Les variétés topologiques symplectiques

On peut définir les *variétés topologiques symplectiques* en demandant que les changements de cartes soient des homéomorphismes symplectiques, limites uniformes de difféomorphismes symplectiques. Sont-elles significativement différentes des variétés symplectiques usuelles ? La caractéristique la plus naïve d'une variété symplectique compacte de dimension  $2n$  est de posséder une classe de cohomologie de degré 2 dont la puissance  $n$ -ème est non nulle. Est-ce encore vrai dans le cas topologique ? *La sphère de dimension 4 est-elle une variété topologique symplectique ?* Cette question fascinante a été posée par Hofer dans les années 80.

Des questions tout à fait analogues se posent dans le cadre des *homéomorphismes de contact* pour lesquels on ne connaît que peu de choses.

### 5.3. La topologie du classifiant

Dans les années 70, l'étude des groupes de difféomorphismes était avant tout motivée par la théorie des feuilletages. Thurston avait en effet montré un lien étroit entre la topologie du *classifiant de Haefliger des feuilletages* de codimension  $n$  et l'homologie du groupe des difféomorphismes de  $\mathbf{R}^n$ , considéré comme groupe discret : voir par exemple (Sergeraert, 1979) ou (Lawson, 1977). La perfection d'un groupe est équivalente à l'annulation de son premier groupe d'homologie. Les groupes d'homologie d'ordre supérieur ont été largement étudiés, en particulier dans leurs liens avec la cohomologie de Gelfand-Fuchs, mais il reste beaucoup de questions ouvertes (et difficiles). Dans le cadre topologique, Mather (1971) a montré par exemple que le groupe des homéomorphismes de  $\mathbf{R}^n$  à support compact est acyclique et cela entraîne que le classifiant correspondant

est contractile. *Que dire du classifiant du pseudogroupe des homéomorphismes symplectiques ? ou simplement qui préservent le volume ?* Dans le contexte symplectique différentiable, on dispose de quelques informations sur le classifiant (voir par exemple McDuff, 1983 ; Kotschick et Morita, 2007).

#### 5.4. L'hélicité

L'hélicité est un invariant numérique d'un champ de vecteurs non singulier sur  $\mathbf{S}^3$  qui préserve le volume, introduit par Arnold sous le nom d'*invariant de Hopf* (Arnold, 1986 ; Arnold et Khesin, 1998). Il mesure le nombre d'enlacement asymptotique moyen de deux trajectoires. Gambaudo et Ghys (1997) ont montré que dans de nombreuses situations, l'hélicité se ramène à l'invariant de Calabi de certaines applications de premier retour sur certaines sections transversales. Maintenant que l'invariant de Calabi a été étendu aux homéomorphismes, on peut espérer répondre positivement à la question suivante, question qui préoccupe l'auteur de ce texte depuis bien trop longtemps. *Peut-on définir naturellement une hélicité (peut-être à valeurs dans  $\mathcal{R}$ ) pour un flot topologique sans points fixes, qui préserve le volume sur  $\mathbf{S}^3$ , de façon à ce que cette définition prolonge celle d'Arnold et qu'elle soit invariante par conjugaison topologique (préservant le volume) ?*

## RÉFÉRENCES

- James Waddel Alexander (1923). « On the deformation of an n-cell », *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **9** (9), p. 406-407.
- Richard D. Anderson (1958). « The algebraic simplicity of certain groups of homeomorphisms », *Amer. J. Math.* **80**, p. 955-963.
- Vladimir Arnold (1986). « The asymptotic Hopf invariant and its applications », *Selecta Math. Soviet.* **5** (4). Selected translations, p. 327-345.
- Vladimir Arnold et Boris. Khesin (1998). *Topological methods in hydrodynamics*. T. 125. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, p. xvi+374.
- Michèle Audin et Mihai Damian (2010). *Théorie de Morse et homologie de Floer*. Savoirs Actuels. EDP Sciences, Les Ulis ; CNRS Éditions, Paris, p. xii+548.
- Augustin Banyaga (1978). « Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique », *Comment. Math. Helv.* **53** (2), p. 174-227.
- (1997). *The structure of classical diffeomorphism groups*. T. 400. Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, p. xii+197.
- Morton Brown (1960). « A proof of the generalized Schoenflies theorem », *Bull. Amer. Math. Soc.* **66**, p. 74-76.
- (1962). « A mapping theorem for untriangulated manifolds ». In : *Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961)*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., p. 92-94.
- Lev Buhovsky (2022). *On two remarkable groups of area-preserving homeomorphisms*. eprint : <https://arxiv.org/abs/2204.08020>.

- Eugenio Calabi (1970). « On the group of automorphisms of a symplectic manifold », in : *Problems in analysis (Sympos. in honor of Salomon Bochner, Princeton Univ., Princeton, N.J., 1969)*. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., p. 1-26.
- David Cohen-Steiner, Herbert Edelsbrunner et John Harer (2007). « Stability of persistence diagrams », *Discrete Comput. Geom.* **37** (1), p. 103-120.
- William Crawley-Boevey (2015). « Decomposition of pointwise finite-dimensional persistence modules », *J. Algebra Appl.* **14** (5), p. 1550066, 8.
- Daniel Cristofaro-Gardiner, Vincent Humilière, Cheuk Yu Mak, Sobhan Seyfaddini et Ivan Smith (2022a). « Quantitative Heegaard Floer cohomology and the Calabi invariant », *Forum Math. Pi* **10**, Paper No. e27, 59.
- (2022b). *Subleading asymptotics of link spectral invariants and homeomorphism groups of surfaces*. eprint : <https://arxiv.org/abs/2206.10749>.
- Daniel Cristofaro-Gardiner, Vincent Humilière et Sobhan Seyfaddini (2020). *Proof of the simplicity conjecture*. eprint : <https://arxiv.org/abs/2001.01792v2>.
- (2021). *PFH spectral invariants on the two-sphere and the large scale geometry of Hofer's metric*. eprint : <https://arxiv.org/abs/2102.04404>.
- Michael Entov, Leonid Polterovich et Pierre Py (2012). « On continuity of quasimorphisms for symplectic maps », in : *Perspectives in analysis, geometry, and topology*. T. 296. Progr. Math. With an appendix by Michael Khanevsky. Birkhäuser/Springer, New York, p. 169-197.
- David B. A. Epstein (1970). « The simplicity of certain groups of homeomorphisms », *Compositio Math.* **22**, p. 165-173.
- Albert Fathi (1980a). « Structure of the group of homeomorphisms preserving a good measure on a compact manifold », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **13** (1), p. 45-93.
- (1980b). « Transformations et homéomorphismes préservant la mesure, Systèmes dynamiques minimaux ». Thèse, Orsay.
- Gordon M. Fisher (1960). « On the group of all homeomorphisms of a manifold », *Trans. Amer. Math. Soc.* **97**, p. 193-212.
- Andreas Floer (1989). « Symplectic fixed points and holomorphic spheres », *Comm. Math. Phys.* **120** (4), p. 575-611.
- Jean-Marc Gambaudo et Étienne Ghys (1997). « Enlacements asymptotiques », *Topology* **36** (6), p. 1355-1379.
- Étienne Ghys (2007). « Knots and dynamics », in : *International Congress of Mathematicians. Vol. I*. Eur. Math. Soc., Zürich, p. 247-277.
- Peter Greenberg (1998). « Area preserving pl homeomorphisms and relations in  $K_2$  », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **48** (1), p. 133-148.
- Michael Gromov (1987). « Soft and hard symplectic geometry ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 81-98.

- Michael-Robert Herman (1971). « Simplicité du groupe des difféomorphismes de classe  $C^\infty$ , isotopes à l'identité, du tore de dimension  $n$  », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **273**, p. 232-234.
- (1973). « Sur le groupe des difféomorphismes du tore », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **23** (2), p. 75-86.
- Helmut Hofer (1990). « On the topological properties of symplectic maps », *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **115** (1-2), p. 25-38.
- Michael Hutchings et Michael Sullivan (2005). « The periodic Floer homology of a Dehn twist », *Algebr. Geom. Topol.* **5**, p. 301-354.
- Robion C. Kirby (1969). « Stable homeomorphisms and the annulus conjecture », *Ann. of Math. (2)* **89**, p. 575-582.
- Hellmuth Kneser (1926). « Die Deformationssätze der einfach zusammenhängenden Flächen », *Math. Z.* **25** (1), p. 362-372.
- Dieter Kotschick et Shigeyuki Morita (2007). « Characteristic classes of foliated surface bundles with area-preserving holonomy », *J. Differential Geom.* **75** (2), p. 273-302.
- François Lalonde et Dusa McDuff (1995). « Hofer's  $L^\infty$ -geometry : energy and stability of Hamiltonian flows. I, II », *Invent. Math.* **122** (1), p. 1-33, 35-69.
- François Laudenbach (2004). « Symplectic geometry and Floer homology », in : *Symplectic geometry and Floer homology. A survey of the Floer homology for manifolds with contact type boundary or symplectic homology*. T. 7. Ensaïos Mat. Soc. Brasil. Mat., Rio de Janeiro, p. 1-50.
- Herbert Blaine Lawson Jr. (1977). *The quantitative theory of foliations*. Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 27. Expository lectures from the CBMS Regional Conference held at Washington University, St. Louis, Mo., January 6–10, 1975. American Mathematical Society, Providence, R.I., p. v+65.
- Frédéric Le Roux (2010). « Simplicity of  $\text{Homeo}(\mathbb{D}^2, \partial\mathbb{D}^2, \text{Area})$  and fragmentation of symplectic diffeomorphisms », *J. Symplectic Geom.* **8** (1), p. 73-93.
- Frédéric Le Roux, Sobhan Seyfaddini et Claude Viterbo (2021). « Barcodes and area-preserving homeomorphisms », *Geom. Topol.* **25** (6), p. 2713-2825.
- Yi-Jen Lee et Clifford Henry Taubes (2012). « Periodic Floer homology and Seiberg-Witten-Floer cohomology », *J. Symplectic Geom.* **10** (1), p. 81-164.
- Cheuk Yu Mak et Ivan Smith (2021). « Non-displaceable Lagrangian links in four-manifolds », *Geom. Funct. Anal.* **31** (2), p. 438-481.
- Kathryn Mann (2016). « A short proof that  $\text{Diff}_c(M)$  is perfect », *New York J. Math.* **22**, p. 49-55.
- (2021). « The structure of homeomorphism and diffeomorphism groups », *Notices Amer. Math. Soc.* **68** (4), p. 482-492.
- John N. Mather (1971). « The vanishing of the homology of certain groups of homeomorphisms », *Topology* **10**, p. 297-298.

- (1975). « Commutators of diffeomorphisms. II », *Comment. Math. Helv.* **50**, p. 33-40.
- (1985). « Commutators of diffeomorphisms. III. A group which is not perfect », *Comment. Math. Helv.* **60** (1), p. 122-124.
- Dusa McDuff (1980). « On the group of volume-preserving diffeomorphisms of  $\mathbf{R}^n$  », *Trans. Amer. Math. Soc.* **261** (1), p. 103-113.
- (1981). « On groups of volume-preserving diffeomorphisms and foliations with transverse volume form », *Proc. London Math. Soc. (3)* **43** (2), p. 295-320.
- (1983). « Local homology of groups of volume-preserving diffeomorphisms. III », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **16** (4), 529-540 (1984).
- Dusa McDuff et Dietmar Salamon (2017). *Introduction to symplectic topology*. 3rd edition. Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, Oxford, p. xi+623.
- Jürgen Moser (1965). « On the volume elements on a manifold », *Trans. Amer. Math. Soc.* **120**, p. 286-294.
- Stefan Müller et Yong-Geun Oh (2007). « The group of Hamiltonian homeomorphisms and  $C^0$ -symplectic topology », *J. Symplectic Geom.* **5** (2), p. 167-219.
- Yong-Geun Oh (2005). « Construction of spectral invariants of Hamiltonian paths on closed symplectic manifolds », in : *The breadth of symplectic and Poisson geometry*. T. 232. Progr. Math. Birkhäuser Boston, Boston, MA, p. 525-570.
- John C. Oxtoby et Stanisław Ulam (1941). « Measure-preserving homeomorphisms and metrical transitivity », *Ann. of Math. (2)* **42**, p. 874-920.
- Leonid Polterovich (1998). « Hofer's diameter and Lagrangian intersections », *Internat. Math. Res. Notices* (4), p. 217-223.
- (2001). *The geometry of the group of symplectic diffeomorphisms*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, p. xii+132.
- Leonid Polterovich et Egor Shelukhin (2021). *Lagrangian configurations and Hamiltonian maps*. eprint : <https://arxiv.org/abs/2102.06118>.
- Mikhail Postnikov (1985). *Leçons de géométrie*. Traduit du Russe par Djilali Embarek. Groupes et algèbres de Lie. "Mir", Moscou, p. 375.
- Pierre Py (2008). « Quelques plats pour la métrique de Hofer », *J. Reine Angew. Math.* **620**, p. 185-193.
- Frank Quinn (1982). « Ends of maps. III. Dimensions 4 and 5 », *J. Differential Geometry* **17** (3), p. 503-521.
- Christian Rosendal (2019). « Continuity of universally measurable homomorphisms », *Forum Math. Pi* **7**, e5, 20.
- Guy Rousseau (1978). « Diffeomorphismes d'une variété symplectique non compacte », *Comment. Math. Helv.* **53** (4), p. 622-633.
- Otto Schreier et Stanisław Ulam (1934). « Eine Bemerkung über die Gruppe der topologischen Abbildungen der Kreislinie auf sich selbst », *Studia Math* **5**, p. 155-159.

- Matthias Schwarz (2000). « On the action spectrum for closed symplectically aspherical manifolds », *Pacific J. Math.* **193** (2), p. 419-461.
- Francis Sergeraert (1977). « Feuilletages et difféomorphismes infiniment tangents à l'identité », *Invent. Math.* **39** (3), p. 253-275.
- (1979). «  $B\Gamma$  [d'après John N. Mather et William Thurston] », in : *Séminaire Bourbaki, 30e année (1977/78)*. T. 710. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, Exp. No. 524, p. 300-315.
- Stephen Smale (1959). « Diffeomorphisms of the 2-sphere », *Proc. Amer. Math. Soc.* **10**, p. 621-626.
- Dennis Sullivan (2011). « Algebra, topology and algebraic topology of 3D ideal fluids », in : *Low-dimensional and symplectic topology*. T. 82. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 1-7.
- William Thurston (1973). « On the structure of volume preserving diffeomorphisms ». Non publié.
- (1974). « Foliations and groups of diffeomorphisms », *Bull. Amer. Math. Soc.* **80**, p. 304-307.
- Takashi Tsuboi (2009). « On the group of real analytic diffeomorphisms », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **42** (4), p. 601-651.
- Stanisław Ulam (1935). *The Scottish Book*. 2nd edition. Mathematics from the Scottish Café with selected problems from the new Scottish Book, Including selected papers presented at the Scottish Book Conference held at North Texas University, Denton, TX, May 1979. Birkhäuser/Springer, Cham, p. xvii+322.
- Stanisław Ulam et John von Neumann (1947). « On the group of homeomorphisms of the surface of a sphere (abstract) », *Bull. AMS* **53**, p. 506.
- Claude Viterbo (1992). « Symplectic topology as the geometry of generating functions », *Math. Ann.* **292** (4), p. 685-710.

Étienne Ghys

UMPA, ENS Lyon,  
46 Allée d'Italie, 69364 Lyon

et

Académie des sciences,  
23 quai de Conti, 75006 Paris

*E-mail* : `etienne.ghys@ens-lyon.fr`