Séminaire BOURBAKI Mars 2024
76e année, 2023–2024, n° 1221

COMPLÉTION PROFINIE ET GÉOMÉTRIE DES GROUPES [d'après Martin Bridson, Alan Reid et alii]

par **Bertrand Rémy**

> (...) et je me rendais compte alors que la mer elle aussi est veinée par les rides des courants et que, quand, enfant, je regardais les nuages et la route des étoiles, sans m'en douter, j'avais déjà commencé mes voyages.
>
> Extrait de : Cesare Pavese, *La lune et les feux.*

Introduction

Encore des mots, toujours des mots, les mêmes mots : groupe, action, isomorphisme, relation d'équivalence... Dans ce texte, il est en effet question de théorie des groupes. Plus précisément on va considérer en premier lieu des groupes infinis de *type fini*, c'est-à-dire engendrés par une partie finie. L'objectif lointain, sans doute optimiste, est d'obtenir une classification des groupes de type fini, du moins un guide dans leur zoologie. Or, on sait que la relation d'isomorphie [(1)] est trop fine pour admettre un quotient associé raisonnable du point de vue de la théorie descriptive des ensembles (Thomas et Velickovic, 1999). Si l'on reste optimiste, cela suggère de multiplier les relations d'équivalence pour espérer s'y retrouver. Dans les années 90, Gromov a suggéré des relations d'équivalence plus grossières que la relation d'isomorphie, mais en lien avec des propriétés géométriques ou mesurables des espaces sur lesquels ces groupes agissent de façon convenable. Ces approches (*cf.* 2.1) ont conduit à des progrès spectaculaires en théorie des groupes, nécessitant des techniques issues d'autres domaines des mathématiques, notamment analytiques, souvent en les enrichissant en retour (*cf.* Haïssinsky, 2009 et Houdayer, 2012).

On s'intéresse ici à la relation d'équivalence qui met dans la même classe deux groupes de type fini si, et seulement si, ils possèdent la même collection de quotients finis : c'est la *relation d'équivalence profinie*. Cette relation fait intervenir elle aussi des actions, à savoir les actions du groupe considéré sur les ensembles finis. Cela fait bien entendu moins de structure ; les habitué · e · s des théories géométrique et mesurable des groupes

1. La terminologie est vintage, voire délicieusement désuète : c'est bien entendu la relation qui met dans la même classe des groupes isomorphes l'un à l'autre.

doivent en quelque sorte repartir de zéro et se (re)faire des intuitions. Un des objectifs de ce rapport est cependant de mettre en lumière le fait que la géométrie revient très vite en force dans les arguments liés aux problèmes d'équivalence profinie, notamment par la topologie des variétés différentielles de dimension 3. Comme attendu, le lien est assuré par la notion de groupe fondamental et on fait un plein usage des progrès récents liés à la géométrisation des 3-variétés. Cet usage est le premier sens qu'on peut donner au titre de ce texte.

Revenons à l'équivalence profinie des groupes de type fini. La construction systématiquement utilisée dans ce contexte est celle de complétion profinie (1.3). Étant donné un groupe Γ, le *complété profini* de Γ est la donnée d'un homomorphisme de groupes $\iota\colon \Gamma \to \widehat{\Gamma}$ d'image dense dans un groupe $\widehat{\Gamma}$ qui est compact, totalement discontinu et dont la collection de quotients finis est celle de Γ. Une propriété universelle formalise cela, elle permet de définir un foncteur $\widehat{\cdot}$ de la catégorie des groupes de type fini vers celles des *groupes profinis* (c'est-à-dire des groupes compacts et totalement discontinus). Pour cette introduction, on laisse la lectrice ou le lecteur imaginer ce qu'est cette propriété universelle une fois qu'on a dit que $\widehat{\Gamma}$ est la limite projective des quotients finis de Γ. La reformulation de l'équivalence profinie entre deux groupes de type fini Γ et Λ est alors la suivante : il existe un isomorphisme $\widehat{\Gamma} \simeq \widehat{\Lambda}$ entre complétés profinis (sans qu'on suppose l'existence *a priori* d'une flèche entre Γ et Λ).

Quelles sont les difficultés liées à l'étude de l'équivalence profinie ? La première est qu'il faut supposer que les groupes de type fini étudiés ont suffisamment de quotients finis : cela impose de se restreindre à la classe des groupes *résiduellement finis*, c'est-à-dire des groupes dans lesquels l'intersection des sous-groupes d'indice fini est triviale. Cela assure que la flèche de complétion ι est injective. La seconde difficulté est qu'on dispose de très peu d'invariants profinis. Les invariants homologiques en degré 1 se comportent favorablement en général. On voit par exemple que si Γ et Λ sont profiniment équivalents, alors leurs abélianisés $\mathrm{H}_1(\Gamma, \mathbf{Z}) = \frac{\Gamma}{[\Gamma,\Gamma]}$ et $\mathrm{H}_1(\Lambda, \mathbf{Z}) = \frac{\Lambda}{[\Lambda,\Lambda]}$ sont isomorphes. Cependant, la plupart des propriétés de théorie géométrique ou mesurable des groupes ont des comportements incompatibles avec l'équivalence profinie (*cf.* 2.3 pour un tableau de la situation, désolante ou excitante suivant les goûts).

Dès lors, quelles questions se poser en matière d'équivalence profinie ? Le problème le plus naturel est celui de la rigidité profinie. On dit qu'un groupe de type fini Γ est *profiniment rigide au sens absolu* si tout groupe qui lui est profiniment équivalent lui est en fait isomorphe, et pour des raisons expliquées ci-dessous on se restreindra aux groupes résiduellement finis. Autrement dit, dès qu'un groupe de type fini et résiduellement fini Λ est tel que $\widehat{\Gamma} \simeq \widehat{\Lambda}$, alors il existe un isomorphisme $\Gamma \simeq \Lambda$. Par exemple, le groupe $\mathbf{Z}^r$ est profiniment rigide pour tout entier $r \geqslant 1$; c'est vrai aussi pour certains groupes nilpotents (mais pas tous). Il existe des groupes virtuellement cycliques non isomorphes mais profiniment équivalents ; précisément, ces groupes (non profiniment rigides, donc) peuvent être choisis comme des produits semi-directs de $\mathbf{Z}$ par $\mathbf{Z}/25\mathbf{Z}$ (Baumslag, 1974).

Historiquement, une paire de groupes fondamentaux de variété algébriques profinimement équivalents mais non isomorphes est exhibée dans Serre, 1964, où le complété profini commun est le groupe fondamental (au sens des géomètres algébristes) de la variété considérée.

Passons maintenant en revue quelques résultats de rigidité profinie. Le phénomène de rigidité dont on vient de parler est le plus fort pour un groupe de type fini résiduellement fini donné Γ ; c'est celui où les seules hypothèses faites sur le groupe Λ comparé à Γ sont qu'il est lui aussi de type fini et résiduellement fini. On parlera de *rigidité profinie relative* quand on imposera en outre au groupe Λ d'appartenir à une classe plus restreinte, par exemple à la classe des groupes de présentation finie, ou encore à la classe des groupes fondamentaux d'un certain type de variété différentiable (c'est un autre sens qu'on peut donner au titre de ce texte). Les contributions majeures en matière de rigidité profinie absolue sont essentiellement dues à Martin Bridson, Alan Reid et leurs collaborateurs. Voici par exemple le principal résultat de Bridson, McReynolds, Reid et Spitler (2020) (*cf.* 4.1 et 4.2 pour une esquisse de démonstration).

Théorème 0.1. — *Il existe des réseaux arithmétiques de* $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$*, uniformes et non uniformes, qui sont profiniment rigides au sens absolu.*

Rappelons que le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ est le groupe des isométries préservant l'orientation de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$ de dimension 3. Par conséquent tout réseau (*i.e.* tout sous-groupe discret de covolume fini) de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ donne lieu à un orbi-espace hyperbolique de dimension 3, à savoir $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}/\Gamma$. Ce quotient est une variété si, et seulement si, Γ est sans torsion, auquel cas Γ est le groupe fondamental de $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}/\Gamma$. On va voir que l'exemple de réseau profiniment rigide au sens absolu *uniforme* (*i.e.* où le quotient $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}/\Gamma$ est compact) le plus parlant est le groupe fondamental Γ_W de la variété de Weeks–Fomenko–Matveev. L'exemple non uniforme le plus directement accessible est le groupe de Bianchi $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[\omega])$ où ω est une racine cubique non triviale de l'unité. Dans les deux cas, ces réseaux sont proches des réseaux de covolume minimal dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$; la variété de Weeks–Fomenko–Matveev est de volume minimal parmi les variétés hyperboliques de dimension 3 (*cf.* Maillot, 2010).

La première étape de la démonstration (esquissée dans 4.1) a pour principal objet d'étude les représentations $\Gamma \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ d'image dense pour la topologie de Zariski. Le concept-clé est celui de Galois-rigidité d'une telle représentation : un réseau Γ est Galois-rigide si le nombre de représentations Zariski denses $\Gamma \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ est minimal. Partant d'un groupe profiniment rigide Λ, l'isomorphisme $\widehat{\Gamma} \simeq \widehat{\Lambda}$ (qui est la seule hypothèse faite sur Λ !) et l'idée d'identifier $\mathbf{C}$ à $\overline{\mathbf{Q}_p}$ permettent de transférer un comptage de représentations de Γ à Λ pour en déduire l'existence d'une représentation Zariski dense $\Lambda \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. Des arguments d'algèbres de quaternions définies sur le corps des traces de Γ, naturels pour les 3-variétés hyperboliques mais développés ici dans une direction arithmétique assez poussée, permettent de prouver l'existence d'une représentation Zariski dense $\Lambda \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ dont l'image est contenue dans Γ. La seconde étape de la démonstration (esquissée dans 4.2) utilise de façon intensive les propriétés topologiques de certaines 3-variétés hyperboliques pour prouver que l'image de la représentation ainsi obtenue est égale à Γ exactement. Cela se voit au moyen d'arguments de comptage de réseaux de petit covolume, en contrôlant simultanément la croissance de premier nombre de Betti quand on passe d'un réseau à un sous-groupe d'indice fini.

Outre ces exemples de groupes kleiniens (agissant sur $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$), la même stratégie s'est avérée fructueuse pour démontrer la rigidité profinie absolue de certains groupes fuchsiens (agissant sur le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2_{\mathbf{R}}$) et celle de groupes fondamentaux de certaines 3-variétés fibrant en cercles, dites de Seifert. Dans l'état actuel de la théorie, il faut se tourner vers des questions de rigidité profinie relative si l'on veut un corpus de résultats substantiellement plus important. C'est ici que la topologie et la géométrie des variétés de dimension 3 fait merveille (*cf.* 3.3). Un résultat marquant dit que, pour une variété M dont le revêtement universel est isométrique à $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$ et de volume riemannien fini, il n'existe (à isomorphisme près) qu'un nombre fini de groupes fondamentaux de variétés de dimension 3 (sans plus d'hypothèse) qui soient de type fini et de complété profini isomorphe à $\widehat{\pi_1(M)}$ (Liu, 2023).

À quel point des phénomènes de non rigidité peuvent-ils se manifester ? Chercher à répondre à cette question révèle le rôle important de propriétés de finitude qu'on va imposer aux groupes qu'on choisit de considérer. Voici un résultat exemplaire à cet égard (*cf.* 3.2 pour plus de détails).

Théorème 0.2. — *Il existe des groupes hyperboliques au sens de Gromov, de dimension 2*[(2)]*, contenant une infinité non dénombrable*[(3)] *de sous-groupes $u_H : H \hookrightarrow \Gamma$ tels que l'application déduite entre complétés profinis soit un isomorphisme $\widehat{u}_H : \widehat{H} \simeq \widehat{\Gamma}$. Ces groupes Γ peuvent être choisis de telle sorte qu'il y ait une infinité dénombrable de sous-groupes H comme précédemment qui soient en outre de type fini.*

Rappelons que les groupes hyperboliques au sens de Gromov sont de présentation finie et que les classes de conjugaison d'élements de torsion sont en nombre fini dans un tel groupe. Il est intéressant de noter que les groupes de cet énoncé sont de dimension 2. On peut les comparer aux réseaux fuchsiens cocompacts connus pour être profiniment rigides au sens absolu : ce sont eux aussi des groupes de dimension 2, mais ils sont hyperboliques au sens classique (pré-Gromov) du terme.

C'est surtout la façon dont la rigidité profinie fait défaut qui est intéressante : dans le théorème, l'isomorphisme entre complétés profinis provient d'une flèche, et même d'une inclusion. C'est dans cette situation particulière que Grothendieck avait formulé la question suivante (*cf.* 3.1) : *étant donné un groupe Γ de présentation finie et résiduellement fini, est-il possible qu'il existe un sous-groupe propre $u_H : H \hookrightarrow \Gamma$ de présentation finie qui induise un isomorphisme $\widehat{u}_H : \widehat{H} \simeq \widehat{\Gamma}$ entre complétés profinis ?*

2. On parle de dimension homologique virtuelle.
3. On compte ici les images.

Le théorème ci-dessus ne répond *stricto sensu* pas à la question ; le mentionner ici est l'occasion de signaler à quel point la difficulté des problèmes dont il va être question dépend des propriétés de finitude qu'on recherche ou s'impose. En fait, des inclusions de groupes tous deux de présentation finie, comme dans la question de Grothendieck, avaient déjà été construites par Bridson et Grunewald, suivant des idées de Bass et Lubotzky (*cf.* la fin de 3.1). Les constructions combinent l'idée, due à Platonov et Tavgen, d'utiliser un produit fibré associé à un quotient de groupes bien choisi avec l'usage, initié par Baumslag, Bridson, Miller et Short, de finitudes cohomologiques supérieures pour améliorer les propriétés du produit fibré en question (*cf.* 3.2 pour plus de détails).

Le domaine de la rigidité profinie fourmille de conjectures (on en présente quelques-unes en 4.3). La plus intrigante est peut-être celle qui porte sur les groupes libres ; c'est un problème posé par Remeslennikov dans le *Kourovka notebook* (*cf.* Khukhro et Mazurov, 2018, Question 5.48).

Conjecture 0.3. — *Pour tout entier $n \geqslant 2$, le groupe libre F_n est profiniment rigide au sens absolu ; autrement dit, tout groupe de type fini résiduellement fini possédant les mêmes quotients finis que F_n est un groupe libre.*

Encore une fois, la difficulté d'un tel énoncé est qu'il porte sur une rigidité profinie absolue. Une idée naturelle est de ramener la rigidité absolue à une rigidité relative vis-à-vis d'une classe convenable de groupes comparés. Il existe à ce jour deux techniques pour cela : l'utilisation d'une loi satisfaite par le groupe (commutativité, nilpotence d'un type précis, etc.) ou la Galois-rigidité évoquée ci-dessus. La lectrice ou le lecteur perspicace aura remarqué que les groupes dans les résultats de rigidité sus-mentionnés contiennent tous des groupes libres, ce qui exclut l'utilisation d'une loi providentielle [(4)].

Structure de ce texte. — La section 1 rappelle les rudiments et résultats nécessaires de groupes et de complétion profinis pour la suite du rapport ; on y explique pourquoi il est important de se restreindre aux groupes résiduellement finis. La section 2 introduit la notion d'équivalence profinie en la plaçant dans le contexte d'autres relations d'équivalence pour les groupes de type fini ; on y explique que les propriétés usuelles sont la plupart du temps inopérantes. La section 3 présente des résultats de rigidité profinie relative, à la fois dans le contexte des groupes fondamentaux de variétés et dans le cadre de la question de Grothendieck ; c'est l'occasion de mettre en évidence le rôle prépondérant de la géométrie de dimension 3 et des propriétés de finitude. La section 4 fournit une description de la preuve du résultat de rigidité profinie absolue ci-dessus pour certains réseaux kleiniens ; elle se clôt avec des conjectures de cette théorie.

Remerciements. — Je remercie très chaleureusement Martin Bridson pour les nombreuses réflexions dont il m'a fait part au cours de la rédaction de ce rapport, ainsi que Damien Gaboriau et Sylvain Maillot pour leurs relectures attentives et amicales.

4. En théorie des groupes, il suffit d'être un peu libre pour être hors-la-loi.

1. Complétion profinie

Le procédé de complétion profinie est à la base de l'étude des groupes discrets de type fini dont il est question dans toute la suite de ce texte. On va voir que l'usage de cette complétion privilégie une classe particulière de groupes, les groupes *résiduellement finis*. Cette classe exclut les groupes infinis sans quotient fini non trivial (en particulier les groupes infinis simples de type fini). Néanmoins elle contient les groupes linéaires de type fini ou encore les groupes fondamentaux de variétés différentielles de dimension 3. Des résultats profonds mettent en évidence une très forte interaction entre les propriétés algébriques et les propriétés topologiques d'un groupe profini, pourvu que celui-ci soit *topologiquement de type fini*, *i.e.* qu'une partie finie engendre un sous-groupe dense.

1.1. Groupes profinis

Un *groupe topologique* est un groupe muni d'une topologie pour laquelle les lois de groupe (produit et passage à l'inverse) sont des applications continues.

Définition 1.1. — *Un* groupe profini *est un groupe muni d'une topologie compacte et totalement discontinue qui en fait un groupe topologique.*

On privilégie ici une définition topologique et intrinsèque, mais un point de vue équivalent consiste à définir les groupes profinis comme étant les limites des systèmes projectifs de groupes finis. Ce point de vue est naturel en théorie algébrique des nombres : dans ce contexte, le groupe de Galois d'une extension algébrique d'un corps K est la limite projective des groupes de Galois des extensions finies de K.

Les limites des systèmes projectifs uniquement composés de p-groupes sont appelés des groupes *pro-p*.

Exemple 1.2. — Par analogie avec les groupes topologiques, on définit aussi les anneaux topologiques. Le complété de l'anneau des entiers relatifs $\mathbf{Z}$ pour la valuation p-adique est un anneau topologique, noté $\mathbf{Z}_p$. Son groupe additif est un groupe pro-p.

Exemple 1.3. — La limite projective du système formé des flèches $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \twoheadrightarrow \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ où m divise n est le groupe *profini cyclique* $\widehat{\mathbf{Z}}$.

Exemple 1.4. — Les sous-groupes compacts des groupes localement compacts totalement discontinus sont des groupes profinis. De tels groupes apparaissent quand on considère des groupes d'automorphismes de certaines structures discrètes : on peut penser au groupe d'automorphismes d'un arbre localement fini, muni de la topologie compacte ouverte ; dans ce cas, et si par exemple l'arbre est homogène, le stabilisateur d'un sommet est un « gros » groupe profini. C'est un des principaux apports de la théorie de Bruhat–Tits de mettre en évidence que les groupes réductifs sur les corps locaux relèvent de ce cadre ; par exemple $\mathrm{SL}_d(\mathbf{Z}_p)$ est un sous-groupe compact maximal du groupe $\mathrm{SL}_d(\mathbf{Q}_p)$ qui opère lui-même sur un complexe simplicial localement fini remarquable (un cas particulier d'immeuble affine).

À première vue, les groupes profinis se comportent à bien des égards comme les groupes finis, pourvu qu'on accole si nécessaire l'adjectif « fermés » ou « ouverts » (resp. « continus ») aux sous-groupes (resp. aux homomorphismes) considérés. On dispose par exemple de théorèmes d'existence et de conjugaison des sous-groupes pro-p maximaux, autrement dit de théorèmes de Sylow profinis (Serre, 1994, I §1.4). En outre, l'intersection des sous-groupes ouverts maximaux, appelé le *sous-groupe de Frattini* du groupe profini considéré, est un outil intéressant quand on cherche à comprendre l'adhérence d'un sous-groupe engendré par une partie donnée (Dixon, du Sautoy, Mann et Segal, 1999, Prop. 1.9).

Il est bon d'avoir en tête qu'un groupe profini n'est en général pas *linéaire* (*i.e.* isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de matrices sur un corps). Dans la catégorie des groupes profinis où les flèches sont les homomorphismes de groupes continus, pour chaque entier $n \geqslant 1$ il existe un objet libre (topologiquement) engendré par n éléments : c'est le groupe *profini libre sur n lettres*, qu'on note $\widehat{F_n}$. Pour $n = 1$, ce groupe est le groupe $\widehat{\mathbf{Z}}$ ci-dessus. Pour $n \geqslant 2$, ce groupe n'est pas commutatif et n'est pas un groupe de matrices. Si T_d est l'arbre homogène de valence $d \geqslant 3$, le stabilisateur d'un sommet dans $\mathrm{Aut}(T_d)$ n'est pas linéaire non plus.

1.2. Structure topologique vs structure algébrique

Les conditions topologiques définissant les groupes profinis ont de fortes conséquences sur la structure algébrique de ceux-ci. Par exemple, un groupe profini infini ne peut pas être simple. En fait, il est isomorphe à la limite projective du système de ses quotients finis (Dixon, du Sautoy, Mann et Segal, 1999, Prop. 1.3) ; dans la terminologie qu'on va introduire en 1.3, on pourra dire qu'un groupe profini est résiduellement fini.

Les implications algébriques se renforcent si on fait l'hypothèse que le groupe profini considéré est *topologiquement de type fini*, c'est-à-dire qu'il contient une partie finie qui engendre un sous-groupe dense. Dans ce cas, les sous-groupes ouverts d'indice donné sont en nombre fini (Dixon, du Sautoy, Mann et Segal, 1999, Prop. 1.6) et tout sous-groupe ouvert est lui aussi topologiquement de type fini (Dixon, du Sautoy, Mann et Segal, 1999, Prop. 1.7).

Enfin, on sera amené à utiliser le fait qu'un groupe profini topologiquement de type fini est hopfien, *i.e.* un épimorphisme [5] du groupe vers lui-même est automatiquement injectif (Ribes et Zalesskii, 2010, Th. 2.5.2).

Réciproquement, le résultat récent le plus frappant sur les groupes profinis met en évidence que la topologie d'un groupe profini topologiquement de type fini est déterminée par sa structure algebrique sous-jacente (Nikolov et Segal, 2007, Th. 1.1)

Théorème 1.5. — *Un sous-groupe d'indice fini d'un groupe profini topologiquement de type fini est automatiquement ouvert.*

5. C'est-à-dire un homomorphisme de groupe continu et surjectif.

Ce théorème implique qu'un homomorphisme abstrait d'un groupe profini topologiquement de type fini vers un groupe profini est automatiquement continu. Pour un séminaire Bourbaki traitant de ce résultat profond, on renvoie à Wilson (2011).

1.3. Groupes résiduellement finis

Il s'agit maintenant d'établir un lien entre groupes discrets et groupes profinis. Le procédé de complétion profinie consiste à associer à tout groupe de type fini Γ un groupe profini $\widehat{\Gamma}$ et un homomorphisme $\iota\colon \Gamma \to \widehat{\Gamma}$ d'image dense et possédant une propriété universelle appropriée.

Définition 1.6. — *Soit G un groupe. On le munit de la topologie la moins fine compatible aux lois de groupe et faisant des sous-groupes distingués d'indice fini des voisinages ouverts de l'élément neutre. Soit $(\widehat{G}, \iota)$ un couple où $\widehat{G}$ est un groupe profini et où $\iota\colon G \to \widehat{G}$ est un homomorphisme de groupes continu et d'image dense. On dit que $(\widehat{G}, \iota)$ est le* complété profini *de G si tout homomorphisme continu $G \to H$ de groupes topologiques avec H profini se factorise à travers ι.*

Le complété profini d'un groupe discret de type fini existe toujours. Concrètement, si Γ est un tel groupe, son complété profini $(\widehat{\Gamma}, \iota)$ s'obtient de la façon suivante. On considère la collection $\{\Delta\}_{\Delta \triangleleft_{\mathrm{if}} \Gamma}$ des sous-groupes distingués d'indice fini dans Γ. On dispose alors de la flèche naturelle $\Gamma \to \prod_{\Delta \triangleleft_{\mathrm{if}} \Gamma} \Gamma/\Delta$ qui attache à tout $\gamma \in \Gamma$ la famille « diagonale » de classes $\{\gamma\Delta\}_{\Delta \triangleleft_{\mathrm{if}} \Gamma}$. On note ι_Γ (ou simplement ι) cette application, de sorte que $\iota_\Gamma(\gamma) = \{\gamma\Delta\}_{\Delta \triangleleft_{\mathrm{if}} \Gamma}$. Sous ce point de vue concret, on voit que $(\overline{\mathrm{Im}(\iota_\Gamma)}, \iota_\Gamma)$ est une solution du problème universel ci-dessus, où $\overline{\mathrm{Im}(\iota_\Gamma)}$ est l'adhérence de l'image de ι_Γ dans $\prod_{\Delta \triangleleft_{\mathrm{if}} \Gamma} \Gamma/\Delta$.

Enfin, la propriété universelle permet classiquement de voir que le procédé de complétion profinie définit un foncteur $\widehat{\cdot}$ de la catégorie des groupes de type fini munie des homomorphismes de groupes vers la catégorie des groupes profinis munie des homomorphismes de groupes continus. Ce foncteur est exact à droite.

Exemple 1.7. — Soit F_n le groupe libre (discret) sur n lettres. Le complété profini de F_n est le groupe profini libre à n lettres $\widehat{F}_n$, qu'on a déjà présenté d'un point de vue plus catégorique en 1.1. Notons que F_n est un groupe linéaire alors que ce n'est pas le cas de son complété profini $\widehat{F}_n$.

Que peut-il arriver de déplaisant avec cette construction ? Tout d'abord, le groupe $\widehat{\Gamma}$ peut être trop petit pour être l'espace but d'une complétion digne de ce nom ; en fait, le groupe $\widehat{\Gamma}$ peut tout simplement être trivial ! Cela se produit quand le groupe de type fini Γ est infini, mais sans quotient fini non trivial. De tels groupes sont par exemple fournis par les groupes de Higman H_n, pour $n \geqslant 4$ (Serre, 1977, I §1.4 Prop. 6) ; ce sont les groupes définis par la présentation à n générateurs et à n relations :

$$H_n = \langle (x_i)_{i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}} | x_i x_{i+1} x_i^{-1} = x_{i+1}^2 \text{ pour tout } i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rangle.$$

D'autres exemples de groupes de complétion profinie triviale sont fournis par les groupes infinis de type fini et simples, mais leur construction explicite est plus coûteuse (*cf.* par exemple Burger et Mozes, 2000 pour des specimens de présentation finie et sans torsion).

La flèche diagonale ι peut elle aussi poser problème, par exemple en n'étant pas injective ; c'est le principal phénomème indésirable qu'on veut éviter en posant la définition suivante.

Définition 1.8. — *Soit* Γ *un groupe. On dit que* Γ *est* résiduellement fini *si pour tout élément non trivial* $\gamma \in \Gamma$ *il existe un quotient* $\pi_Q \colon \Gamma \twoheadrightarrow Q$*, où* Q *est un groupe fini et où* $\pi_Q(\gamma) \neq 1$*.*

Cette définition dit exactement que l'application ι_Γ associée au groupe Γ est injective, puisque $\mathrm{Ker}(\iota_\Gamma)$ est l'intersection des sous-groupes d'indice fini de Γ. De manière générale, on note $\mathcal{S}_{\mathrm{if}}(\Gamma)$ l'ensemble des sous-groupes d'indice fini de Γ (de sorte que $\mathrm{Ker}(\iota_\Gamma) = \bigcap_{\Delta \in \mathcal{S}_{\mathrm{if}}(\Gamma)} \Delta$).

Exemple 1.9. — Les groupes $\mathrm{SL}_d(\mathbf{Z})$, pour d entier $\geqslant 2$, sont des groupes infinis pour lesquels la propriété de finitude résiduelle est facile à mettre en évidence : les flèches $\mathrm{SL}_d(\mathbf{Z}) \to \mathrm{SL}_d(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ de réduction modulo m, quand m parcourt $\mathbf{N}_{\geqslant 2}$, suffisent pour cela. En réalité, si on suppose qu'un groupe de type fini est linéaire, alors celui-ci est automatiquement résiduellement fini : c'est le lemme de Mal'tsev. La démonstration de cet énoncé est une généralisation de l'argument ci-dessus pour $\mathrm{SL}_d(\mathbf{Z})$, une fois qu'on s'est ramené à un anneau de coefficients matriciels avec suffisamment de quotients finis (grâce à une partie génératrice finie et stable par passage à l'inverse).

Exemple 1.10. — Soit Γ le groupe fondamental d'une variété différentielle de dimension 3. Alors si Γ est de type fini, il est automatiquement de présentation finie et résiduellement fini (Scott, 1973a,b ; Hempel, 1987). Ce dernier point est une conséquence de la géométrisation des 3-variétés (*cf.* Besson (2006) pour un séminaire Bourbaki sur la preuve de la conjectire de géométrisation).

Proposition 1.11. — *Soit* Γ *un groupe de type fini. On suppose que* Γ *est résiduellement fini et on l'identifie au sous-groupe de* $\widehat{\Gamma}$ *donné par l'image de l'application naturelle* ι *ci-dessus. Alors les applications*

$\Delta \mapsto \overline{\Delta}$ *de passage à l'adhérence dans* $\widehat{\Gamma}$*, et*

$\widehat{\Delta} \mapsto \widehat{\Delta} \cap \Gamma$ *d'intersection avec* Γ

établissent des bijections réciproques l'une de l'autre entre $\mathcal{S}_{\mathrm{if}}(\Gamma)$ *et* $\mathcal{S}_{\mathrm{if}}(\widehat{\Gamma})$*. En outre, pour tout sous-groupe d'indice fini* Δ *de* Γ*, les propriétés suivantes sont satisfaites.*

(i) On a : $[\Gamma : \Delta] = [\widehat{\Gamma} : \overline{\Delta}]$.

(ii) Le sous-groupe Δ *est distingué dans* Γ *si et seulement si* $\overline{\Delta}$ *l'est dans* $\widehat{\Gamma}$*, auquel cas les quotients* Γ/Δ *et* $\widehat{\Gamma}/\overline{\Delta}$ *sont naturellement isomorphes.*

Si l'on remplace l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathrm{if}}(\widehat{\Gamma})$ par celui, noté $\mathcal{S}_{\mathrm{o}}(\widehat{\Gamma})$, des sous-groupes ouverts de $\widehat{\Gamma}$, cette proposition fait partie des résultats standard sur les groupes profinis (Ribes et Zalesskii, 2010, Prop. 3.2.2). Mais il découle des résultats de Nikolov–Segal que pour un groupe profini topologiquement de type fini, on a en fait $\mathcal{S}_{\mathrm{if}}(\widehat{\Gamma}) = \mathcal{S}_{\mathrm{o}}(\widehat{\Gamma})$.

2. Équivalence profinie pour les groupes de type fini résiduellement finis

On présente ici la notion d'équivalence profinie et on la place dans le contexte d'autres relations d'équivalence introduites ces trois dernières décennies pour mieux comprendre la géométrie et la dynamique des groupes infinis de type fini. On va voir que l'équivalence profinie occupe une place nouvelle, si ce n'est singulière, notamment parce que peu de propriétés pertinentes pour l'approche géométrique ou mesurable de la théorie des groupes sont des invariants pour cette relation d'équivalence. Dès lors, la question qui nous intéressera principalement relèvera du problème général de la rigidité de cette relation d'équivalence vis-à-vis de la relation d'isomorphie.

2.1. Relations d'équivalence d'origines géométrique et mesurable ; rigidité

On a déjà évoqué le fait qu'il est illusoire de chercher à classer les groupes de type fini à isomorphisme près. Des relations d'équivalence plus grossières sont donc envisagées, à commencer par celles qui privilégient les points de vue géométrique et mesurable en théorie des groupes.

La quasi-isométrie. — La relation de *quasi-isométrie* est une relation d'équivalence qui prend en charge les espaces métriques en général. Ainsi, on dit que des espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) sont *quasi-isométriques* (l'un à l'autre) s'il existe une application $f\colon X \to Y$ et des constantes $C > 1$ et $D > 0$ telles que les deux propriétés suivantes soient satisfaites.

(i) Pour tous $x, x' \in X$, on a : $\frac{1}{C} d_X(x, x') - D \leqslant d_Y\big(f(x), f(x')\big) \leqslant C d_X(x, x') + D$;

(ii) Pour tout $y \in Y$ il existe $x \in X$ tel que : $d_Y\big(y, f(x)\big) \leqslant D$.

Même si cette définition n'est pas symétrique telle que formulée, elle donne bien lieu à une relation d'équivalence entre espaces métriques (voir, par exemple, Bridson et Haefliger, 1999, p. 8.16). Une application f qui ne satisfait que la condition (i), autrement dit une double inégalité de type « bilipschitz à constante additive près », est appelée un *plongement quasi-isométrique* de X dans Y. Quant à elle, la condition (ii) peut être vue comme une « surjectivité à constante additive près ». L'usage des constantes additives est révélatrice du fait que cette relation d'équivalence est introduite pour étudier les espaces métriques à grande échelle.

Il reste à expliquer en quoi cette relation est pertinente pour les groupes de type fini : si Γ est un groupe engendré par une partie finie S, qu'on peut supposer symétrique (*i.e.* $S = S^{-1}$) et ne contenant pas l'élément neutre 1_Γ, on peut lui attacher son *graphe de*

Cayley (associé à S). C'est le graphe non orienté où les sommets sont les éléments de Γ et où $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ sont reliés par une arête si et seulement si $\gamma^{-1}\gamma' \in S$. En décrétant les arêtes de longueur 1, on obtient bien un espace métrique, et si on avait choisi une autre partie finie, génératrice, symétrique et ne contenant pas 1_Γ, on aurait obtenu un graphe quasi-isométrique au précédent ; c'est compatible avec la relation de quasi-isométrie.

Finalement, on dit que deux groupes de type fini sont *quasi-isométriques* l'un à l'autre si tout graphe de Cayley de l'un est quasi-isométrique à tout graphe de Cayley de l'autre (et on vient de voir qu'il suffit de vérifier cela sur une paire de graphes de Cayley).

L'équivalence mesurable. — On dit que deux groupes dénombrables Γ et Λ sont *mesurablement équivalents* l'un à l'autre s'il existe un espace borélien standard X, muni d'une mesure σ-finie μ, sur lequel Γ et Λ agissent librement et en préservant μ, de sorte que les actions commutent et admettent chacune des domaines fondamentaux de μ-mesure finie.

L'exemple prototypique est donné par un groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts G qui contient Γ et Λ comme réseaux. Rappelons qu'on dit que Δ est un *réseau* de G si c'est un sous-groupe discret de G tel que l'espace homogène G/Δ porte une mesure G-invariante de masse totale finie [(6)].

On voit que cette relation d'équivalence est l'analogue mesurable de la quasi-isométrie à partir du moment où l'on sait qu'une reformulation du fait que Γ et Λ sont quasi-isométriques est l'existence d'actions continues proprement discontinues de Γ et Λ sur un espace localement compact X, de sorte que les actions commutent et donnent lieu chacune à un quotient compact. Dans un groupe localement compact G, les réseaux Δ *uniformes* (c'est-à-dire tels que G/Δ est compact pour la topologie quotient – on parle aussi de réseau *cocompact* [(7)]) sont tous quasi-isométriques les uns aux autres.

Un peu de formalisme sur la rigidité. — À partir du moment où l'on s'intéresse à des relations d'équivalence plus grossières que la relation d'isomorphie, il devient pertinent de se poser des questions de rigidité. Le cadre général pour introduire ce phénomène est celui d'un ensemble E muni de deux relations d'équivalence, disons $\cong$ et $\mathcal{R}$. On suppose que la relation $\cong$ est plus fine que $\mathcal{R}$ [(8)]. En sous-entendant le plus souvent la relation $\cong$, on dira qu'un élément a de E est *rigide pour* $\mathcal{R}$ si $b\mathcal{R}a$ implique $b \cong a$ pour tout $b \in E$ (autrement dit, si la classe de $\mathcal{R}$-équivalence de a est réduite à sa classe d'équivalence pour $\cong$). Bien entendu, le rôle de $\cong$ sera joué le plus souvent par la relation d'isomorphie, mais une autre relation d'équivalence assez fine telle que la commensurabilité peut faire l'affaire : deux groupes sont dits *commensurables* si chacun possède comme sous-groupes d'indice fini des groupes isomorphes l'un l'autre. Par exemple, un théorème remarquable de Furman (1999) dit qu'un groupe dénombrable mesurablement équivalent à un réseau de groupe de Lie simple de rang supérieur doit être commensurable (à noyau fini près) à ce réseau : c'est un résultat de rigidité mesurable très profond.

6. Penser à l'inclusion de $\mathrm{SL}_d(\mathbf{Z})$ dans $\mathrm{SL}_d(\mathbf{R})$.
7. Penser à un groupe de surface $\pi_1(\Sigma_g)$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$, pour une surface Σ_g de genre $g \geqslant 2$.
8. Dans le sens où $a \cong b$ implique $a\mathcal{R}b$ pour tous a et b dans E.

2.2. Équivalence profinie et rigidités profinies

La relation d'équivalence à laquelle nous nous intéressons est la suivante.

Définition 2.1. — *Soient* Γ *et* Λ *des groupes. On dit que* Γ *et* Λ *sont* profiniment équivalents *si leurs complétions profinies sont isomorphes,* i.e. *si* $\widehat{\Gamma} \simeq \widehat{\Lambda}$.

La vérification de l'équivalence profinie entre deux groupes est souvent facilitée par le résultat suivant (Ribes et Zalesskii, 2010, Th. 3.2.7).

Théorème 2.2. — *Des groupes de type fini avec la même collection de quotients finis ont des complétions profinies isomorphes, autrement dit sont profiniment équivalents.*

La preuve de ce théorème peut se décomposer en deux assertions, chacune utile dans ce qui suit. Précisément, si Γ et Λ sont deux groupes de type fini et si la famille des quotients finis de Λ est incluse dans celle des quotients finis de Γ, alors il existe un épimorphisme $\widehat{\Gamma} \twoheadrightarrow \widehat{\Lambda}$ (Bridson, Reid et Spitler, 2022, Prop. 3.1) ; en combinant cela au fait que les groupes profinis (topologiquement) de type fini sont hopfiens (1.2), on obtient le théorème.

Si l'on cherche à comparer cette relation d'équivalence avec celles que l'on a mentionnées dans la section précédente, on peut dire que celle-ci s'intéresse également à certaines actions du groupes. Les actions en question relèvent d'un contexte qui a l'avantage d'être plus dépouillé, mais qui a l'inconvénient d'être moins riche en structure, puisqu'il s'agit des actions sur des ensembles finis (à comparer aux actions sur des espaces métriques ou des espaces mesurés).

Compte tenu de la discussion précédente sur les possibles insuffisances de la complétion profinie d'un groupe, on se convainc vite que la relation d'équivalence profinie est pertinente essentiellement pour les groupes résiduellement finis.

Exemple 2.3. — Tous les groupes simples de type fini, plus généralement tous les groupes sans quotient fini non trivial (par exemple, les groupes de Higman H_n avec $n \geqslant 4$), sont dans la même classe d'équivalence profinie : leur complété profini est le groupe trivial.

Pour prendre la mesure de la taille déraisonnable de la classe d'équivalence profinie dans l'exemple 2.3, voici un énoncé qui suggère l'abondance de groupes sans quotient fini : *tout groupe de présentation finie se plonge quasi-isométriquement dans un groupe de présentation finie sans quotient fini* (Bridson, 1998). Au contraire, les groupes simples de présentation finie se répartissent en une infinité de classe de quasi-isométrie (*cf.* Caprace et Rémy, 2010, ou Skipper, Witzel et Zaremsky, 2019) et en une infinité de classes d'équivalence mesurable (López Neumann, 2023).

2.3. Propriétés préservées (ou pas)

Finissons par une sous-section un peu décourageante, ou très motivante : on va voir en effet qu'il existe à ce jour peu d'invariants d'équivalence profinie. C'est l'occasion de constater à quel point cette équivalence diffère de celles provenant des théories géométrique et mesurable des groupes. Pour faire court, un invariant de groupes est dit *profini* s'il est le même pour deux groupes dès que ceux-ci sont profiniment équivalents.

- Un des exemples les plus standard d'invariants profinis est fourni par l'abélianisé $\mathrm{H}_1(\Gamma, \mathbf{Z}) = \frac{\Gamma}{[\Gamma,\Gamma]}$ d'un groupe Γ.
- On dit qu'un groupe est *gros* s'il admet un sous-groupe d'indice fini qui se surjecte par homomorphisme sur un groupe libre non abélien. La propriété d'être gros est un invariant profini (Lackenby, 2010).
- Le signe de la caractéristique d'Euler est le même pour les groupes arithmétiques qui possèdent la propriété des sous-groupes de congruence et qui contiennent chacun des sous-groupes d'indice fini profiniment équivalents l'un à l'autre ; cependant cette égalité ne s'étend pas à la valeur elle-même de la caractéristique d'Euler (Kammeyer, Kionke, Raimbault et Sauer, 2020).

Rappelons que la *propriété des sous-groupes de congruence* concerne les groupes arithmétique : cette propriété dit que le complété profini d'un groupe arithmétique n'est pas plus gros que le groupe profini qu'on obtient en complétant l'anneau d'entiers utilisé pour définir le groupe arithmétique (*cf.* Sury (2003) pour une introduction). Par exemple, le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ ne possède pas cette propriété (son complété profini est très gros, comme on peut en avoir l'intuition en constatant que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ contient F_2 comme sous-groupe d'indice fini) ; en revanche, les groupes $\mathrm{SL}_d(\mathbf{Z})$ pour $d \geqslant 3$ possèdent cette propriété, et on a : $\widehat{\mathrm{SL}_d(\mathbf{Z})} = \mathrm{SL}_d(\widehat{\mathbf{Z}})$.

Passons maintenant en revue les propriétés les plus courantes en théorie géométrique ou mesurable des groupes, et constatons qu'elles ne sont en général pas compatibles avec l'équivalence profinie. Notre source pour le comportement « classique » de ces propriétés est Gaboriau (2002).

- Les propriétés de finitude cohomologique classiques relèvent en premier lieu de la topologie algébrique plutôt que de la géométrie à grande échelle ; quoi qu'il en soit, elles ne sont pas des invariants profinis (Lubotzky, 2014).
- La moyennabilité est une notion importante en théorie des groupes localement compacts généraux, qui se caractérise aussi bien par des propriétés de structure interne du groupe (à travers diverses algèbres de fonctions) que par des propriétés des représentations unitaires du groupe (Zimmer, 1984, Ch. 4). C'est à la fois un invariant pour la quasi-isométrie et pour l'équivalence mesurable, à ceci près que tous les groupes moyennables infinis sont dans la même classe d'équivalence mesurable (théorème d'Ornstein–Weiss ; *cf.* Ornstein et Weiss, 1980), alors qu'ils se répartissent dans une

infinité de classes de quasi-isométrie. Il se trouve que le fait d'être moyennable n'est pas un invariant profini (Kionke et Schesler, 2021).

— La propriété (T) de Kazhdan est une notion importante en théorie des groupes localement compacts généraux, qui se caractérise par des propriétés des représentations unitaires du groupe (trou spectral, annulation d'un H^1 convenable etc.) et qui a des conséquences importantes sur les actions des groupes concernés (existence de points fixes pour des actions sur des espaces de Hilbert, des arbres etc.) (de la Harpe et Valette, 1989). C'est une propriété « orthogonale » à la moyennabilité dans le sens où seuls les groupes compacts sont à la fois moyennables et Kazhdan (Zimmer, 1984, Cor. 7.1.9). La propriété (T) est un invariant d'équivalence mesurable (Furman, 1999, Cor. 1.4) mais n'est pas un invariant de quasi-isométrie. Il se trouve que le fait de jouir de la propriété (T) n'est pas un invariant profini (Aka, 2012b). Il existe des réseaux dans des groupes de Lie semi-simples qui sont profiniment équivalents mais où les groupes de Lie ambiants n'ont pas le même rang (Aka, 2012a). Enfin, une des conséquences de la propriété (T) est la propriété (FA) qui assure que toute action sur un arbre a un point fixe ; cette propriété n'est pas un invariant profini non plus (Cheetham-West, Lubotzky, Reid et Spitler, 2022).

— En ce qui concerne les cohomologies plus adaptées à l'étude de la géométrie à grande échelle des groupes ou de l'équivalence orbitale de leurs actions (Gaboriau, 2002), il s'avère que les nombres de Betti ℓ^2 ne sont pas non plus des invariants profinis (Kammeyer et Sauer, 2020), sauf le premier nombre de Betti ℓ^2 pour les groupes de présentation finie. Enfin, le noyau de la flèche de comparaison $\mathrm{H}^*_{\mathrm{b}}(\Gamma, \mathbf{R}) \to \mathrm{H}^*(\Gamma, \mathbf{R})$ entre cohomologie bornée et cohomologie usuelle est intéressant en degré 2, par exemple parce qu'il permet d'attaquer la question de la rigidité des (quasi-)caractères d'un groupe Γ. Il se trouve que la cohomologie bornée en degré 2 n'est pas un invariant profini (Echtler et Kammeyer, 2023).

Désormais, sauf mention explicite du contraire, nous nous concentrons sur la classe des groupes infinis, de type fini et résiduellement finis et sur la relation d'équivalence profinie entre ces groupes.

3. Rigidités profinies relatives

Dans cette section, on évoque des phénomènes de rigidité plus faibles que la propriété très forte d'avoir une classe d'équivalence profinie réduite à sa classe d'isomorphisme. L'affaiblissement consiste en ce qu'on impose des conditions supplémentaires aux groupes dont on compare la complétion profinie à celle du groupe qu'on s'est fixé. Par exemple, suivant Grothendieck, si l'on se donne un groupe Γ de type fini résiduellement fini, on peut se demander s'il est possible qu'il admette un sous-groupe strict de même complétion profinie. Dans une direction légèrement différente, on peut aussi choisir Γ de type fini résiduellement fini *et* d'origine géométrique : groupe fondamental de variétés d'un certain type, réseau d'un groupe de Lie, et chercher à savoir s'il existe d'autres tels groupes fondamentaux ou réseaux de même complété profinis. On espère faire comprendre tout au long de cette section que la géométrie de dimension 3 joue un rôle prépondérant dans ces questions, qui sera accentué à la section suivante.

3.1. Rigidité au sens de Grothendieck

Historiquement, la rigidité au sens de Grothendieck est la notion de rigidité la plus ancienne mettant en jeu l'équivalence profinie.

Définition 3.1. — *Soient* Γ *un groupe de type fini et résiduellement fini. On dit que* Γ *est* rigide au sens de Grothendieck (vis-à-vis des sous-groupes de type fini) *si la seule inclusion* $\Delta < \Gamma$ *d'un groupe de type fini induisant un isomorphisme entre complétions profinies* $\widehat{\Delta} \simeq \widehat{\Gamma}$ *est l'égalité* $\Delta = \Gamma$.

Pour cette notion de rigidité, la classe de groupes à laquelle on se restreint pour comparaison profinie est très réduite : être rigide au sens de Grothendieck vis-à-vis des sous-groupes de type fini, c'est n'être profiniment équivalent à aucun de ses sous-groupes stricts de type fini. La question initiale de théorie des groupes posée par Grothendieck portait même sur les sous-groupes de présentation finie seulement (Grothendieck, 1970, 3.1, p. 384). On parlera dans ce cas de rigidité au sens Grothendieck *vis-à-vis des sous-groupes de présentation finie.*

Il s'avère qu'on peut mettre en évidence de nombreuses inclusions *strictes* de groupes (au moins de type fini) $\Delta < \Gamma$ pour lesquelles $\widehat{\Delta} \simeq \widehat{\Gamma}$: on parle de *paire de Grothendieck* pour ces inclusions [(9)]. Meilleures sont les propriétés de finitude (type fini, présentation finie) des groupes, plus frappant est le contre-exemple fourni par une paire de Grothendieck. Voici une ligne directrice pour comprendre les constructions.

Une stratégie générale. — La présentation qui suit m'a été suggérée par Martin Bridson ; son élégance réside dans le fait qu'on commence par un raisonnement assez osé (en réalité, notoirement faux) mais que les corrections qu'on y apporte sont naturelles et, au bout du compte, suffisantes pour produire des paires de Grothendieck. Un travail ultérieur substantiel est nécessaire pour obtenir les finitudes désirées.

Partons d'une suite exacte de groupes de type fini supposés tous non triviaux [(10)] :

$$1 \to N \to \Gamma \to Q \to 1.$$

On suppose en outre que $\widehat{Q} = \{1\}$. Si la vie était simple (*i.e.* si nos foncteurs préférés étaient exacts), en passant aux complétions profinies on obtiendrait $\widehat{\Gamma} \simeq \widehat{N}$, ce qui conduirait immédiatement à de nombreux contre-exemples. Malheureusement, le foncteur de complétion profinie n'est pas exact à gauche et cette intuition seule tourne court.

9. Strictes, donc.
10. Sauf aux extrémités...

Par contre, la suite spectrale de Lyndon–Hochschild–Serre fournit une suite en exacte en homologie (Brown, 1994, Ch. VII §6) qui est, elle, bel et bien disponible :

$$\mathrm{H}_2(Q,\mathbf{Z}) \to \mathrm{H}_0\big(Q,\mathrm{H}_1(N,\mathbf{Z})\big) \to \mathrm{H}_1(\Gamma,\mathbf{Z}) \to \mathrm{H}_1(Q,\mathbf{Z}) \to 0.$$

Comme N est de type fini, son abélianisé $\mathrm{H}_1(N,\mathbf{Z})$ est un $\mathbf{Z}$-module de type fini et donc $\mathrm{Aut}\big(\mathrm{H}_1(N,\mathbf{Z})\big)$ est résiduellement fini (*cf.* Exemple 1.9). Puisqu'on a supposé que le complété profini $\widehat{Q}$ était trivial, tout homomorphisme de groupes $Q \to \mathrm{Aut}\big(\mathrm{H}_1(N,\mathbf{Z})\big)$ est trivial ; ceci impose que $\mathrm{H}_0\big(Q,\mathrm{H}_1(N,\mathbf{Z})\big) = \mathrm{H}_1(N,\mathbf{Z})$. L'hypothèse $\widehat{Q} = \{1\}$ implique aussi que $\mathrm{H}_1(Q,\mathbf{Z}) = \{0\}$, si bien que la précédente suite exacte de $\mathbf{Z}$-modules se simplifie en :

$$\mathrm{H}_2(Q,\mathbf{Z}) \to \mathrm{H}_1(N,\mathbf{Z}) \to \mathrm{H}_1(\Gamma,\mathbf{Z}) \to 0.$$

Ceci met en évidence que si $\mathrm{H}_2(Q,\mathbf{Z}) \neq \{0\}$, alors N peut avoir plus de quotients finis que Γ. Le résultat important pour réfuter une rigidité au sens de Grothendieck est que les conditions $\widehat{Q} = \{1\}$ et $\mathrm{H}_2(Q,\mathbf{Z}) = \{0\}$ sont suffisantes :

Proposition 3.2. — *Pour toute suite exacte $1 \to N \to \Gamma \to Q \to 1$ de groupes de type fini où $\widehat{Q} = \{1\}$ et $\mathrm{H}_2(Q,\mathbf{Z}) = \{0\}$, l'injection $N \to \Gamma$ induit un isomorphisme $\widehat{\Gamma} \simeq \widehat{N}$ entre complétés profinis.*

Si Q est un groupe de présentation finie et de complétion profinie triviale, alors il peut être modifié en un groupe comme ci-dessus. Il suffit en effet de le remplacer par son extension centrale universelle : c'est une extension centrale $\widetilde{Q}$ de Q par $\mathrm{H}_2(Q,\mathbf{Z})$ telle que $\mathrm{H}_2(\widetilde{Q}) = \{0\}$; une présentation explicite de $\widetilde{Q}$ permet de voir que le complété profini de $\widetilde{Q}$ reste trivial.

Produits fibrés associés à un quotient. — L'énoncé ci-dessus est une première source de paires de Grothendieck pourvu qu'on puisse effectivement trouver des cas où N est de type fini. En fait, comme on l'a déjà mentionné, il est souhaitable de produire des contre-exemples à la rigidité au sens de Grothendieck avec les meilleures propriétés de finitude possibles pour les groupes en jeu.

Une façon de s'attaquer à cela, en développant des idées de Platonov et Tavgen (1990), consiste à introduire des groupes construits par produit fibré. Précisément, pour un quotient de groupes $p\colon \Gamma \twoheadrightarrow Q$, on introduit le groupe

$$P = \Gamma \times_p \Gamma = \{(x,x') \in \Gamma \times \Gamma \mid p(x) = p(x')\},$$

qu'on appelle le *produit fibré* associé au quotient p.

Lemme 3.3 (« Lemme 0-1-2 »). — *Si Γ est de type fini et si Q est de présentation finie, alors le groupe P est de type fini.*

En outre, si Q est infini et si Γ est libre ou est un groupe de surface [11], alors P n'est jamais de présentation finie. Grâce à cette notion de produit fibré, pour construire des

11. C'est-à-dire le groupe fondamental d'une surface de genre $\geqslant 2$.

contre-exemples à la rigidité profinie au sens de Grothendieck, on dispose alors de la variante suivante à la proposition précédente (Bass et Lubotzky, 2000, Th. 6.3) :

Théorème 3.4. — *Soit* $p\colon \Gamma \twoheadrightarrow Q$ *un quotient de groupes, avec* Γ *de type fini et* Q *de présentation finie. On suppose que* $\widehat{Q} = \{1\}$ *et que* $\mathrm{H}_2(Q, \mathbf{Z}) = \{0\}$*. Alors l'inclusion* $P < \Gamma \times \Gamma$ *induit un isomorphisme* $\widehat{P} \simeq \widehat{\Gamma \times \Gamma}$*.*

Le cadre des produits fibrés permet d'avoir un peu de prise sur les questions de finitude, afin de répondre de façon optimale à la question de Grothendieck.

Amélioration des propriétés de finitude. — Une machinerie homologique a été mise en place, notamment dans Baumslag, Bridson, Miller et Short (2000), dans le but d'améliorer les propriétés de finitude des produits fibrés dans les paires de Grothendieck obtenues suivant la stratégie précédente ; elle conduit au résultat général suivant.

Théorème 3.5 (« Théorème 1-2-3 »). — *Soit* $1 \to N \to \Gamma \to Q \to 1$ *une suite exacte de groupes. On note* p *l'application quotient de cette suite et* $P = \Gamma \times_p \Gamma$ *le produit fibré associé. On suppose que* N *est de type fini, que* Γ *est de présentation finie et que* Q *est de type* F_3*. Alors le groupe* P *est de présentation finie.*

Rappelons qu'un groupe Γ est de type F_n s'il existe un complexe cellulaire connexe de groupe fondamental isomorphe à Γ, de revêtement universel contractile et dont le n-squelette est fini ; être de type F_1 revient à être de type fini, et être de type F_2 revient à être de présentation finie. Il existe une version à peu près équivalente en algèbre homologique de ces définitions (Brown, 1994, Ch. VIII). Le Théorème 3.5 permet finalement de répondre par la négative à la question initialement posée par Grothendieck (Bridson et Grunewald, 2004, Th. 1.1) :

Théorème 3.6. — *Il existe des groupes hyperboliques au sens de Gromov* Γ*, résiduellement finis et de dimension* 2*, pour lesquels* $\Gamma \times \Gamma$ *contient des sous-groupes* P *d'indice infini, de présentation finie, non isomorphes à* $\Gamma \times \Gamma$ *et tels que l'inclusion* $P < \Gamma \times \Gamma$ *induise un isomorphisme* $\widehat{P} \simeq \widehat{\Gamma \times \Gamma}$*.*

Une réponse à la question de Grothendieck est enfin obtenue !

3.2. Importance des propriétés de finitude

La sous-section précédente a mis en évidence qu'exhiber de véritables contre-exemples à la question de Grothendieck (*i.e.* des groupes de présentation finie) a nécessité plusieurs vagues d'idées ingénieuses. C'est une illustration du fait que pour les problèmes de rigidité profinie, les questions de finitude ont une importance décisive.

Finitudes et rigidité absolue. — Voici un résultat récent qui l'illustre de façon frappante pour la rigidité profinie absolue (Bridson, Reid et Spitler, 2023, Th. 1.1).

Théorème 3.7. — *Il existe des groupes* Γ *résiduellement finis et de présentation finie possédant les propriétés suivantes.*

(i) Le groupe $\Gamma \times \Gamma$ *est profiniment rigide vis-à-vis de tous les groupes résiduellement finis qui sont* de présentation finie.

(ii) Il existe une infinité de classes d'isomorphisme de groupes de type fini Λ *pour lesquels* $\widehat{\Lambda} \simeq \widehat{\Gamma \times \Gamma}$.

(iii) Pour tout groupe de type fini Λ *profiniment équivalent à* $\Gamma \times \Gamma$ [(12)]*, il existe un plongement* $\Lambda \hookrightarrow \Gamma \times \Gamma$ *qui induit l'isomorphisme* $\widehat{\Lambda} \simeq \widehat{\Gamma \times \Gamma}$.

En convenant d'appeler *genre profini* la classe d'équivalence profinie d'un groupe résiduellement fini de type fini, le théorème dit qu'il existe des groupes résiduellement finis de présentation finie dont le genre profini est infini, mais tels que l'intersection de ce genre avec les groupes de présentation finie est réduite à la classe d'isomorphisme du groupe considéré.

Les groupes Γ connus à ce jour pour se comporter comme dans le théorème 3.7 sont d'origine géométrique, et sont même spécifiquement des groupes fondamentaux de variétés de Seifert (de Saint Gervais, 2024) d'un type particulier, en fait des variétés différentielles de dimension 3 qui fibrent sur des quotients du plan hyperbolique réel. La sous-section suivante met en évidence de façon plus approfondie le rôle important que joue la géométrie en dimension 3 pour les questions de rigidité profinie.

Ajoutons que les groupes Γ comme dans l'énoncé peuvent être supposés profiniment rigides au sens absolu (*cf.* la fin de la sous-section 4.2). Cette situation montre que l'opération de produit direct n'est pas du tout anodine du point de vue de la structure des sous-groupes.

Finitudes et paires de Grothendieck. — Toujours en ce qui concerne les groupes fondamentaux de variétés de Seifert, le résultat suivant souligne que la condition d'être de présentation finie pour le sous-groupe est une véritable obstruction à l'existence de paires de Grothendieck dans ce cadre (Bridson, Reid et Spitler, 2023, Th. 7.3).

Théorème 3.8. — *Soit* M *une variété de Seifert de base un quotient* $\mathbb{H}^2_{\mathbf{R}}/\Delta$ *du plan hyperbolique réel par un groupe fuchsien cocompact* Δ*. Soit* D *le produit direct d'un nombre fini de copies de* $\pi_1(M)$ *et soit* Λ *un sous-groupe de* D *tel que l'inclusion induise un isomorphisme* $\widehat{\Lambda} \simeq \widehat{D}$*. Alors si* Λ *est de présentation finie, il est égal à* D*.*

De façon complémentaire, on peut penser à construire une infinité de paires de Grothendieck au sein d'un même groupe si on impose seulement aux sous-groupes stricts d'être de type fini. Ce qui soutient cette idée est l'existence, bien connue dans les groupes hyperboliques au sens de Gromov, de tours de groupes quotients issus de la théorie de la petite simplification. Voici une version adaptée à ce qu'on a en vue (Bridson, Reid et Spitler, 2023, Th. 8.6).

12. Donc comme au point (ii) précédent.

Théorème 3.9. — *Soit Δ un groupe hyperbolique au sens de Gromov non élémentaire. Alors il existe une suite infinie de quotients deux à deux non isomorphes $\{\Delta \twoheadrightarrow Q_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ où chaque groupe Q_n est de présentation finie, et de centre $Z(Q_n)$ et de complété profini $\widehat{Q}_n$ triviaux.*

En combinant cet énoncé avec la technique des produits fibrés, on peut obtenir (Bridson, Reid et Spitler, 2023, Th. 8.1) :

Théorème 3.10. — *Soit Δ un groupe hyperbolique non élémentaire et soit Γ un groupe tel que $\mathrm{H}_2(\Gamma, \mathbf{Z}) = \{0\}$ et dont Δ est un quotient. Soit G un groupe de type fini qui s'envoie par homomorphisme sur un sous-groupe d'indice fini du groupe des commutateurs $[\Gamma, \Gamma]$. Alors :*

(i) Il existe une suite $\{P_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de sous-groupes de type fini dans $G \times G$, deux à deux distincts et tels que l'inclusion $P_n < G \times G$ induise un isomorphisme $\widehat{P}_n \simeq \widehat{G \times G}$ entre complétions profinies pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(ii) Si G est une extension centrale d'un groupe hyperbolique dans lequel les centralisateurs d'éléments sont virtuellement cycliques, alors les sous-groupes P_n sont deux à deux abstraitement non isomorphes.

Cet énoncé est utilisé dans la preuve du théorème 3.7.

Topologie profinie sur les groupes de type fini. — Une autre approche pour comprendre l'effet de la complétion profinie sur une inclusion de groupes discrets consiste à travailler avec la topologie induite par le complété profini sur le groupe discret de départ : on appelle cette topologie la *topologie profinie* sur le groupe. Dans le cas d'une inclusion de groupes, il est intéressant de comprendre les liens entre la topologie profinie intrinsèque du sous-groupe et celle qui est induite sur le sous-groupe par la topologie profinie du groupe ambiant.

Théorème 3.11. — *Soient $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots \Lambda_n$ des réseaux dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$. Alors tout sous-groupe de présentation finie de $\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \cdots \times \Lambda_n$ est fermé pour la topologie profinie de ce produit direct.*

Une conséquence de ce théorème est qu'il n'existe pas de sous-groupe *de présentation finie* dans $\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \cdots \times \Lambda_n$ qui soit profiniment équivalent à ce produit direct. On va voir dans la sous-section suivante qu'il existe une approche homologique à ce problème de compatibilité de topologies profinies.

3.3. Groupes fondamentaux en dimension 3

Le thème général ici est d'illustrer le fait qu'une hypothèse géométrique sur le groupe de type fini considéré (précisément : être le groupe fondamental d'une variété différentielle de dimension 3) implique des rigidités profinies au moins relatives. Toutes les variantes de rigidité peuvent être considérées dans cette situation. Une référence pour le thème général des groupes fondamentaux de 3-variétés est la monographie Aschenbrenner, Friedl et Wilton (2015).

Rigidité au sens de Grothendieck. — Pour cette rigidité, on dispose désormais d'un résultat complet concernant les groupes fondamentaux de type fini de toutes les 3-variétés (Sun, 2023, Th. 1.2) :

THÉORÈME 3.12. — *Soit M une 3-variété de groupe fondamental Γ. Alors dès que Γ est de type fini, il est rigide au sens de Grothendieck, et ce vis-à-vis de tous ses sous-groupes de type fini.*

Rappelons qu'un groupe fondamental de 3-variété est de présentation finie et résiduellement fini dès qu'il est de type fini (*cf.* Exemple 1.10). Des résultats partiels avaient été obtenus auparavant, notamment pour les 3-variétés compactes, orientables, irréductibles, sans bord ou à bord toroïdal (Boileau et Friedl, 2019). Un ingrédient important dans la preuve est une variante profinie de la théorie de Bass–Serre des amalgames de groupes, compris au moyen d'actions sur des arbres (*cf.* Serre (1977) pour le cas classique des actions de groupes discrets).

Dans le cas hyperbolique, on peut sortir du cadre des variétés différentielles et considérer les orbi-espaces $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}/\Gamma$ en autorisant de la torsion dans Γ : cette situation est couverte par le résultat ci-dessous portant, donc, sur les groupes kleiniens de covolume fini (Bridson, Reid et Spitler, 2022, Th. A) :

THÉORÈME 3.13. — *Soit Γ un réseau de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. Alors Γ est rigide au sens de Grothendieck, et ce vis-à-vis de tous ses sous-groupes de type fini.*

En fait, il est conjecturé que les réseaux kleiniens comme ci-dessus (ainsi que les réseaux fuchsiens) sont tous profiniment rigides au sens absolu (*cf.* 4.3).

Rigidités plus fortes et géométries modèles. — En ce qui concerne les phénomènes de rigidité profinie plus forts, la situation est plus subtile. Voici en effet un résultat qui tempère quelque peu l'enthousiasme produit par les théorèmes précédents (Hempel, 2014) :

THÉORÈME 3.14. — *Il existe des 3-variétés compactes sans bord dont la géométrie est modelée sur $\mathbb{H}^2_{\mathbf{R}} \times \mathbf{R}$ et dont le groupe fondamental n'est pas profiniment rigide, pas même parmi les groupes fondamentaux de 3-variétés.*

Remarque 3.15. — En utilisant des paires de groupes non isomorphes mais profiniment équivalents mises en évidence dans Stebe (1970), on peut obtenir un énoncé similaire au précédent pour des 3-variétés compactes sans bord dont la géométrie est modelée sur le groupe Sol (*cf.* Funar, 2013).

Cependant, si on se restreint à nouveau à la géométrie hyperbolique, on dispose du résultat suivant (Liu, 2023) :

Théorème 3.16. — *Le groupe fondamental d'une variété hyperbolique de dimension* 3 *et de volume fini est presque profiniment rigide parmi les groupes fondamentaux de type fini de variétés de dimension* 3*.*

Cet énoncé signifie que si on se donne une variété M de volume riemannien fini et de revêtement universel l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$ de dimension 3, alors il n'existe qu'un nombre fini de groupes fondamentaux de variétés de dimension 3 qui soient de type fini et dont le complété profini soit isomorphe à $\widehat{\pi_1(M)}$. Ou encore : le genre profini (3.2) du groupe fondamental d'une 3-variété hyperbolique de volume fini rencontre un nombre fini seulement de classes d'isomorphismes de groupes fondamentaux de 3-variétés.

Mentionnons un autre énoncé de rigidité profinie vis-à-vis des groupes fondamentaux de 3-variétés (Wilkes, 2017) :

Théorème 3.17. — *Soit M une variété de Seifert compacte sans bord et asphérique et soit N une variété compacte de dimension* 3*. Si les groupes fondamentaux de M et N sont profiniment équivalents sans que M et N soient homéomorphes, alors les géométries de M et N sont modelées sur $\mathbb{H}^2_{\mathbf{R}} \times \mathbf{R}$, et M et N ont même nombre d'Euler.*

Une version plus complète de ce théorème est un ingrédient important de la preuve de la rigidité profinie absolue des groupes fondamentaux de certaines variétés de Seifert (*cf.* la fin de 4.2).

La bonté au sens de Serre. — Voici enfin une propriété qui s'énonce de façon purement cohomologique (Serre, 1994, I §2.6), mais qui a des conséquences concrètes en termes de topologie profinie sur les groupes de type fini (*cf.* la fin de 3.2).

Définition 3.18. — *On dit qu'un groupe de type fini Γ est* bon au sens de Serre *si la flèche de complétion profinie $\Gamma \to \widehat{\Gamma}$ induit un isomorphisme $\mathrm{H}^n(\widehat{\Gamma}, A) \simeq \mathrm{H}^n(\Gamma, A)$ en cohomologie, pour tout degré n et pour tout Γ-module fini A.*

Un premier exemple de bons groupes est donné par les groupes fuchsiens (Grunewald, Jaikin-Zapirain et Zalesskii, 2008) ; on sait aussi que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ est bon alors que les groupes $\mathrm{SL}_d(\mathbf{Z})$ pour $d \geqslant 3$ ne le sont pas (Serre, 1994, I §2.6) [(13)]. Le théorème suivant est une conséquence de résultats profonds liés à la géométrisation des 3-variétés (*cf.* Agol (2013) et Wilton et Zalesskii (2010) etc.).

Théorème 3.19. — *Les groupes fondamentaux des* 3*-variétés compactes sont bons au sens de Serre.*

Au fond, à quoi la bonté est-elle bonne ?

— En ce qui concerne la torsion, on sait qu'un bon groupe de type fini, résiduellement fini et de dimension cohomologique finie a un complété profini lui aussi sans torsion ; en particulier, les sous-groupes discrets de type fini sans torsion de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ satisfont ces conditions (*cf.* Bridson, Reid et Spitler, 2022, p. 2.3).

13. Situation symétrique de celle de la propriété des sous-groupes de congruence évoquée en 2.3.

— En ce qui concerne les topologies profinies évoquées à la fin de 3.2, et finalement le comportement de la complétion profinie vis-à-vis des suites exactes, on sait que si H est un groupe résiduellement fini, de centre Z supposé de type fini, et si H/Z est bon, alors la topologie profinie de H induit sur Z sa topologie profinie intrinsèque, de sorte qu'on dispose de la suite exacte
$$1 \to \widehat{Z} \to \widehat{H} \to \widehat{H/Z} \to 1.$$

4. Rigidité profinie absolue

Le but de cette dernière section est d'expliquer les grandes lignes de la preuve de la rigidité profinie absolue de certains groupes fondamentaux de 3-variétés (la stratégie générale a déjà été expliquée dans l'introduction). Nous nous concentrons sur le cas du groupe de Bianchi $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[\omega])$. Cependant, nous mentionnerons aussi d'autres sous-groupes discrets d'isométries de l'espace hyperbolique réel de dimension 3, notamment des réseaux cocompacts cette fois, et plus généralement des groupes fondamentaux de variétés de dimension 3 non uniformisées par $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$. Nous finissons, comme il se doit, par quelques conjectures, notamment celle portant sur les groupes libres et énoncée dans l'introduction.

4.1. Rigidité des représentations via la rigidité au sens de Galois

On note $q\colon \mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) \twoheadrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ l'application quotient canonique. On dira qu'un sous-groupe $\Delta < \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ est *Zariski dense* dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ si sa préimage $q^{-1}(\Delta)$ l'est dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. Dans cette sous-section, on résume la preuve du résultat suivant (*cf.* Bridson, McReynolds, Reid et Spitler, 2020, Ex. 4.12).

Théorème 4.1. — *Soit* $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[\omega])$ *et soit* Δ *un groupe de type fini et résiduellement fini, qu'on suppose profiniment équivalent à* Γ*. Alors il existe une représentation Zariski dense* $\rho\colon \Delta \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ *d'image contenue dans le groupe arithmétique* Γ*.*

Ce théorème s'obtient par une machinerie assez générale qui peut être mise en place, au moins en partie, dans le contexte des groupes algébriques et dont les idées sont inspirées de travaux de Lubotzky. La stratégie est d'obtenir des contrôles arithmétiques de plus en plus forts sur les images des représentations irréductibles à valeurs dans SL_2 des groupes de type fini qui sont supposés profiniment équivalents à un groupe kleinien donné. Ceci nécessite de faire des hypothèses de plus en plus fortes sur le réseau kleinien en question. Pour mener à bien cette stratégie, on mobilise plusieurs notions de rigidité (non équivalentes) pour les représentations et les actions de groupes : rigidité au sens des variétés de caractères, rigidité pour les actions sur les arbres, et une rigidité arithmétique par laquelle on commence.

La propriété de Galois-rigidité des représentations. — Dire qu'une représentation Zariski dense $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ est *Galois-rigide*, c'est dire qu'on fabrique toutes les représentations $\Gamma \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ d'image Zariski dense en conjuguant ρ par Galois. Précisément :

Définition 4.2. — *Soient Γ un groupe de type fini et soit $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ une représentation Zariski dense. On suppose que le corps, noté $K_{\rho(\Gamma)}$, engendré par les traces des éléments de $\rho(\Gamma)$ est un corps de nombres. On dit alors que Γ est* Galois-rigide *si $|\mathrm{X}_Z(\Gamma, \mathbf{C})| = [K_{\rho(\Gamma)} : \mathbf{Q}]$ où $\mathrm{X}_Z(\Gamma, \mathbf{C})$ désigne la* variété des caractères *de Γ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, c'est-à-dire l'ensemble des classes de conjugaison des représentations de Γ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$.*

Concernant le réseau hyperbolique $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[\omega])$, on dispose du résultat précis suivant (Bridson, McReynolds, Reid et Spitler, 2020, Th. 6.1) :

Théorème 4.3. — *Soit $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[\omega])$. L'ensemble des classes de conjugaison de représentations Zariski denses $\Gamma \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ est réduit à deux éléments, correspondant à l'inclusion et à la conjugaison complexe de l'inclusion. En particulier, le groupe Γ est Galois-rigide.*

L'idée générale de la preuve de ce théorème est la suivante. On se donne une représentation $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ Zariski dense. Pour faire court, on note K le corps $K_{\rho(\Gamma)}$ de la définition 4.2 et on note $\Delta = \rho(\Gamma)$. Par Zariski densité, le groupe Δ engendre dans $M_2(\mathbf{C})$ une algèbre de quaternions sur K, qu'on note A. Le groupe Γ possède la propriété (FA) de Serre : toute Γ-action sur un arbre a un point fixe. En utilisant cette propriété pour des actions sur des arbres de Bruhat–Tits, on en déduit que la variété des caractères $\mathrm{X}_Z(\Gamma, \mathbf{C})$ est finie, que K est alors un corps de nombres et que toute représentation Zariski dense est à traces entières, *i.e.* la trace de l'image de chaque élément de Γ est un élément de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de K (*cf.* Serre, 1977, Ch. 1 §6.2, Prop. 22). On utilise ensuite une généralisation de la propriété d'approximation forte (Weisfeiler, 1984) pour en déduire que pour presque tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$, de corps résiduel noté $\kappa_{\mathfrak{p}}$, on a un homomorphisme de réduction $\Delta \to \mathrm{PSL}_2(\kappa_{\mathfrak{p}})$ surjectif. En précomposant par $\rho\colon \Gamma \to \Delta$, on obtient ainsi une collections de quotients du groupe arithmétique Γ. Or, ces quotients ont été essentiellement classés en termes d'idéaux premiers des entiers $\mathbf{Z}[\omega]$ (Paoluzzi et Zimmermann, 2001). En comparant ces collections de quotients de Γ, on voit que les corps de nombres K et $\mathbf{Q}[\omega]$ ont le même comportement arithmétique au-dessus de presque tout nombre premier p, et en fait sont égaux. L'algèbre de quaternions A engendrée par Γ est donc une algèbre sur le corps quadratique $\mathbf{Q}[\omega]$. Un point important consiste alors à montrer que A est déployée, *i.e.* isomorphe à $M_2(\mathbf{Q}[\omega])$. Les propriétés arithmétiques de $\mathbf{Q}[\omega]$ permettent ensuite de conjuguer Δ dans Γ. À nouveau en considérant des quotients $\Gamma \to \mathrm{PSL}_2(\kappa)$ avec κ fini, on prouve que ρ est injectif. La conclusion vient en invoquant la rigidité de Mostow, qui implique que l'isomorphisme ρ (déjà modifié par des conjugaisons) provient d'une conjugaison dans le groupe des isométries de $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$.

Équivalence profinie et comptage de représentations. — Soit Λ un groupe de type fini. Pour définir les rigidités intermédiaires qui nous intéressent, on introduit les ensembles suivants de (classes de) représentations

$$\mathrm{X}_b(\Lambda, \overline{\mathbf{Q}_p}) = \{\text{représentations } \Lambda \to \mathrm{PSL}_2(\overline{\mathbf{Q}_p}) \text{ bornées}\} \,/\sim$$
$$\mathrm{X}_Z(\Lambda, \overline{\mathbf{Q}_p}) = \{\text{représentations } \Lambda \to \mathrm{PSL}_2(\overline{\mathbf{Q}_p}) \text{ Zariski denses}\} \,/\sim$$
$$\mathrm{X}_{b,Z}(\Lambda, \overline{\mathbf{Q}_p}) = \mathrm{X}_b(\Lambda, \overline{\mathbf{Q}_p}) \cap \mathrm{X}_Z(\Lambda, \overline{\mathbf{Q}_p}) \,/\sim$$
$$\mathrm{X}_c(\widehat{\Lambda}, \overline{\mathbf{Q}_p}) = \{\text{représentations } \widehat{\Lambda} \to \mathrm{PSL}_2(\overline{\mathbf{Q}_p}) \text{ continues}\} \,/\sim$$
$$\mathrm{X}_{c,Z}(\widehat{\Lambda}, \overline{\mathbf{Q}_p}) = \{\text{représentations } \widehat{\Lambda} \to \mathrm{PSL}_2(\overline{\mathbf{Q}_p}) \text{ continues et Zariski denses}\} \,/\sim$$

où $/\sim$ signifie qu'on identifie les représentations qui sont conjuguées à l'arrivée. Notons que par compacité les applications continues issues de $\widehat{\Lambda}$ sont automatiquement bornées.

L'énoncé qui suit (Bridson, McReynolds, Reid et Spitler, 2020, Prop. 4.1) est un résultat de compatibilité de l'équivalence profinie avec le comptage des représentations Zariski denses dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$.

Proposition 4.4. — *Soient Λ et Δ des groupes de type fini tels que $\widehat{\Lambda} \simeq \widehat{\Delta}$. Alors on a : $|\mathrm{X}_Z(\Lambda, \mathbf{C})| = |\mathrm{X}_Z(\Delta, \mathbf{C})|$.*

Cette proposition est intéressante quand on sait par ailleurs que l'un des ensembles est fini. Les principaux ingrédients pour la démontrer sont des énoncés qui portent sur un seul groupe, tout d'abord de type fini, puis sur la complétion profinie de celui-ci. Précisément, pour Λ un groupe de type fini donné, on prouve les résultats intermédiaires suivants.

— Soient $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \colon \Lambda \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ des représentations Zariski denses. Alors pour presque tout nombre premier p, il existe un isomorphisme de corps $\theta_p \colon \mathbf{C} \simeq \overline{\mathbf{Q}_p}$ tel que $\theta_p \circ \phi_i$ est bornée pour tout i.

— Si $|\mathrm{X}_Z(\Lambda, \mathbf{C})|$ est fini, alors on a les égalités $|\mathrm{X}_Z(\Lambda, \mathbf{C})| = |\mathrm{X}_{b,Z}(\Lambda, \overline{\mathbf{Q}_p})|$ et $\mathrm{X}_Z(\Lambda, \overline{\mathbf{Q}_p}) = \mathrm{X}_{b,Z}(\Lambda, \overline{\mathbf{Q}_p})$ pour presque tout nombre premier p.

— Pour tout nombre premier p, l'application de restriction $\mathrm{X}_c(\widehat{\Lambda}, \overline{\mathbf{Q}_p}) \to \mathrm{X}_b(\Lambda, \overline{\mathbf{Q}_p})$ est bijective et elle établit par restriction une bijection $\mathrm{X}_{c,Z}(\widehat{\Lambda}, \overline{\mathbf{Q}_p}) \simeq \mathrm{X}_{b,Z}(\Lambda, \overline{\mathbf{Q}_p})$.

Le premier point permet de passer des représentations à coefficients complexes à celles à coefficients non archimédiens, contexte dans lequel le fait d'être borné a une bonne interprétation arithmétique (intégralité) ; sa preuve est un usage classique de la normalisation de Noether pour un anneau bien choisi de coefficients des représentations. Le deuxième point permet de se ramener aux représentations bornées, les nombres premiers exclus (en nombre fini) étant les diviseurs des dénominateurs des éléments de l'anneau de coefficients précité. Le troisième point fait enfin intervenir le complété profini du groupe Λ ; le principal argument de preuve est la combinaison de la propriété universelle de la complétion profinie et la nature totalement discontinue de la topologie de $\mathrm{SL}_2(\overline{\mathbf{Q}_p})$. Si l'on revient à la preuve de la Proposition 4.4, c'est ce dernier point qui permet le transfert du comptage (puisque la seule hypothèse faite est l'équivalence profinie des deux groupes discrets comparés).

On peut améliorer le second point technique ci-dessus en faisant une hypothèse de bornitude, qui revient en non archimédien à une hypothèse d'intégralité. La preuve du point ci-dessous consiste essentiellement à déduire la bornitude des coefficients matriciels à partir de celle des traces ; l'argument est classique (par exemple par combinaison du lemme de densité de Burnside et du caractère non dégénéré de la trace).

— Soit Γ un groupe de type fini tel que pour toute représentation Zariski dense $\rho\colon \Gamma \to (\mathrm{P})\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ il existe un corps de nombres K, d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_K$, tel que $\mathrm{tr}(\rho(\gamma)) \in \mathcal{O}_K$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Alors pour tout nombre premier p, on a $\mathrm{X}_Z(\Gamma, \overline{\mathbf{Q}_p}) = \mathrm{X}_{b,Z}(\Gamma, \overline{\mathbf{Q}_p})$.

Ce dernier énoncé est l'argument essentiel pour démontrer le premier point du résultat suivant (Bridson, McReynolds, Reid et Spitler, 2020, Lemma 4.6).

Lemme 4.5. — *Soit Λ un groupe de type fini Galois-rigide, de corps de nombres associé K, dont on note n_K le degré. On suppose que toutes les représentations Zariski denses de Λ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ sont à traces entières. Soit Δ un groupe de type fini profiniment équivalent à Λ. On a alors les propriétés suivantes.*

(i) $|\mathrm{X}_{b,Z}(\Lambda, \overline{\mathbf{Q}_p})| = n_K$ *pour tout nombre premier p.*

(ii) $|\mathrm{X}_Z(\Delta, \mathbf{C})| = n_K$.

(iii) $\mathrm{X}_{b,Z}(\Delta, \overline{\mathbf{Q}_p}) = \mathrm{X}_Z(\Delta, \overline{\mathbf{Q}_p})$ *pour tout nombre premier p.*

Le point (ii) est une étape importante car il transfère un comptage de représentations irréductibles complexes entre deux groupes de même complétion profinie.

Contrôle arithmétique de l'image des représentations. — Cependant, dans le cas où $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[\omega])$ et où le groupe de type fini résiduellement fini Λ est tel que $\widehat{\Lambda} \simeq \widehat{\Gamma}$, l'objectif est d'être capable de dire qu'une certaine flèche $\Lambda \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ Zariski dense est en fait à valeurs dans le réseau Γ. C'est ici qu'interviennent les algèbres de quaternions de façon plus poussée. Leur usage est naturel dans cette partie puisque le groupe Γ visé est un sous-groupe arithmétique de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ et que les groupes arithmétiques se fabriquent à partir des points entiers des formes de SL_2 sur les corps de nombres. Faire intervenir ces algèbres sera tout aussi crucial quand il s'agira d'invoquer des arguments de topologie des variétés de dimension 3, à la section suivante.

Pour plus de détails concernant ce paragraphe, on renvoie à Maclachlan et Reid (2003, Ch. 3). Étant donné un sous-groupe $\Delta < \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ de type fini, on définit les extensions de $\mathbf{Q}$ suivantes :

$$K_\Delta = \mathbf{Q}\Big(\{\mathrm{tr}(\delta)\}_{\delta\in\Delta}\Big) \quad \text{et} \quad K\Delta = \mathbf{Q}\Big(\{\mathrm{tr}(\delta^2)\}_{\delta\in\Delta}\Big).$$

La preuve d'une conséquence standard de la rigidité locale des réseaux (dite de Calabi–Weil, *cf.* Raghunathan, 1972, Prop. 6.6) montre que si en outre $|\mathrm{X}_Z(\Delta, \mathbf{C})| < \infty$, alors à conjugaison près Δ est à coefficients dans un corps de nombres. On se place dans ce cas. Le corps K_Δ est appelé le *corps des traces* de Δ et le corps $K\Delta$ est appelé le *corps des traces invariant* de Δ ; on peut aussi voir ce dernier comme le corps des traces du sous-groupe $\Delta^{(2)}$ engendré par les carrés δ^2 pour $\delta \in \Delta$ (ou encore comme le corps engendré par les traces des éléments $\mathrm{Ad}\big(q^{-1}(\delta)\big)$ où Ad est la représentation adjointe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}\big(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})\big)$, si on a en tête le cas général des groupes algébriques). Le groupe $q^{-1}(\Delta)$ engendre une algèbre de quaternions dans $M_2(\mathbf{C})$, définie sur le corps K_Δ et qu'on note $A_0\Delta$; de façon similaire, le groupe $q^{-1}(\Delta^{(2)})$ engendre une algèbre de quaternions définie sur $K\Delta$, qu'on note $A\Delta$ et qu'on appelle l'*algèbre de quaternions invariante* de Δ. Si $q^{-1}(\Delta)$ est à traces entières alors il engendre un ordre sur les entiers de K_Δ dans l'algèbre de quaternions $A_0\Delta$, et réciproquement.

Revenons au contrôle (à conjugaison près) de l'image des homomorphismes Zariski denses $\Lambda \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. Celui-ci découle de résultats plus techniques que ceux qu'on a énoncés jusqu'à présent.

On se place dans la situation suivante. On se donne un corps de nombres K et une algèbre de quaternions B sur K ; on note $\mathcal{O}$ un ordre maximal de B. On se donne enfin Γ un sous-groupe de type fini dans les éléments de $\mathcal{O}$ de norme réduite 1. Voici une version simplifiée de (Bridson, McReynolds, Reid et Spitler, 2020, Th. 4.8).

Théorème 4.6. — *On part de données arithmétiques $K, B, \mathcal{O}$ et d'un groupe Γ comme ci-dessus. On suppose Γ Galois-rigide. Soit Δ un groupe de type fini et résiduellement fini, qu'on suppose profiniment équivalent à Γ. Alors il existe un corps de nombres K', une algèbre de quaternions B' sur K', un ordre maximal $\mathcal{O}'$ de B' et un homomorphisme ϕ de Δ vers les éléments dans $\mathcal{O}'$ de norme réduite 1, de sorte que le groupe Δ est Galois-rigide de corps associé K' et que les corps K et K' ont les mêmes anneaux d'adèles associés.*

Le théorème 4.8 de Bridson, McReynolds, Reid et Spitler (2020) formule des contraintes arithmétiques plus précises, notamment sur les places de K et K' : celles-ci sont en bijection et, suivant cette bijection, les complétions de K et K' d'une part, et de B et B' d'autre part, sont isomorphes ; en outre, si l'on prend en compte toutes les contraintes fournies par le plein énoncé du théorème, les possibilités pour K', B' et $\mathcal{O}'$ sont en nombre fini.

Revenons finalement à la preuve du théorème de 4.1. En utilisant l'hypothèse d'équivalence profinie $\widehat{\Delta} \simeq \widehat{\Gamma}$, on transfère le comptage des représentations Zariski denses de Γ à Δ ; d'où des représentations Zariski denses $\Delta \to \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. Il s'agit ensuite de « redresser » une telle représentation pour qu'elle soit à valeurs dans Γ (théorème 4.6). Les considérations générales de Galois-rigidité permettent de voir qu'on peut conjuguer une image $\rho(\Delta)$ dans un réseau arithmétique d'éléments de norme réduite 1 dans un ordre d'une algèbre de quaternions sur un corps de nombres K'. C'est à ce stade qu'on utilise spécifiquement le fait que le réseau $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[\omega])$ est défini au moyen du corps quadratique $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$: on déduit tout d'abord que $K' = \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ et le fait que $\rho(\Delta) < \Gamma$.

4.2. Le rôle de la topologie des 3-variétés

Cette sous-section décrit maintenant la seconde partie, de nature géométrique, de la preuve de l'énoncé suivant (on fournira ensuite une liste de groupes pour lesquels on dispose également de tels énoncés : parmi les réseaux cocompacts de $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$, parmi les groupes fondamentaux de 3-variétés plus générales).

Théorème 4.7. — *Le groupe de Bianchi* $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[\omega])$ *est profiniment rigide au sens absolu.*

À partir d'un groupe Δ de type fini, résiduellement fini et tel que $\widehat{\Delta} \simeq \widehat{\Gamma}$, les arguments de la sous-section précédente (Galois-rigidité et contrôle arithmétique des images au moyen des algèbres de quaternions) fournissent une flèche $\rho\colon \Delta \to \Gamma$ d'image Zariski dense dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$. Afin de conclure la démonstration, il s'agit de démontrer que cette image, qu'on désignera désormais par L, est égale à Γ et que ρ est injectif. Faisons dès à présent la réduction suivante. Supposons qu'on ait démontré l'égalité $L = \Gamma$. Alors la représentation ρ donne lieu à un homomorphisme de groupes surjectif $\hat{\rho}\colon \widehat{\Gamma} \to \widehat{\Gamma}$. Or les groupes profinis (topologiquement) de type fini sont hopfiens (1.2), donc $\hat{\rho}$ ainsi que sa restriction ρ sont injectifs.

Pour conclure à la rigidité profinie absolue de Γ*, on peut désormais se concentrer sur la preuve de l'égalité* $L = \Gamma$*, où* $L = \mathrm{Im}(\rho)$.

Quelques réseaux de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$ *et leurs géométries associées.* — On va utiliser quelques réseaux non uniformes et de petit covolume dans les arguments de comptage en lien avec l'étude de l'image de la représentation ρ. Rappelons qu'on peut identifier $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ au sous-groupe de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}})$ des isométries qui préservent l'orientation. Pour des détails sur les faits de géométrie hyperbolique mentionnées ci-dessous, on renvoie aux références citées par Bridson, McReynolds, Reid et Spitler (2020, Sec. 5).

Désignons par τ un tétraèdre idéal [14] régulier de $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$ et notons v_0 son volume. On peut découper τ en 24 polyèdres isométriques comme suit : on note c_0 le centre de la sphère inscrite dans τ ; cette sphère rencontre chaque 2-face f de τ en un point $c(f)$ qui est le centre du cercle inscrit dans f, et ce cercle lui-même rencontre chaque arête e de f en un point $c(e)$. On obtient chacune des 24 copies des sous-polyèdres cherchés en choisissant successivement une des quatre faces f de τ, une des trois arêtes e de f et un des deux sommets à l'infini ξ contenus dans e : pour ces choix, la copie correspondante est le sous-polyèdre de sommets $\{c_0; c(f); c(e); \xi\}$. Fixons un tel sous-polyèdre. Suivant un théorème de Poincaré, le groupe engendré par les réflexions isométriques par rapport à ses faces, qu'on notera Λ_0, est un groupe de Coxeter. Pour la suite, on voit surtout Λ_0 comme l'unique réseau non uniforme (à conjugaison près) de $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$ de covolume minimal, ce dernier valant $\frac{v_0}{24}$. Son sous-groupe $\Gamma_0 = \Lambda_0 \cap \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}})$ d'indice 2 est isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Z}[\omega])$, et ce dernier contient lui-même $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[\omega])$ comme sous-groupe d'indice 2. L'inclusion $\Gamma < \Lambda_0$ est donc d'indice 4 et il existe deux autres groupes

14. Les sommets sont contenus dans la sphère à l'infini.

intermédiaires (avec des inclusions d'indice 2 comme précédemment), qu'on note Λ_1 et Λ_2. Dans (Bridson, McReynolds, Reid et Spitler, 2020), il est démontré que ces cinq groupes sont les seuls réseaux de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}})$ à contenir Γ (Lemme 5.2) et leurs abélianisés sont calculés explicitement – ils sont systématiquement finis (Lemme 5.1).

Étude de l'image. — Revenons à la flèche $\rho\colon \Delta \twoheadrightarrow L < \Gamma$. Pour prouver que $L = \Gamma$, il suffit de voir que tout sous-groupe strict, non élémentaire, de type fini dans Γ a un quotient fini que Γ n'a pas. En effet, un quotient fini de L est automatiquement un quotient fini de Δ, et donc de Γ par l'hypothèse d'équivalence profinie ; notons que L est non élémentaire car Zariski dense dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$.

Un des arguments techniques importants est de compter, et de classer au moyen du premier nombre de Betti (si besoin est, au moyen de l'abélianisé), les classes de conjugaison des sous-groupes de petit indice dans Γ. Pour ce faire, une approche géométrique consiste à utiliser un sous-groupe arithmétique de Γ de petit indice mais dont l'interprétation géométrique est plus concrète (au moins pour les géomètres en dimension 3) : il s'agit du groupe fondamental d'une variété qui est l'espace total d'une fibration en tores épointés sur le cercle. On note M_s cette variété et Γ_s son groupe fondamental. La variété M_s est hyperbolique, de dimension 3 et de volume fini ; c'est une cousine du complémentaire du nœud de 8 mais elle s'en différencie notamment par l'abélianisé de son groupe fondamental, qui vaut $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ (alors que pour le complémentaire du nœud de 8, cet abélianisé vaut $\mathbf{Z}$). La connaissance précise des caractéristiques topologiques de la variété M_s, notamment de ses revêtements, permet de comprendre les sous-groupes d'indice fini de Γ_s, et finalement de Γ. Pour l'instant, bornons-nous à mentionner les faits suivants : le groupe Γ_s est sans torsion, d'indice 12 dans Γ, son abélianisé $\mathrm{H}_1(\Gamma_s, \mathbf{Z}) = \frac{\Gamma_s}{[\Gamma_s,\Gamma_s]}$ vaut $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$; enfin, Γ_s est un sous-groupe de congruence de Γ car il contient le noyau $\Gamma(2)$ de l'homomorphisme induit par la réduction modulo (2) de $\mathbf{Z}[\omega]$. On peut vérifier qu'à conjugaison près Γ_s est le seul sous-groupe Δ de Γ qui s'insère dans une chaîne $\Omega \triangleleft \Delta < \Gamma$ de sorte que $[\Gamma : \Delta] \leqslant 12$, $[\Delta : \Omega] = 5$, $b_1(\Delta) \geqslant 1$ et $b_1(\Omega) \geqslant 5$ (Bridson, McReynolds, Reid et Spitler, 2020, Prop. 7.3).

Afin de pouvoir utiliser les propriétés topologiques de la 3-variété hyperbolique M_s, on introduit donc $L_s = L \cap \Gamma_s$ et $\Delta_s = \rho^{-1}(\Gamma_s)$.

- On commence par démontrer que L *est d'indice fini dans* Γ.

Tout d'abord, puisque L_s est un quotient de Δ_s, on a $b_1(L_s) \leqslant b_1(\Delta_s)$, et de l'équivalence profinie $\widehat{\Delta} \simeq \widehat{\Gamma}$ on déduit que Δ_s a le même abélianisé qu'un sous-groupe d'indice au plus 12 de Γ. Mais on peut voir que tout sous-groupe Δ de Γ d'indice $\leqslant 12$ satisfait $b_1(\Delta) \leqslant 1$ [(15)]. Ceci fournit donc $b_1(L_s) \leqslant 1$. Par ailleurs, le groupe L_s est sans torsion (car contenu dans Γ_s) et non abélien (car Zariski dense) : il définit donc une variété hyperbolique $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}/L_s$. Si L était d'indice infini dans Γ, alors cette variété serait de volume infini ; ceci impliquerait qu'une sous-variété compacte à bord de même type

15. C'est une vérification effectuée par ordinateur et le code est disponible en ligne.

d'homotopie [16] aurait une composante de bord de genre $\geqslant 2$ et par dualité on aurait $b_1(L_s) \geqslant 2$, ce qu'on vient d'exclure.

• On conclut en démontrant que L *n'est pas un sous-groupe strict de* Γ.
Déjà, on peut voir que $\widehat{\Delta}_s \simeq \widehat{\Gamma}_s$ au moyen de l'équivalence profinie entre Δ et Γ. Pour cela, on commence par faire un raisonnement dans Δ. Comme L_s est d'indice fini dans Γ_s on a $b_1(L_s) \geqslant b_1(\Gamma_s) = 1$, et donc $b_1(L_s) = 1$ par ce qui précède. De même, on a $b_1\big(L_s \cap \Gamma(2)\big) \geqslant b_1\big(\Gamma(2)\big) = 5$. En fait, en posant $\Delta(2) = \rho^{-1}\big(\Gamma(2)\big)$, on peut voir que Δ_s satisfait $\Delta(2) \lhd \Delta_s < \Gamma$, $[\Delta : \Delta_s] \leqslant 12$, $[\Delta_s : \Delta(2)] = 5$, $b_1(\Delta_s) \geqslant 1$ et $b_1\big(\Delta(2)\big) \geqslant 5$. Par l'équivalence profinie $\widehat{\Delta} \simeq \widehat{\Gamma}$, on peut transférer ces conditions dans Γ pour voir que $\overline{\Delta_s} \cap \Gamma$ vérifie la caractérisation de Γ_s ci-dessus, et lui est donc égal.

La toute dernière étape exploite encore la géométrie de la variété $M_s = \mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}/\Gamma_s$. Tout d'abord, la description de M_s comme fibré donne lieu à une suite exacte

$$1 \to F \to \Gamma_s \to \mathbf{Z} \to 1$$

où F est un groupe libre de rang 2. En traçant cette suite exacte sur le sous-groupe d'indice fini L, on obtient

$$1 \to F_L \to L_s \to \mathbf{Z} \to 1$$

où $F_L = L \cap F$ est un groupe libre de rang fini $\geqslant 2$, car sous-groupe d'indice fini de F. Puisque $b_1(\Gamma_s) = 1$, on voit que F est le noyau de l'abélianisation de F. Un argument important ici est que Γ_s et L_s induisent les topologies profinies de F et F_L, respectivement. On en déduit que $\widehat{F}$ est le noyau de l'unique application $\widehat{\Gamma}_s \to \widehat{\mathbf{Z}}$ et que $\widehat{F}_L$ est le noyau de l'unique application $\widehat{L}_s \to \widehat{\mathbf{Z}}$; ainsi l'épimorphisme $\widehat{\Delta}_s \simeq \widehat{\Gamma}_s \twoheadrightarrow \widehat{L}_s$ envoie $\widehat{F}$ sur $\widehat{F}_L$, ce implique que F_L est de rang exactement 2, et donc est égal à F (ou encore : $F < L$). Géométriquement, cela dit que la variété $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}/L_s$ est un revêtement cyclique de M_s et un argument de monodromie impose $L_s = \Gamma_s$. On a alors $\Gamma_s = L_s < L < \Gamma$ avec $[L : L_s] = 12$ par surjectivité de ρ et puisque $[\Delta : \Delta_s] = 12$, ce qui permet de conclure que $\Gamma = L$ puisque $[\Gamma : \Gamma_s] = 12$.

Autres groupes profiniment rigides. — L'esquisse de la preuve du théorème 4.7 a été quand même un peu détaillée car les ingrédients ont été réinvestis ensuite, essentiellement par les mêmes auteurs, pour démontrer d'autres résultats de rigidité profinie absolue. Dans le même papier, les auteurs prouvent un autre résultat important, cette fois sur un réseau kleinien cocompact (Bridson, McReynolds, Reid et Spitler, 2020, Th. 9.1).

Théorème 4.8. — *Soit W la* variété de Weeks*, c'est-à-dire la variété hyperbolique compacte de dimension 3 de volume minimal. On note Γ_W son groupe fondamental. Alors Γ_W est profiniment rigide au sens absolu.*

La stratégie de preuve est similaire, mais elle fait un usage plus poussé d'arguments de topologie et géométrie en dimension 3.

16. Un tel *cœur compact* existe toujours en dimension 3.

Pour terminer sur les contributions dans le même papier, les auteurs utilisent la rigidité de Mostow pour prouver que les quatre réseaux de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}})$ contenant $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}[\omega])$ sont eux aussi profiniment rigides au sens absolu. De même, certains groupes apparentés au réseau de Weeks Γ_W, notamment les groupes $\Gamma_W \times \mathbf{Z}^r$ pour $r \in \mathbf{N}$, sont eux aussi profiniment rigides au sens absolu (Bridson, McReynolds, Reid et Spitler, 2020, Th. 9.7).

Finissons en mentionnant deux autres résultats de rigidité profinie au sens absolu, l'un portant sur des réseaux fuchsiens et l'autre sur des groupes fondamentaux de variétés de Seifert fibrant sur le quotient du plan hyperbolique réel $\mathbb{H}^2_{\mathbf{R}}$ par un des précédents groupes fuchsiens. Ces derniers sont en fait les sous-groupes d'indice 2 (préservant l'orientation) de groupes engendrés par les réflexions par rapport aux arêtes d'un triangle hyperbolique dont les angles intérieurs sont de la forme $\frac{\pi}{p}$, $\frac{\pi}{q}$ et $\frac{\pi}{r}$, avec p, q, r entiers ; un tel sous-groupe de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ est noté $\Delta(p, q, r)$. Voici donc un résultat de rigidité portant sur des groupes fuchsiens (Bridson, McReynolds, Reid et Spitler, 2021, Th. A).

Théorème 4.9. — *Les sous-groupes suivants de* $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$

$$\Delta(3,3,4),\ \Delta(3,3,5),\ \Delta(3,3,6),\ \Delta(2,5,5),\ \Delta(4,4,4),$$
$$\Delta(2,3,8),\ \Delta(2,3,10),\ \Delta(2,3,12),\ \Delta(2,4,5),\ \Delta(2,4,8).$$

sont arithmétiques et profiniment rigides au sens absolu.

En ce qui concerne les groupes fondamentaux de certaines variétés de Seifert (Bridson, Reid et Spitler, 2023, Th. 1.3), on a :

Théorème 4.10. — *Soit M une variété de Seifert de base le quotient $\mathbb{H}^2_{\mathbf{R}}/\Delta$, où Δ est un des* 10 *groupes de triangles suivants*

$$\Delta(3,3,4),\ \Delta(3,3,5),\ \Delta(3,3,6),\ \Delta(2,5,5),\ \Delta(4,4,4),$$
$$\Delta(2,3,8),\ \Delta(2,3,10),\ \Delta(2,3,12),\ \Delta(2,4,5),\ \Delta(2,4,8).$$

Alors le groupe fondamental $\pi_1(M)$ est profiniment rigide au sens absolu.

4.3. Conjecture sur le groupe libre, et sur d'autres groupes

L'étude de la relation d'équivalence profinie entre les groupes de type fini n'en est sans doute qu'à ses débuts ; il est donc naturel de clore ce point d'étape par quelques conjectures et remarques cardinales.

Autour des groupes libres. — Voici sans doute la conjecture principale du domaine, qui a déjà été mentionnée dans l'introduction.

Conjecture 4.11. — *Pour tout entier $n \geqslant 2$, le groupe libre F_n est profiniment rigide au sens absolu ; autrement dit, tout groupe de type fini résiduellement fini possédant les mêmes quotients finis que F_n est un groupe libre.*

Si l'on revient aux relations d'équivalence d'inspiration géométrique ou mesurable (*cf.* 2.1), cette conjecture illustre bien en quoi l'équivalence profinie est complémentaire des précédentes. En effet, dans le cadre géométrique ou mesurable on voit les groupes libres comme des réseaux de groupes de Lie simples de rang 1, qui sont typiquement les groupes aux propriétés de rigidité les plus faibles à cet égard [(17)]. Par exemple, tous les groupes libres sont dans la même classe de quasi-isométrie ou d'équivalence mesurable, cette dernière contenant beaucoup plus de groupes (Gaboriau, 2005). C'est une nouvelle manifestation du fait que l'équivalence profinie est amenée à jouer un rôle complémentaire des autres relations d'équivalence utilisées à ce jour pour comprendre les groupes de type fini.

Si l'on revient à la conjecture elle-même, Jaikin-Zapirain (2023) montre que les groupes profiniment équivalents à un groupe libre sont résiduellement nilpotents. Selon Bridson, c'est une possible avancée importante sur la question car elle permet d'envisager la réduction de la conjecture à une rigidité relative pour une classe de groupes déjà considérée par Baumslag (celle des *parafree groups* en anglais).

Mentionnons enfin une autre conjecture de rigidité en lien avec les groupes libres, qui fait intervenir l'opération de produit direct.

Conjecture 4.12. — *Pour tout entier $n \geqslant 2$, le groupe $F_n \times F_n$ est profiniment rigide parmi les groupes de présentation finie.*

Là aussi, on voit que les propriétés de finitude sont cruciales car on sait que pour tout entier $n \geqslant 2$, le groupe $F_n \times F_n$ n'est pas profiniment rigide parmi les groupes seulement supposés de type fini.

Autour des groupes fuchsiens et kleiniens. — Il existe également une conjecture pour les réseaux fuchsiens et kleiniens, qui sont les réseaux des espaces symétriques de rang 1 des deux plus petites dimensions possibles.

Conjecture 4.13. — *Tous les réseaux de* $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ *et de* $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ *sont profiniment rigides au sens absolu.*

Pour l'instant, les rigidités disponibles en dimension 2 (cas fuchsien) portent sur des groupes de triangle particuliers. Signalons que Stover (2019) exhibe pour tout $n \geqslant 2$ des paires de réseaux uniformes et sans torsion dans $\mathrm{PU}(n,1)$ qui sont profiniment équivalents mais pas isomorphes.

Autour des réseaux de groupes de Lie. — Enfin, on peut considérer la classe des réseaux de groupes de Lie semi-simples, pour laquelle on dispose d'une grande quantité de techniques de natures très différentes.

17. Les propriétés de rigidité géométriques ou mesurables s'affaiblissent même à mesure que la dimension de l'espace symétrique pertinent diminue ; or les groupes libres sont des réseaux du plan hyperbolique réel...

Conjecture 4.14. — *Le réseau de rang supérieur* $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$ *est profiniment rigide au sens absolu.*

Si l'on revient à l'esquisse de preuve présentée dans les deux précédentes sous-sections, on comprend que cette conjecture est une motivation supplémentaire pour l'étude encore incomplète des sous-groupes d'indice infini des réseaux de groupes de Lie. Une autre difficulté est que le groupe $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Z})$ n'est pas bon au sens de Serre (*cf.* la fin de 3.3).

Finissons par une toute dernière remarque géométrique. On a vu que la géométrie de dimension 3 jouait un rôle prépondérant dans les résultats présentés et on peut se demander quelle autre géométrie pourrait être amenée à intervenir. La réponse n'est pas claire compte tenu des faits suivants. Tout groupe de présentation finie est le groupe fondamental d'une variété symplectique compacte sans bord de dimension 4 (Gompf, 1995). Il existe des groupes kählériens qui sont non résiduellement finis (Toledo, 1990). Pour toutes sortes de possibilités et d'obstructions à réaliser un groupe de présentation fini comme groupe fondamental d'une variété de dimension donnée avec une structure géométriques plus ou moins riche, on renvoie à Amorós, Burger, Corlette, Kotschick et Toledo (1996).

Références

Ian Agol (2013). « The virtual Haken conjecture », *Doc. Math.* **18**. With an appendix by Ian Agol, Daniel Groves, and Jason Manning, p. 1045-1087.

Menny Aka (2012a). « Arithmetic groups with isomorphic finite quotients », *J. Algebra* **352**, p. 322-340.

——— (2012b). « Profinite completions and Kazhdan's property (T) », *Groups Geom. Dyn.* **6** (2), p. 221-229.

Jaume Amorós, Marc Burger, Kevin Corlette, Dieter Kotschick et Domingo Toledo (1996). *Fundamental groups of compact Kähler manifolds.* T. 44. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, p. xii+140.

Matthias Aschenbrenner, Stefan Friedl et Henry Wilton (2015). *3-manifold groups.* EMS Series of Lectures in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, p. xiv+215.

Hyman Bass et Alexander Lubotzky (2000). « Nonarithmetic superrigid groups : counterexamples to Platonov's conjecture », *Ann. of Math. (2)* **151** (3), p. 1151-1173.

Gilbert Baumslag (1974). « Residually finite groups with the same finite images », *Compositio Math.* **29**, p. 249-252.

Gilbert Baumslag, Martin R. Bridson, Charles F. Miller III et Hamish Short (2000). « Fibre products, non-positive curvature, and decision problems », *Comment. Math. Helv.* **75** (3), p. 457-477.

Gérard Besson (2006). « Preuve de la conjecture de Poincaré en déformant la métrique par la courbure de Ricci (d'après G. Perelman) », in : 307. Séminaire Bourbaki. Vol. 2004/2005, Exp. No. 947, ix, 309-347.

Michel Boileau et Stefan Friedl (2019). « Grothendieck rigidity of 3-manifold groups », *Groups Geom. Dyn.* **13** (4), p. 1133-1150.

Martin R. Bridson (1998). « Controlled embeddings into groups that have no non-trivial finite quotients », in : *The Epstein birthday schrift.* T. 1. Geom. Topol. Monogr. Geom. Topol. Publ., Coventry, p. 99-116.

Martin R. Bridson et Fritz J. Grunewald (2004). « Grothendieck's problems concerning profinite completions and representations of groups », *Ann. of Math. (2)* **160** (1), p. 359-373.

Martin R. Bridson et André Haefliger (1999). *Metric spaces of non-positive curvature.* T. 319. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, p. xxii+643.

Martin R. Bridson, David B. McReynolds, Alan W. Reid et Ryan Spitler (2020). « Absolute profinite rigidity and hyperbolic geometry », *Ann. of Math. (2)* **192** (3), p. 679-719.

——— (2021). « On the profinite rigidity of triangle groups », *Bull. Lond. Math. Soc.* **53** (6), p. 1849-1862.

Martin R. Bridson, Alan W. Reid et Ryan Spitler (2022). « Profinite rigidity, Kleinian groups, and the cofinite Hopf property », *Michigan Math. J.* **72**, p. 25-49.

——— (2023). *Absolute profinite rigidity, direct products, and finite presentability.* arXiv : 2312.06058 [math.GR].

Kenneth S. Brown (1994). *Cohomology of groups.* T. 87. Graduate Texts in Mathematics. Corrected reprint of the 1982 original. Springer-Verlag, New York, p. x+306.

Marc Burger et Shahar Mozes (2000). « Lattices in product of trees », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (92), p. 151-194.

Pierre-Emmanuel Caprace et Bertrand Rémy (2010). « Non-distortion of twin building lattices », *Geom. Dedicata* **147**, p. 397-408.

Tamunonye Cheetham-West, Alexander Lubotzky, Alan W. Reid et Ryan Spitler (2022). *Property FA is not a profinite property.* arXiv : 2212.08207 [math.GT].

Pierre de la Harpe et Alain Valette (1989). « La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts (avec un appendice de Marc Burger) », *Astérisque* (175). With an appendix by M. Burger, p. 158.

Henri Paul de Saint Gervais (2024). « Fibrés en cercles et fibrés de Seifert : définitions ». Page web disponible à l'adresse suivante : https://analysis-situs.math.cnrs.fr/.

John D. Dixon, Marcus P. F. du Sautoy, Avinoam Mann et Dan Segal (1999). *Analytic pro-p groups.* Second. T. 61. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, p. xviii+368.

Daniel Echtler et Holger Kammeyer (2023). *Bounded cohomology is not a profinite invariant*. arXiv : 2305.18904 [math.GT].

Louis Funar (2013). « Torus bundles not distinguished by TQFT invariants », *Geom. Topol.* **17** (4). With an appendix by Funar and Andrei Rapinchuk, p. 2289-2344.

Alex Furman (1999). « Gromov's measure equivalence and rigidity of higher rank lattices », *Ann. of Math. (2)* **150** (3), p. 1059-1081.

Damien Gaboriau (2002). « On orbit equivalence of measure preserving actions », in : *Rigidity in dynamics and geometry (Cambridge, 2000)*. Springer, Berlin, p. 167-186.

——— (2005). « Examples of groups that are measure equivalent to the free group », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **25** (6), p. 1809-1827.

Robert E. Gompf (1995). « A new construction of symplectic manifolds », *Ann. of Math. (2)* **142** (3), p. 527-595.

Alexandre Grothendieck (1970). « Représentations linéaires et compactification profinie des groupes discrets », *Manuscripta Math.* **2**, p. 375-396.

Fritz Grunewald, Andrei Jaikin-Zapirain et Pavel Zalesskii (2008). « Cohomological goodness and the profinite completion of Bianchi groups », *Duke Math. J.* **144** (1), p. 53-72.

Peter Haïssinsky (2009). « Géométrie quasiconforme, analyse au bord des espaces métriques hyperboliques et rigidités [d'après Mostow, Pansu, Bourdon, Pajot, Bonk, Kleiner...] » In : 326. Séminaire Bourbaki. Vol. 2007/2008, Exp. No. 993, ix, 321-362.

John P. Hempel (1987). « Residual finiteness for 3-manifolds », in : *Combinatorial group theory and topology (Alta, Utah, 1984)*. T. 111. Ann. of Math. Stud. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, p. 379-396.

——— (2014). *Some 3-manifold groups with the same finite quotients*. arXiv : 1409.3509 [math.GT].

Cyril Houdayer (2012). « Invariant percolation and measured theory of nonamenable groups [after Gaboriau-Lyons, Ioana, Epstein] », in : 348. Séminaire Bourbaki : Vol. 2010/2011. Exposés 1027–1042, Exp. No. 1039, ix, 339-374.

Andrei Jaikin-Zapirain (2023). « The finite and soluble genus of finitely generated free and surface groups ». Prépublication disponible à l'adresse suivante : https ://matematicas.uam.es/ andrei.jaikin/preprints/profinitefree.pdf.

Holger Kammeyer, Steffen Kionke, Jean Raimbault et Roman Sauer (2020). « Profinite invariants of arithmetic groups », *Forum Math. Sigma* **8**, Paper No. e54, 22.

Holger Kammeyer et Roman Sauer (2020). « S-arithmetic spinor groups with the same finite quotients and distinct ℓ^2-cohomology », *Groups Geom. Dyn.* **14** (3), p. 857-869.

Evgenii I. Khukhro et Viktor D. Mazurov, éd. (2018). *The Kourovka notebook*. Nineteenth. Unsolved problems in group theory, March 2019 update. Sobolev Institute of Mathematics. Russian Academy of Sciences. Siberian Branch, Novosibirsk, p. 248.

Steffen Kionke et Eduard Schesler (2021). *Amenability and profinite completions of finitely generated groups*. arXiv : 2106.08742 [math.GT].

Marc Lackenby (2010). « Detecting large groups », *J. Algebra* **324** (10), p. 2636-2657.

Yi Liu (2023). « Finite-volume hyperbolic 3-manifolds are almost determined by their finite quotient groups », *Invent. Math.* **231** (2), p. 741-804.

Antonio López Neumann (2023). « Finitely presented simple groups and measure equivalence », *Colloq. Math.* **172** (2), p. 261-279.

Alexander Lubotzky (2014). « Finiteness properties and profinite completions », *Bull. Lond. Math. Soc.* **46** (1), p. 103-110.

Colin Maclachlan et Alan W. Reid (2003). *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds.* T. 219. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, p. xiv+463.

Sylvain Maillot (2010). « Variétés hyperboliques de petit volume (d'après D. Gabai, R. Meyerhoff, P. Milley...) » In : 332. Séminaire Bourbaki. Volume 2008/2009. Exposés 997–1011, Exp. No. 1011, x, 405-417.

Nikolay Nikolov et Dan Segal (2007). « On finitely generated profinite groups. I. Strong completeness and uniform bounds », *Ann. of Math. (2)* **165** (1), p. 171-238.

Donald S. Ornstein et Benjamin Weiss (1980). « Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **2** (1), p. 161-164.

Luisa Paoluzzi et Bruno Zimmermann (2001). « Finite quotients of the Picard group and related hyperbolic tetrahedral and Bianchi groups », in : t. 32. Dedicated to the memory of Marco Reni, p. 257-288.

Vladimir P. Platonov et Oleg I. Tavgen (1990). « Grothendieck's problem on profinite completions and representations of groups », *K-Theory* **4** (1), p. 89-101.

Madabusi S. Raghunathan (1972). *Discrete subgroups of Lie groups.* T. Band 68. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas]. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, p. ix+227.

Luis Ribes et Pavel Zalesskii (2010). *Profinite groups.* Second. T. 40. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]. Springer-Verlag, Berlin, p. xvi+464.

Peter G. Scott (1973a). « Compact submanifolds of 3-manifolds », *J. London Math. Soc. (2)* **7**, p. 246-250.

——— (1973b). « Finitely generated 3-manifold groups are finitely presented », *J. London Math. Soc. (2)* **6**, p. 437-440.

Jean-Pierre Serre (1964). « Exemples de variétés projectives conjuguées non homéomorphes », *C. R. Acad. Sci. Paris* **258**, p. 4194-4196.

——— (1977). *Arbres, amalgames,* SL_2. T. No. 46. Astérisque. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass. Société Mathématique de France, Paris, 189 pp. (1 plate).

——— (1994). *Cohomologie galoisienne.* Fifth. T. 5. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, p. x+181.

Rachel Skipper, Stefan Witzel et Matthew C. B. Zaremsky (2019). « Simple groups separated by finiteness properties », *Invent. Math.* **215** (2), p. 713-740.

Peter F. Stebe (1970). « A residual property of certain groups », *Proc. Amer. Math. Soc.* **26**, p. 37-42.

Matthew Stover (2019). « Lattices in $\mathrm{PU}(n,1)$ that are not profinitely rigid », *Proc. Amer. Math. Soc.* **147** (12), p. 5055-5062.

Hongbin Sun (2023). « All finitely generated 3-manifold groups are Grothendieck rigid », *Groups Geom. Dyn.* **17** (2), p. 385-402.

Balasubramanian Sury (2003). *The congruence subgroup problem.* T. 24. Texts and Readings in Mathematics. An elementary approach aimed at applications. Hindustan Book Agency, New Delhi, p. xvi+301.

Simon Thomas et Boban Velickovic (1999). « On the complexity of the isomorphism relation for finitely generated groups », *J. Algebra* **217** (1), p. 352-373.

Domingo Toledo (1990). « Examples of fundamental groups of compact Kähler manifolds », *Bull. London Math. Soc.* **22** (4), p. 339-343.

Boris Weisfeiler (1984). « Strong approximation for Zariski-dense subgroups of semi-simple algebraic groups », *Ann. of Math. (2)* **120** (2), p. 271-315.

Gareth Wilkes (2017). « Profinite rigidity for Seifert fibre spaces », *Geom. Dedicata* **188**, p. 141-163.

John S. Wilson (2011). « Finite index subgroups and verbal subgroups in profinite groups », in : 339. Séminaire Bourbaki. Vol. 2009/2010. Exposés 1012–1026, Exp. No. 1026, x, 387-408.

Henry Wilton et Pavel Zalesskii (2010). « Profinite properties of graph manifolds », *Geom. Dedicata* **147**, p. 29-45.

Robert J. Zimmer (1984). *Ergodic theory and semisimple groups.* T. 81. Monographs in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, p. x+209.

Bertrand Rémy

UMPA – UMR 5669
École normale supérieure de Lyon
46 allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07
FRANCE
E-mail : `bertrand.remy@ens-lyon.fr`