Séminaire BOURBAKI Juin 2024
76^{e} année, 2023–2024, n^{o} 1223

LIVRES BRISÉS POUR DES FLOTS DE REEB EN DIMENSION 3 [d'après Colin, Dehornoy et Rechtman]

par **Anna Florio**

1. Introduction

L'objectif de ce texte est de présenter la définition de livre brisé portant un flot de Reeb sur une variété M de dimension 3. Cette notion, qui généralise la définition de livre ouvert, a été introduite par Colin, Dehornoy et Rechtman (2023).

Pour parler de flot de Reeb, il faut partir d'une 1-forme lisse α, appelée *forme de contact*, définie sur M, telle que $\alpha \wedge d\alpha$ est une forme volume ; le noyau de α définit alors un champ de plans, appelé *structure de contact*. Grâce au théorème de Frobenius, la structure de contact peut être pensée comme étant l'opposé d'un champ de plans localement intégrable. Il est alors possible définir un champ de vecteurs, appelé *champ de Reeb*, en partant de α. Le flot de Reeb est le flot engendré par ce champ.

Des exemples classiques de flots de Reeb sont les flots géodésiques sur une surface riemannienne, ainsi que les flots hamiltoniens sur un niveau d'énergie compact, pour un hamiltonien sur $\mathbb{R}^4$ strictement convexe. En mécanique céleste, le flot du problème restreint circulaire à 3 corps est aussi un exemple de flot de Reeb.

De manière informelle, la notion de livre brisé est la donnée d'une réunion finie de nœuds, notée K, et d'un feuilletage du complémentaire de K, décrit au voisinage de chaque nœud par certains modèles locaux. La définition précise sera donnée dans le §2.2. Son intérêt dynamique apparaît lorsqu'on demande que le livre brisé *porte* une forme de contact : les singularités du feuilletage sont alors des orbites périodiques et l'intérieur de chaque feuille est positivement transverse au champ de Reeb associé.

Quelle forme de contact peut être portée par un livre brisé ? Le résultat principal de Colin, Dehornoy et Rechtman (2023) répond à cette question :

THÉORÈME. — *Pour toute forme de contact α non dégénérée d'une variété fermée, orientée, de dimension 3, il existe un livre brisé qui porte α.*

Après avoir rappelé les notions nécessaires pour parler de flots de Reeb et de livres brisés, nous présenterons les conséquences dynamiques remarquables d'une telle construction. Notamment, l'existence de livres brisés portant une forme de contact a permis aux auteurs de montrer que pour le champ de Reeb d'une forme de contact non dégénérée, le nombre d'orbites périodiques est soit égal à 2, soit infini. De plus, ils donnent une condition topologique sur la variété qui suffit à assurer que l'entropie topologique [(1)] du flot de Reeb soit positive [(2)], quelle que soit la forme de contact choisie.

Nous allons parler aussi des travaux de Colin, Dehornoy, Hryniewicz et Rechtman (2023) et de Contreras et Mazzucchelli (2022), qui, en parallèle, ont montré qu'un flot de Reeb générique admet toujours une section de Birkhoff. Le point clef de la preuve de ces résultats est l'existence de livres brisés pour la forme de contact définissant le flot de Reeb.

Dans la section 3, nous allons présenter les idées principales pour construire un livre brisé, ainsi que les outils qui entrent en jeu. Dans la section 4, nous allons donner quelques idées des preuves des conséquences dynamiques de Colin, Dehornoy et Rechtman (2023).

Remerciements

Je suis très reconnaissante à Ana Rechtman d'avoir répondu à toutes mes questions, ainsi qu'à Patrick Bernard, Vincent Colin, Marco Mazzucchelli, Umberto Hryniewicz et Anne Vaugon pour leurs explications. Je remercie Nicolas Bourbaki, Martin Leguil et Anne Vaugon pour leur relecture, ainsi que Yating Liu pour l'aide avec la réalisation des dessins.

2. Définitions et résultats principaux

Pour introduire la définition de livre brisé de Colin, Dehornoy et Rechtman (2023), nous avons d'abord besoin de parler de sections et sections de Birkhoff pour un flot sur une variété de dimension 3 et de dynamique de contact. Dans la suite, sauf mention explicite du contraire, tous les objets considérés seront lisses (C^∞) et M indiquera une variété de dimension 3, fermée (*i.e.* compacte et sans bord) et orientée.

2.1. Sections de Birkhoff pour un flot en dimension 3

Dans ce paragraphe, nous donnons les définitions de section et de section de Birkhoff pour un flot en dimension 3. Ce seront des notions clefs dans la construction des livres brisés.

Considérons un champ de vecteurs X non singulier sur une variété M. Notons ϕ_t^X le flot engendré [(3)] par X. Pour comprendre les propriétés du flot, il est parfois possible d'étudier une dynamique plus simple, la dynamique d'un difféomorphisme induit par le

1. L'entropie topologique est une quantité qui mesure la complexité d'un système dynamique, voir le §4.1.

2. Ici et dans la suite, « positive » signifie « strictement positive ».

3. On omettra le X et on écrira ϕ_t quand le contexte rendra la dépendance en X claire. Dans la suite, on se permettra aussi des glissements, comme la notation ϕ_t^g pour noter le flot géodésique sur une surface riemannienne (S, g), voir Exemple 2.3.

flot sur une surface. Comment faire ? Les sections de Birkhoff sont un outil précieux qui permet une telle étude.

Définition 2.1. — *Une X-section est une immersion* $\imath\colon (\Sigma, \partial\Sigma) \to (M, K)$ *d'une surface compacte* Σ *à bord* $\partial\Sigma$ *telle qu'on ait* $\imath(\partial\Sigma) = K$*, où* K *est une réunion finie d'orbites périodiques pour* X*, et que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

- *pour chaque composante connexe* c *de* $\partial\Sigma$*, l'image* $\imath(c)$ *est un revêtement (éventuellement multiple) d'une orbite périodique de* X *;*
- *la restriction* $\imath|_{\mathrm{int}(\Sigma)}$ *est un plongement et l'image* $\imath(\mathrm{int}(\Sigma))$ [(4)] *est positivement transverse* [(5)] *à* X*.*

Si l'orbite d'un point de $\imath(\mathrm{int}(\Sigma))$ rencontre la section une infinité de fois, nous pouvons définir l'application de retour sur la section le long de cette orbite. Si cela est possible pour tous les points, nous parlons alors de section de Birkhoff.

Définition 2.2. — *Une section de Birkhoff est une* X*-section telle qu'il existe* $T > 0$ *pour lequel, pour tout* $x \in M$*, on a* $\phi^X_{[0,T]}(x) \cap \imath(\Sigma) \neq \emptyset$*, i.e. chaque orbite rencontre en temps au plus* T *la surface* $\imath(\Sigma)$*.*

Exemple 2.3. — Soit (S^2, g) la sphère de dimension 2 munie d'une métrique riemannienne. Considérons le fibré unitaire tangent $M = T^1_g S^2$, et le flot géodésique (ϕ^g_t) sur M. Soit $\gamma \subset S^2$ une géodésique fermée de longueur L : elle existe toujours et divise la sphère en deux hémisphères. On peut alors construire une section pour le flot comme suit. Considérons $\Sigma = \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times [0, \pi]$. Fixons un des deux hémisphères et considérons l'ensemble des $(x, v) \in T^1_g S^2$ tels que $x \in \gamma$ et v est un vecteur unitaire qui pointe vers l'hémisphère fixé. Un tel ensemble peut être réalisé comme immersion de l'anneau Σ. Dans le cas où la courbure associée à la métrique g est strictement positive, l'anneau qu'on vient de décrire est en effet une section de Birkhoff. Il s'agit d'un résultat de Birkhoff (1917).

En particulier, l'existence d'une section de Birkhoff nous permet de définir une application de premier retour sur $\imath(\mathrm{int}(\Sigma))$ et, quitte à avoir un bon comportement au bord, un difféomorphisme sur une surface. Pour illustrer l'importance de l'existence de tels objets, nous donnons l'exemple suivant. Supposons que notre surface Σ est un disque. Le théorème de Brouwer assure qu'un homéomorphisme sur le disque ouvert a toujours au moins un point fixe. Cela implique alors que notre flot a au moins deux orbites périodiques, le bord de notre disque et l'orbite qui correspond au point fixe de l'application de premier retour sur la section de Birkhoff.

Comme évoqué ci-dessus, pour définir une application de premier retour sur notre surface qui soit un difféomorphisme, nous avons besoin d'une définition plus forte : on parle alors de section de Birkhoff *∂-forte*. Définissons maintenant cette notion.

4. Ici et dans la suite, la notation $\mathrm{int}(\cdot)$ désigne l'intérieur d'un ensemble.
5. L'image $\imath(\mathrm{int}(\Sigma))$ est positivement transverse à X si X est transverse à la surface et si le vecteur normal à la surface et le champ X pointent du même côté.

Étant donnée une orbite périodique γ pour le flot de X, nous pouvons éclater cette orbite de la façon suivante. Introduisons un fibré en cercle $\mathbb{T}_\gamma$ au-dessus de γ : il s'agit du (double) quotient $(T_\gamma M/T\gamma)/\mathbb{R}_+$, où $T_\gamma M$ est la réunion des espaces tangents $T_x M$ pour tout $x \in \gamma$. Dans cette définition, nous considérons d'abord le fibré normal au champ de vecteurs, et ensuite le quotient par $\mathbb{R}_+$. Soit alors K une réunion finie d'orbites périodiques. Nous pouvons retirer de notre variété ces orbites et remplacer chacune par le tore $\mathbb{T}_\gamma$ correspondant. On obtient une nouvelle variété compacte, orientée, à bord, d'ensemble sous-jacent

$$M_K = (M \setminus K) \cup \bigcup_{\gamma \in K} \mathbb{T}_\gamma\,.$$

Le champ de vecteurs X peut être prolongé sur M_K : la linéarisation DX le long de γ induit un champ de vecteurs sur le tore $\mathbb{T}_\gamma$. Nous continuerons à noter X l'extension à M_K du champ de vecteurs X sur M. Le champ X est tangent au bord de M_K. Soit S une X-section, dont le bord est contenu dans K et telle que $\mathrm{int}(S) \cap K = \emptyset$. En considérant les directions selon lesquelles S approche le bord, on obtient une surface à bord sur M_K, que nous notons S_K.

Définition 2.4. — *Soit S une X-section ; notons $K = \partial S$. La X-section S est ∂-forte si, pour chaque $\gamma \in K$, la restriction de S_K à $\mathbb{T}_\gamma$ est une sous-variété de dimension* 1 *transverse au champ de vecteurs X. Une section de Birkhoff S est ∂-forte si c'est une X-section ∂-forte et la restriction de S_K sur chaque $\mathbb{T}_\gamma$ est une section globale pour l'extension de X* [6] *sur $\mathbb{T}_\gamma$.*

L'intérêt de travailler avec des sections ∂-forte réside dans la régularité de l'application de premier retour associée.

Proposition 2.5. — *Soit X un champ de vecteurs non singulier sur M. Si S est une section de Birkhoff ∂-forte pour X, alors l'application de premier retour sur* $\mathrm{int}(S)$ *du flot de X définit un difféomorphisme lisse de* $\mathrm{int}(S)$.

2.2. De la géométrie à la dynamique : structure et forme de contact, champ de Reeb, décomposition en livre ouvert

Ici, nous introduisons les notions principales de la géométrie de contact et de la dynamique du champ de Reeb associé. Nous expliquons les définitions de livre ouvert et livre ouvert rationnel et ses liens avec la topologie et la dynamique.

Considérons une variété M de dimension 3, orientée, sans bord. Munissons M d'un champ d'hyperplans ξ pour lequel il existe une 1-forme lisse α telle que $\xi = \ker(\alpha)$ et telle que $\alpha \wedge d\alpha$ est une forme volume. Le champ ξ est appelé *structure de contact* et la forme α qui permet de la définir est dite *forme de contact.* Plusieurs formes de contact peuvent définir la même structure de contact : en effet, dès qu'on considère une fonction $f\colon M \to \mathbb{R}^*$, la forme $f\alpha$ est aussi une forme de contact qui définit la même structure de contact.

6. *i.e.* chaque point de S_K revient en temps fini en suivant la dynamique induite par X sur S_K.

Le premier exemple auquel nous pouvons penser est $(\mathbb{R}^3, \xi_{\mathrm{std}})$, où ξ_{std} est le noyau de la forme de contact $\alpha_{\mathrm{std}} = dz - ydx$, voir Figure 1. En effet, le théorème de Darboux nous assure que pour tout point x d'une variété de contact (M, ξ) de dimension 3 il existe un voisinage U de x dans M, un voisinage U' de 0 dans $\mathbb{R}^3$ et un difféomorphisme $\varphi\colon U \to U'$ tels que $\varphi^*\xi_{\mathrm{std}} = \xi$. Toute variété de dimension 3, lisse, compacte, admet une structure de contact, voir Martinet (1971) et Lutz (1971).

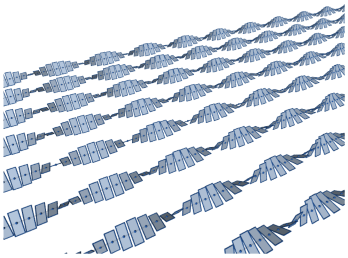

Figure 1. La structure de contact standard sur $\mathbb{R}^3$ (image de P. Massot).

En fixant la forme de contact α qui définit ξ, nous pouvons définir un champ de vecteur R_α, dit *de Reeb*, comme suit :

$$\begin{cases} d\alpha(R_\alpha, \cdot) = 0\,, \\ \alpha(R_\alpha) = 1\,. \end{cases} \tag{1}$$

Le flot (ϕ_t^α) associé au champ de Reeb est dit *flot de Reeb*. En fixant α_{std} sur $(\mathbb{R}^3, \xi_{\mathrm{std}})$, le champ de Reeb associé est $\frac{\partial}{\partial z}$ et le flot de Reeb est le flot de translation le long de la direction z. Une classe d'exemples de flots de Reeb est constituée par les flots géodésiques sur une surface riemannienne (S, g). Dans ce cas, la forme de contact sur le fibré tangent unitaire peut être explicitée de la manière suivante

$$\alpha_{(x,v)}(\cdot) = g_x(v, d\pi_{(x,v)}(\cdot)) \qquad \forall (x,v) \in T_g^1 S\,,$$

où $\pi\colon T_g^1 S \to S$ est la projection sur la surface. Nous renvoyons à Geiges (2008) pour une introduction complète à la géométrie de contact. Nous remarquons que le champ de Reeb est toujours transverse à la structure de contact et, de plus, R_α dépend de la forme de contact choisie. La dynamique définie à partir de α préserve la structure de contact, ainsi que la forme de contact et la forme volume $\alpha \wedge d\alpha$.

Étant donné M, même sans structure de contact, nous pouvons essayer de décomposer la variété en *livre ouvert*, notion introduite par Winkelnkemper (1973) :

Définition 2.6 (Décomposition en livre ouvert ou en livre ouvert rationnel)
Une décomposition en livre ouvert de M est un couple (K, π) où
— *K est une sous-variété lisse, compacte, de dimension 1 de M, appelée reliure ;*
— *$\pi\colon M \setminus K \to S^1$ est une fibration telle que, si on note D^2 le disque de dimension 2, dans un voisinage $K \times D^2$ de la reliure $K = K \times \{0\}$, l'application π est la coordonnée angulaire de D^2.*

Chaque feuille $\pi^{-1}(\theta)$ est alors l'intérieur d'une surface compacte dont le bord est contenu dans K. L'adhérence d'une feuille $\pi^{-1}(\theta)$ dans M est appelée une page.

Un couple (K, π) est une décomposition en livre ouvert rationnel si, dans un voisinage $K \times D^2$ de la reliure $K = K \times \{0\}$, où D^2 est muni des coordonnées polaires, nous avons $\pi(x, r, \theta) = n\theta$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Chaque $\pi^{-1}(\theta)$ admet n composantes connexes.

Chaque variété de dimension 3, fermée, orientée, admet une décomposition en livre ouvert.

Exemple 2.7. — Considérons la sphère $S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Un premier exemple de décomposition en livre ouvert de S^3 est (K, π), où $K := \{0\} \times S^1$ et $\pi \colon (z_1, z_2) \in S^3 \setminus K \to \frac{z_1}{|z_1|} \in S^1$. Chaque page est un disque, voir Figure 2.

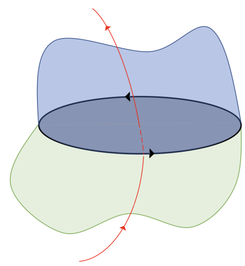

FIGURE 2. Décomposition en livre ouvert de S^3. Le cercle en noir est la reliure. Trois pages, difféomorphes à un disque, sont dessinées, dont le bord est le cercle noir.

Étant donné des orientations de M et de la reliure K, chaque page $\pi^{-1}(\theta)$ hérite aussi d'une orientation. Un livre ouvert peut être décrit aussi comme la donnée d'une surface compacte à bord Σ, dont le bord est la reliure K, et d'une application de premier retour $f \colon \Sigma \to \Sigma$ qui est un difféomorphisme satisfaisant $f|_{\partial\Sigma} = \mathrm{Id}$. Plus précisément, si (K, π) est un livre ouvert, alors on peut lui associer un couple (Σ, f) en choisissant comme Σ une page $\pi^{-1}(\theta)$, pour un certain $\theta \in S^1$, et comme f l'application de premier retour sur $\pi^{-1}(\theta)$ du flot d'un champ de vecteurs transversal aux pages. Réciproquement, étant donné un couple (f, Σ), on peut considérer la variété à bord V obtenue en regardant $\Sigma \times [0, 1]$ et en identifiant $\Sigma \times \{0\}$ et $\Sigma \times \{1\}$ grâce à f. Donc, on décrit V comme le quotient $\Sigma \times [0, 1]/\sim$, où $(x, 1) \sim (f(x), 0)$. Si on colle cette variété avec la variété $W := \partial\Sigma \times D^2$ le long du bord commun $\partial\Sigma \times S^1$, on obtient une variété dont le livre ouvert associé est le suivant : la reliure est $\partial\Sigma \times \{0\} \subset W$ et l'application π est, dans W, la coordonnée angulaire de D^2, et, dans $V = \Sigma \times [0, 1]/\sim$, la coordonnée dans $[0, 1]$.

Comment relier alors la notion de variété de contact à une décomposition en livre ouvert ? Cela est possible grâce à la définition suivante :

DÉFINITION 2.8. — *Soit (M, ξ) une variété de contact et soit (K, π) une décomposition en livre ouvert de M. La structure de contact ξ est dite portée par la décomposition (K, π) s'il existe une forme de contact α telle que*

— *la forme α définit la structure de contact, i.e.* $\xi = \ker(\alpha)$ *;*
— *la reliure K est une réunion finie d'orbites périodiques pour le champ de Reeb R_α ;*
— *le champ de Reeb R_α est positivement transverse à l'intérieur de chaque page du livre ouvert.*

Remarque 2.9. — La définition 2.8 est celle donnée dans Colin, Dehornoy et Rechtman (2023). À la différence de Giroux (2002), ils ne demandent pas que la reliure soit positivement tangente au champ de Reeb par rapport à l'orientation induite par les pages.

Exemple 2.10. — En identifiant $\mathbb{C}^2$ avec $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, nous pouvons munir S^3 de la structure de contact $\xi = \ker(\sum_{i=1,2} x_i dy_i - y_i dx_i|_{S^3})$. Cette structure de contact est portée par la décomposition en livre ouvert donnée dans l'Exemple 2.7. Pour vérifier la définition, nous pouvons considérer la forme de contact standard dont le flot de Reeb associé est le flot de Hopf : toutes les orbites sont périodiques de même période et leur réunion est la fibration de Hopf.

Une question naturelle est alors de savoir quand une structure de contact est portée par un livre ouvert et, inversement, si chaque décomposition en livre ouvert peut porter une structure de contact. Cette relation a été clarifiée par Giroux (2002) :

Théorème 2.11 (Giroux). — *Il existe une bijection entre l'ensemble des structures de contact sur M modulo isotopie et l'ensemble des décompositions en livre ouvert de M modulo stabilisation positive*[7]*.*

Plus précisément, Thurston et Winkelnkemper (1975) montrent que chaque décomposition en livre ouvert porte une structure de contact ; réciproquement, Giroux prouve que chaque structure de contact est portée par un livre ouvert et, de plus, si deux structures sont portées par le même livre ouvert, alors elles sont isotopes. En particulier, nous pouvons en déduire que toute structure de contact admet une forme de contact dont le flot de Reeb a une section de Birkhoff.

2.3. Décomposition en livre brisé : une décomposition à dynamique fixée

À la fin de la section précédente, nous avons vu que pour toute structure de contact, on peut trouver une forme de contact portée par un livre ouvert. Que peut-on dire si nous fixons la dynamique, et pas seulement la géométrie ? Autrement dit, pour une variété de contact (M, ξ), si nous fixons une forme de contact α qui définit ξ, existe-t-il toujours une décomposition en livre ouvert adaptée au champ de Reeb R_α donné ? C'est bien dans cette perspective que le résultat de Colin, Dehornoy et Rechtman (2023) nous permet d'en dire plus, grâce à l'introduction des décompositions en livre brisé. Ici, nous donnons la définition de livre brisé et précisons ses liens avec la dynamique.

7. La stabilisation positive est une opération sur un livre ouvert ; si on pense au livre ouvert comme la donnée d'une surface Σ et d'une application de premier retour f sur Σ, la stabilisation positive ajoute une anse à Σ et compose f avec un twist de Dehn le long d'une courbe passant par l'anse.

Définition 2.12. — *Soit M une variété de dimension 3, fermée, orientée. Une décomposition de M en livre brisé est un couple $(K, \mathcal{F})$ où*

— *K est une sous-variété lisse, compacte, de dimension 1 de M, appelée reliure ;*

— *$\mathcal{F}$ est un feuilletage co-orienté de $M \setminus K$ tel que chaque feuille est plongée dans $M \setminus K$. On demande, en plus, que l'adhérence de chaque feuille dans M, appelée page, soit une surface à bord, dont le bord est contenu dans K, et que dans un voisinage de la reliure, le feuilletage puisse être décrit comme suit.*

La reliure K est la réunion de deux types de composantes connexes : radiales et brisées.

Une composante $\gamma \subset K$ est radiale s'il existe un voisinage U de γ tel que, pour chaque feuille $F \in \mathcal{F}$, chaque composante connexe de $F \cap U$ est un anneau $\mathbb{T}\times]0,1[$ et $\gamma = \mathbb{T} \times \{0\}$.

Une composante $\gamma \subset K$ est brisée s'il existe un voisinage U de γ tel que, pour chaque feuille $F \in \mathcal{F}$, chaque composante connexe de $F \cap U$ est un anneau $\mathbb{T}\times]0,1[$ et tel que

— *soit $\gamma = \mathbb{T} \times \{0\}$ (la composante de la feuille est radiale) ;*

— *soit le bord $\mathbb{T} \times \{0,1\}$ de l'anneau est contenu dans ∂U (la composante de la feuille est hyperbolique).*

L'ensemble des composantes radiales (resp. brisées) est noté K_r (resp. K_b).

Observons qu'autour d'une composante radiale d'un livre brisé $(K, \mathcal{F})$, le feuilletage $\mathcal{F}$ a le même modèle local qu'un livre ouvert rationnel.

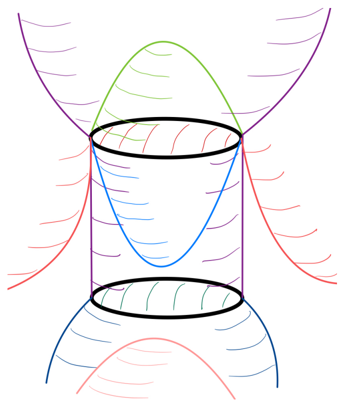

Figure 3. Un morceau d'une décomposition en livre brisé. Les cercles noirs en gras sont des composantes de la reliure. Le cercle en haut est radial, en bas brisé. Les pages sont les surfaces colorées (dessinées en traits fins), pensées comme immergées dans la variété de dimension 3, dont le bord est soit l'un de deux cercles, soit les deux cercles.

Étant donné une décomposition en livre brisé, autour d'une composante brisée $\gamma \in K_b$, il y a deux types de familles de feuilles qui s'intercalent. Si l'on coupe avec une section transverse à γ, on voit en effet des familles d'hyperboles et des familles de rayons. Nous parlons de secteurs hyperboliques et secteurs radiaux. Dans la suite, nous allons considérer une classe particulière de livres brisés, qu'on appellera *livres brisés non dégénérés* : nous regardons des décompositions en livre brisé telles que, autour de

FIGURE 4. Le livre brisé dans une petite section transverse à une composante radiale à droite, et à une composante brisée à gauche. Les feuilles hyperboliques sont dessinées en traits gras, les feuilles radiales en traits fins.

chaque composante brisée de la reliure, il y a exactement quatre secteurs hyperboliques, intercalés avec quatre secteurs radiaux.

Comme pour les livres ouverts, nous pouvons préciser quand une forme de contact est portée par une décomposition en livre brisé.

DÉFINITION 2.13. — *Soit α une forme de contact sur M et soit $(K, \mathcal{F})$ une décomposition en livre brisé. La forme α est dite portée par le livre brisé si le champ de Reeb R_α est tangent à la reliure K et positivement transverse à chaque feuille du feuilletage $\mathcal{F}$.*

Nous allons travailler avec des flots *non dégénérés*. Un flot est dit non dégénéré si toutes ses orbites périodiques sont non dégénérées. Une orbite est dite *non dégénérée* si la linéarisation de l'application de retour sur une section transverse à l'orbite n'admet aucune racine de l'unité comme valeur propre. En particulier, pour un flot non dégénéré, une orbite périodique peut être de trois types :

— *hyperbolique positive* si les valeurs propres de la linéarisation de l'application de retour sont des réels positifs ;
— *hyperbolique négative* si les valeurs propres sont des réels négatifs ;
— *elliptique* si les valeurs propres sont de la forme $e^{2\pi i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Par analogie, une forme de contact est *non dégénérée* si le flot de Reeb associé est non dégénéré.

Remarque 2.14. — Si α est une forme de contact non dégénérée et portée par un livre brisé $(K, \mathcal{F})$, alors ce livre brisé est non dégénéré. En effet, la composante brisée de la reliure K_b ne peut pas contenir des orbites périodiques elliptiques, sinon on trouverait des feuilles (hyperboles) tangentes à R_α. Donc, toute orbite $\gamma \in K_b$ est hyperbolique, positive ou négative. Comme les feuilles doivent être transverses au champ de vecteurs, les variétés stables et instables [8], localement, doivent être contenues dans un secteur hyperbolique. De plus, il ne peut pas exister de secteur hyperbolique strictement contenu entre deux branches de variétés stables et instables : cela violerait là encore la condition de transversalité. Nous pouvons alors conclure qu'il y a exactement 4 secteurs hyperboliques, et notre livre brisé est bien non dégénéré.

8. Voir §2.5 pour la définition de variétés stables et instables.

Dans une décomposition en livre brisé, nous avons des pages particulières, ce sont les pages *rigides*, les pages « à la frontière » entre deux types différents de pages.

Définition 2.15. — *Une page S d'un livre brisé est dite régulière si elle appartient à l'intérieur d'une famille à un paramètre de pages difféomorphes à S. Une page est dite rigide si elle n'est pas régulière.*

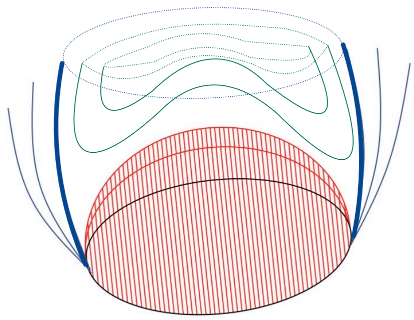

Figure 5. La page remplie de lignes et la page en gras sont des exemples de pages rigides dans un livre brisé.

Maintenant que nous avons introduit la définition de livre ouvert et livre brisé, nous pouvons observer que les livres brisés sont une généralisation des livres ouverts.

Lemme 2.16. — *Soit $(K, \mathcal{F})$ une décomposition en livre brisé telle que $K_b = \emptyset$. Alors $(K, \mathcal{F})$ donne une décomposition en livre ouvert rationnel.*

Démonstration. — Supposons que la composante brisée de la reliure soit vide. Nous pouvons regarder l'éclatement de $M \setminus K$ introduit au §2.1, qui est une variété compacte à bord. S'il n'y a pas de composantes brisées dans K, nous obtenons un feuilletage orientable sur l'éclatement dont toutes les feuilles sont fermées et transverses au bord. Par le théorème de Haefliger (1962, Section 3.3), nous pouvons déduire que l'espace des feuilles est homéomorphe à un cercle. Si cet espace est un cercle, alors toutes les feuilles sont homéomorphes. En revenant à $M \setminus K$, nous avons alors une fibration et il n'y a aucune page rigide. Cela nous permet de déduire que nous avons un livre ouvert rationnel. □

Avoir un livre ouvert qui porte un flot de Reeb donne un feuilletage en sections de Birkhoff pour le flot. Si le flot est porté par un livre brisé, le feuilletage qu'on obtient est formé par des sections. Les livres brisés construits par Colin, Dehornoy et Rechtman (2023) donnent même un feuilletage en sections ∂-forte. Cela justifie la définition suivante.

Définition 2.17. — *Une forme de contact non dégénérée α sur M est portée de façon ∂-forte par un livre brisé $(K, \mathcal{F})$ si :*

— *α est portée par $(K, \mathcal{F})$;*

— *chaque page de $\mathcal{F}$ est une R_α-section ∂-forte.*

Dans la suite, sauf mention du contraire, « livre brisé » signifie « livre brisé non dégénéré ».

2.4. Avant les livres brisés

Nous parlons ici des constructions ayant précédé les livres brisés, qui, dans le même esprit, donnent des feuilletages en sections transverses au flot de Reeb ; notons qu'avant le travail de Colin, Dehornoy et Rechtman, de telles constructions étaient connues seulement pour la 3-sphère.

Comme nous verrons dans la construction des livres brisés, un des outils fondamentaux pour chercher des sections pour un flot de Reeb est la notion de courbe pseudoholomorphe. Introduites en géométrie symplectique par Gromov, ces courbes sont le point de départ pour construire les feuilletages d'énergie finie de Hofer, Wysocki et Zehnder (2003) sur la sphère S^3, qui peuvent être considérés comme les ancêtres des livres brisés.

Étant donné une variété de contact (M,ξ) et une forme de contact α, nous pouvons regarder la *symplectisation* de M : il s'agit de la variété symplectique $\mathbb{R}\times M$, où la forme symplectique est $\omega = d(e^t\alpha)$ et t représente la coordonnée dans $\mathbb{R}$. Fixons une structure presque complexe $J\colon \xi\to\xi$ compatible avec $d\alpha$. Cela signifie que $J^2=-\mathrm{Id}$, pour tout $x\in M$ l'application $J_x\colon \xi_x\to\xi_x$ est linéaire, et la forme symétrique bilinéaire $d\alpha(\cdot, J\cdot)$ est définie positive sur ξ_x quel que soit x dans M. Il est possible de définir une structure presque complexe $\tilde J$ sur $\mathbb{R}\times M$, en demandant que $\tilde J(\partial t) = R_\alpha$ et $\tilde J(R_\alpha) = -\partial t$. Nous pouvons alors étudier l'espace des courbes $\tilde J$-holomorphes, *i.e.* les applications $u\colon (\Sigma, j)\to(\mathbb{R}\times M, \tilde J)$ telles que (Σ, j) est une surface de Riemann et l'application vérifie

$$Tu\circ j = \tilde J\circ Tu\,.$$

Dans le travail fondateur de Hofer, Wysocki et Zehnder (2003), les auteurs construisent un feuilletage $\mathcal{F}$ de la symplectisation de (S^3,ξ_{std}) où chaque feuille est une sphère perforée pseudoholomorphe plongée, *i.e.* une application $u\colon (S^2\setminus\{x_1,\dots,x_n\}, j)\to(\mathbb{R}\times S^3, \tilde J)$, où j est la structure presque complexe canonique sur $S^2\simeq\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Il est possible d'associer une certaine énergie à chaque feuille, mais la valeur est bornée uniformément pour chaque feuille du feuilletage $\mathcal{F}$. Si on projette sur la 3-sphère par $p\colon \mathbb{R}\times S^3\to S^3$, le feuilletage projeté ne sera pas lisse. Néanmoins, si nous munissons $S^3\subset\mathbb{C}^2$ de la forme de contact standard α_{std} et de la structure complexe $\tilde J$ héritée de $\mathbb{C}^2$, nous pouvons montrer le résultat suivant. Il existe un ensemble fini $\mathcal{P}$ d'orbites périodiques du champ de Reeb $R_{\alpha_{\mathrm{std}}}$ tel que la projection du feuilletage $p(\mathcal{F})\subset S^3$ est un feuilletage singulier de la sphère dont l'ensemble des singularités est exactement $\mathcal{P}$, et tel que l'intérieur de chaque feuille soit transverse à $R_{\alpha_{\mathrm{std}}}$. Plus précisément, le champ de Reeb $R_{\alpha_{\mathrm{std}}}$ est $R_{\alpha_{\mathrm{std}}}(z) = 2iz$. Soit $\Phi\colon \mathbb{R}\times S^3\to\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ l'application $(r,u)\mapsto \Phi(r,u) = e^r u$. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est la réunion de la feuille $F_0 := \Phi^{-1}((\mathbb{C}\setminus\{0\})\times\{0\})$, qui est un anneau, et de la famille $(F_c)_{c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ où $F_c := \Phi^{-1}(\mathbb{C}\times\{c\})$ est un plan. Quand on projette le feuilletage sur S^3, la feuille F_0 devient une orbite périodique pour le flot de Reeb, tandis que les autres feuilles se projettent sur des plans transverses à $R_{\alpha_{\mathrm{std}}}$, chacun asymptotique à l'orbite périodique $p(F_0)$. En effet, cet exemple donne un livre ouvert dont la reliure a une seule composante connexe et dont les pages sont des disques, voir Exemple 2.7.

En général, un feuilletage d'énergie finie ne donne pas une décomposition en livre ouvert. Néanmoins, Hofer, Wysocki et Zehnder (1998) introduisent la notion de flot de Reeb *dynamiquement convexe* : il s'agit d'une sous-classe de flots de Reeb sur S^3 pour lesquels ils montrent l'existence d'un disque plongé qui est une section de Birkhoff. En particulier, pour ces flots, il existe un livre ouvert qui porte la forme de contact et dont chaque page est un disque. Des exemples de flots de Reeb dynamiquement convexes sont donnés par le flot géodésique sur la sphère S^2 muni d'une métrique riemannienne à courbure positive, qui satisfait certaines conditions de *pincement* (voir Harris et Paternain, 2008), ainsi que certains niveaux d'énergie compacts d'un hamiltonien convexe dans $\mathbb{R}^4$.

Plus récemment, plusieurs travaux ont étudié l'existence de feuilletages de surfaces plongées transverses au flot et leurs conséquences, voir de Paulo et Salomão (2018), Hryniewicz et Salomão (2018) et Hryniewicz, Salomão et Wysocki (2023). Des feuilletages transverses pour le tore de suspension des applications du disque ont été utilisés par Bramham (2015a,b) pour étudier des pseudo-rotations.

La propriété la plus intéressante de ces feuilletages transverses est le fait que les feuilles sont toujours la projection de courbes pseudoholomorphes dans la symplectisation de la variété de contact. Comme nous verrons dans la construction des livres brisés, ces projections seront le point de départ pour appliquer des chirurgies de Fried, mais les feuilles du feuilletage final ne sont *a priori* pas des projections de courbes pseudoholomorphes.

2.5. Énoncés principaux et applications

Dans cette section, nous énonçons le résultat principal de Colin, Dehornoy et Rechtman (2023) sur l'existence des livres brisés qui portent une forme de contact et nous discutons ses conséquences dynamiques.

Théorème 2.18 (Colin–Dehornoy–Rechtman). — *Soit M une variété fermée orientée de dimension 3. Toute forme de contact non dégénérée sur M est portée de façon ∂-forte par un livre brisé.*

Avant de rentrer dans les applications, nous remarquons que l'existence de livres brisés a été généralisée aussi aux structures hamiltoniennes stables par Cardona et Rechtman (2023). Précisons aussi que Colin, Dehornoy et Rechtman montrent qu'il existe un voisinage U des formes de contact non dégénérées sur M tel que chaque forme de contact dans U est portée de façon ∂-forte par un livre brisé.

Une question classique en dynamique concerne l'existence d'orbites périodiques pour un certain flot et combien on peut en avoir. Si la conjecture de Seifert sur l'existence d'orbites périodiques pour tout champ de vecteurs sur S^3 a été réfutée par des contre-exemples, d'abord de Schweitzer (1974) en topologie C^1, et ensuite de Harrison (1988) en topologie $C^{3-\epsilon}$ et de Kuperberg (1994) en topologie C^∞, le cadre des champs de Reeb est différent. Weinstein (1979) conjecture que tout champ de Reeb (en toute dimension) a au moins une orbite périodique. Viterbo (1987) donne une première preuve pour des hypersurfaces de type contact de $\mathbb{R}^{2n}$. La conjecture a été montrée pour S^3 par Hofer (1993) et pour toute variété de contact de dimension 3 par Taubes (2007), en utilisant le lien entre la théorie d'homologie de contact plongée [9] (ECH pour *Embedded Contact Homology* en anglais) et celle de Sieberg–Witten. Ensuite, Cristofaro-Gardiner et Hutchings (2016) généralisent à toute variété de dimension 3 le résultat de Ginzburg, Hein, Hryniewicz et Macarini (2013) sur S^3 : tout champ de Reeb a au moins deux orbites périodiques. Il a été alors conjecturé que, pour un champ de Reeb sur une variété de dimension 3, il y a soit 2, soit une infinité d'orbites périodiques. La conjecture a été montrée pour la forme de contact standard α_{std} sur S^3 par Hofer, Wysocki et Zehnder (2003), sous l'hypothèse que les variétés stables et instables des orbites périodiques hyperboliques s'intersectent transversalement. Ensuite, la dichotomie a été montrée par Cristofaro-Gardiner, Hutchings et Pomerleano (2019) si la structure de contact a de la *torsion*. Grâce à l'existence des livres brisés, Colin, Dehornoy et Rechtman (2023) montrent le résultat en toute généralité.

Théorème 2.19 (Colin–Dehornoy–Rechtman). — *Soit M une variété de contact de dimension 3. Tout champ de Reeb non dégénéré sur M admet soit 2, soit une infinité d'orbites périodiques. Si M n'est ni S^3 ni un espace lenticulaire, alors il y a toujours une infinité d'orbites périodiques.*

En ce qui concerne les flots de Reeb en dimension 3 ayant exactement 2 orbites périodiques, il s'agit de dynamiques assez bien comprises, notamment grâce à Hutchings et Taubes (2009), et plus récemment à Cristofaro-Gardiner, Hryniewicz, Hutchings et Liu (2023). Ils montrent que, si R_α est un champ de Reeb sur M avec exactement deux orbites périodiques, alors la forme de contact α doit être forcément non dégénérée, M est difféomorphe à un espace lenticulaire ou à S^3 et les deux orbites périodiques sont elliptiques.

Une autre question classique en dynamique concerne l'entropie topologique, une quantité qui permet de mesurer la complexité de la dynamique sous-jacente. Par exemple, pour un flot de classe C^2 en dimension 3 dont l'entropie topologique est strictement positive, le nombre d'orbites périodiques de longueur au plus L croît exponentiellement vite par rapport à L, voir Lima et Sarig (2019). Pour un flot de Reeb, on peut se demander s'il y a des contraintes topologiques sur la variété qui impliquent la stricte positivité de son entropie. Dans cette direction, nous pouvons citer les travaux de Macarini et Schlenk (2011) et de Alves (2016). Demander qu'une certaine réunion de nœuds, ayant de propriétés de croissance en homologie, soit réalisé comme orbites périodiques force

9. Voir §3.1.

aussi l'entropie à être strictement positive, comme montré par Alves et Pirnapasov (2022). En utilisant les livres brisés, les auteurs donnent des conditions suffisantes pour avoir de l'entropie positive. Une variété M de dimension 3 est dite *graphée* si elle peut être décomposée, en coupant le long de tores disjoints plongés, en fibrés en cercle sur une surface compacte à bord. Des exemples de variétés graphées sont la 3-sphère ou, plus généralement, les fibrés de Seifert. Colin, Dehornoy et Rechtman (2023) montrent alors le résultat suivant.

THÉORÈME 2.20 (Colin–Dehornoy–Rechtman). — *Soit M une variété fermée orientée de dimension 3 qui ne soit pas graphée. Alors tout champ de Reeb non dégénéré sur M a une entropie topologique positive.*

Le point de départ des preuves des ces applications dynamiques est l'existence d'un livre brisé portant le champ de Reeb donné. Il y a toujours la dichotomie suivante : soit le livre brisé est un livre ouvert rationnel, soit la composante brisée K_b de la reliure est non vide. Si $K_b \neq \emptyset$, alors il existe des orbites périodiques hyperboliques avec des intersections hétéroclines. Rappelons que, étant donné une orbite périodique γ hyperbolique, nous pouvons définir ses variétés stables et instables respectivement comme

$$W^s(\gamma) := \{x \in M : d(\phi_t^{R_\alpha}(x), \gamma) \xrightarrow{t \to +\infty} 0\} \text{ et}$$
$$W^u(\gamma) := \{x \in M : d(\phi_t^{R_\alpha}(x), \gamma) \xrightarrow{t \to -\infty} 0\}.$$

Une branche de la variété stable (resp. instable) de γ est une composante connexe de $W^s(\gamma) \setminus \gamma$ (resp. $W^u(\gamma) \setminus \gamma$). On dit de plus que deux orbites périodiques γ_1, γ_2 ont une intersection hétérocline si $W^u(\gamma_1) \cap W^s(\gamma_2) \neq \emptyset$. Dans Colin, Dehornoy et Rechtman (2023) on trouve le résultat suivant, en partie déjà présent dans Hofer, Wysocki et Zehnder (2003). On reviendra sur ce lemme dans §4.2.

LEMME 2.21. — *Chaque branche de la variété stable (instable) de $\gamma \in K_b$ rencontre la variété instable (stable) d'une orbite périodique $\gamma' \in K_b$.*

Une caractérisation de l'entropie positive, due à Katok (1980) pour la dynamique discrète sur les surfaces et à Lima et Sarig (2019) pour les flots en dimension 3, nous assure qu'une dynamique a une entropie positive si et seulement s'il existe des intersections hétéroclines *transverses*. Le lemme précédent ne suffit pas à assurer que l'entropie est positive, par contre, si on demande que le champ de Reeb soit *fortement non dégénéré*, *i.e.* tel que toute intersection hétérocline des orbites périodiques hyperboliques soit transverse, alors, dès que $K_b \neq \emptyset$, nous avons une dynamique chaotique. Les champs de Reeb fortement non dégénérés sont génériques parmi les champs de Reeb (voir Colin et Honda (2013)). Une autre conséquence dynamique montrée par Colin, Dehornoy et Rechtman (2023) est alors la suivante :

THÉORÈME 2.22 (Colin–Dehornoy–Rechtman). — *Soit M une variété de dimension 3, fermée, orientée et soit R_α un champ de Reeb fortement non dégénéré sur M. Si son entropie topologique est nulle, alors R_α est porté par un livre ouvert rationnel.*

2.5.1. *Existence de sections de Birkhoff.* — Observons que le dernier théorème 2.22 nous donne des conditions suffisantes pour l'existence d'une section de Birkhoff pour le flot de Reeb associé. Est-ce toujours le cas ? Existe-t-il toujours une section de Birkhoff pour un flot de Reeb non dégénéré ?

Fried (1983) a montré que tout flot d'Anosov [10] transitif admet une section de Birkhoff. Tout flot de Reeb d'Anosov admet aussi une telle section : un tel flot est en particulier un flot d'Anosov conservatif, donc transitif, voir Fisher et Hasselblatt (2019, Corollaire 5.3.57) ; le résultat de Fried s'applique. En retirant l'hypothèse d'être d'Anosov, Colin, Dehornoy et Rechtman (2023) formulent la conjecture suivante.

Conjecture 2.23. — *Tout flot de Reeb admet une section de Birkhoff.*

Dans le même article, les auteurs montrent comment il est possible d'obtenir un livre ouvert rationnel, et donc une section de Birkhoff, si nous supposons donné un flot de Reeb non dégénéré tel que la composante brisée de la reliure du livre brisé associé contient une seule orbite périodique. Dans des travaux ultérieurs, en partant des livres brisés, il a été montré que la conjecture est vraie génériquement.

Théorème 2.24. — *Sur toute variété fermée, orientée, de dimension 3, l'ensemble des formes de contact dont le flot de Reeb admet une section de Birkhoff est ouvert et dense en topologie C^∞.*

Ce résultat remarquable a été obtenu en parallèle par Colin, Dehornoy, Hryniewicz et Rechtman (2023) et par Contreras et Mazzucchelli (2022), comme corollaire des théorèmes ci-dessous. En particulier, ils trouvent deux conditions différentes pour assurer l'existence d'une section de Birkhoff : les deux conditions s'avèrent être C^∞ génériques.

Théorème 2.25 (Colin–Dehornoy–Hryniewicz–Rechtman)
Soit α une forme de contact non dégénérée sur M. Supposons la mesure de Liouville $(\alpha \wedge d\alpha)/\mathrm{vol}(\alpha)$, où $\mathrm{vol}(\alpha) := \int_M \alpha \wedge d\alpha$, approchée par des orbites périodiques de R_α, alors le flot de Reeb associé admet une section de Birkhoff.

Étant donné une orbite périodique $\gamma\colon \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \to M$ de période $T > 0$, si nous notons Leb la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$, la mesure $\frac{\gamma_* \mathrm{Leb}}{T}$ est une mesure de probabilité invariante sous le flot de Reeb. On dit qu'une mesure de probabilité μ est approchée par des orbites périodiques si la mesure est point d'accumulation, pour la topologie faible $*$, d'une suite de combinaisons finies convexes de mesures induites par des orbites

10. Un champ de vecteurs X sur M est dit d'Anosov si le fibré tangent à M admet une décomposition invariante par le flot de X de la forme $TM = E^S \oplus \mathbb{R}X \oplus E^u$, et telle que la dynamique contracte uniformément dans le futur le long de E^s et dans le passé le long de E^u. Voir Fisher et Hasselblatt (2019) pour la définition précise.

périodiques, *i.e.* il existe $(\{\gamma_i^n, p_i^n\}_{i=1}^{N_n})_{n\geq 0}$ tel que chaque γ_i^n est une orbite périodique de période $T(\gamma_i^n)$, $p_i^n \in (0,1]$,

$$\sum_{i=1}^{N_n} p_i^n = 1 \quad \forall n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N_n} p_i^n \frac{(\gamma_i^n)_* \mathrm{Leb}}{T(\gamma_i^n)} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu\,, n \to +\infty\,.$$

Irie (2021) montre que pour une forme de contact C^∞-générique α définissant une structure de contact donnée sur une variété de dimension 3, il existe une suite d'orbites de Reeb périodiques qui est équidistribuée par rapport à $d\alpha$. Ce résultat et le théorème 2.25 permettent alors de déduire immédiatement le théorème 2.24.

Théorème 2.26 (Contreras–Mazzucchelli). — *Tout flot de Reeb fortement non dégénéré sur une variété fermée, orientée, de dimension 3, admet une section de Birkhoff.*

Rappelons qu'un flot de Reeb est fortement non dégénéré si toute orbite périodique est non dégénérée et si toute intersection des variétés stables et instables d'orbites périodiques hyperboliques (pas forcément distinctes) est transverse. Dans leur article, Contreras et Mazzucchelli appellent cette condition *Kupka-Smale*. En adaptant les arguments de Peixoto (1967), il est possible de montrer que cette condition est vérifiée pour une forme de contact C^∞-générique. Contreras et Paternain (2002) montrent que le flot géodésique d'une métrique riemannienne C^∞-générique est aussi fortement non dégénéré (autrement dit, Kupka–Smale). On en déduit alors un résultat d'existence générique d'une section de Birkhoff aussi pour les flots géodésiques.

Pour le flot géodésique sur une sphère à courbure strictement positive, voir Exemple 2.3, Birkhoff construit une section de Birkhoff, tout en ayant aussi des informations sur sa topologie : la section est un anneau. Le flot géodésique sur une surface riemannienne à courbure strictement négative a toujours une section de Birkhoff de genre un, voir Fried (1983). Contreras, Knieper, Mazzucchelli et Schulz (2022) considèrent une surface riemannienne (S, g) fermée orientable, de genre au moins égal à un ; si son flot géodésique n'a pas d'orbite périodique simple contractile sans points conjugués, alors ils construisent une section de Birkhoff de genre 1, avec une borne explicite sur le nombre de composantes du bord.

2.5.2. *C^2-stabilité structurelle des flots géodésiques sur une surface fermée.* — L'existence des livres brisés a permis aussi à Contreras et Mazzucchelli (2024) de répondre à la question de la stabilité structurelle pour les flots géodésiques d'une surface fermée.

Définition 2.27. — *Le flot géodésique d'une surface riemannienne fermée (S, g) est C^2-structurellement stable s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de g dans l'espace des métriques riemanniennes sur S, muni de la topologie C^2, tel que pour chaque $g_1 \in \mathcal{V}$ il y a un homéomorphisme $\psi\colon T_g^1 S \to T_{g_1}^1 S$ entre les deux fibrés unitaires tangents, qui envoie les orbites du flot géodésique de g sur les orbites du flot géodésique de g_1.*

Conjecturée pour les difféomorphismes C^k par Palis et Smale, la conjecture de la stabilité structurelle pour les flots géodésiques des métriques riemanniennes a été montrée par Contreras et Mazzucchelli (2024).

THÉORÈME 2.28 (Contreras–Mazzucchelli). — *Les flots géodésiques C^2-structurellement stables d'une surface riemannienne fermée sont d'Anosov.*

Ce résultat se déduit du théorème suivant, grâce au fait que le flot géodésique est un flot de Reeb sur le fibré unitaire tangent :

THÉORÈME 2.29 (Contreras–Mazzucchelli). — *Soit (M, α) une variété de contact de dimension 3 telle que l'adhérence $\overline{\mathrm{Per}(R_\alpha)}$ de la réunion des orbites périodiques de R_α est hyperbolique et telle que les variétés stables et instables des orbites périodiques (pas forcement la même orbite) s'intersectent transversalement. Alors le flot de Reeb associé est d'Anosov.*

Rappelons qu'un ensemble Λ est hyperbolique pour un flot ϕ_t d'une variété riemannienne M si Λ est un ensemble compact, invariant par le flot ϕ_t, tel que $T_\Lambda M = \bigcup_{x\in\Lambda} T_x M$ se décompose comme $E^s \oplus \mathbb{R}\frac{d}{dt}|_{t=0}\phi_t \oplus E^u$ et tel que les conditions suivantes soient vérifiées. Il existe $C > 0$ et $0 < \lambda < 1 < \mu$ tels que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in \Lambda$, on a

$$\|D\phi_t(x)|_{E^s(x)}\| \leq C\lambda^t \quad \text{et} \quad \|D\phi_{-t}(x)|_{E^u(x)}\| \leq C\mu^{-t}\,.$$

Nous renvoyons à Fisher et Hasselblatt (2019) pour plus de précisions. Le théorème 2.29 est utilisé pour montrer que, étant donné une métrique g, si toutes les métriques g_1 suffisamment C^2 proches de g sont telles que le flot géodésique sur (S, g_1) n'a pas de géodésique fermée elliptique, alors le flot géodésique sur (S, g) doit être d'Anosov. Cela permet alors d'arriver à la dichotomie générique suivante : parmi l'ensemble des métriques riemanniennes, il existe un sous-ensemble ouvert dense en topologie C^2 tel que le flot géodésique associé à une métrique dans ce sous-ensemble a une géodésique fermée elliptique, ou bien est d'Anosov. Cette dichotomie et le fait qu'un flot géodésique ayant une geodésique fermée elliptique ne peut pas être C^2-structurellement stable entraînent alors le théorème 2.28.

La preuve du théorème 2.29 repose sur l'existence d'une décomposition en livre brisé qui porte α et qui permet d'avoir des R_α-sections (les pages du livre brisé). Dans le même esprit, Contreras et Oliveira (2004) avaient utilisé les feuilletages d'énergie finie de Hofer, Wysocki et Zehnder pour montrer l'existence d'un ensemble ouvert dense en topologie C^2 de métriques riemanniennes sur S^2 dont le flot géodésique a une géodésique fermée elliptique.

3. Sur la preuve de l'existence des livres brisés

Le but de cette section est de donner les idées principales de la construction des livres brisés. Pour cela, nous aurons d'abord besoin de présenter les deux outils à la base de cette construction : la *U-map* de la théorie de l'homologie de contact plongée (Embedded Contact Homology) et le procédé de désingularisation de Fried.

3.1. Rappels sur ECH et les courbes $\tilde{J}$-holomorphes comptées par la U-map

Nous donnons les définitions principales de l'homologie de contact plongée (ECH) qui permettent de comprendre la preuve de Colin, Dehornoy et Rechtman. Une référence standard est Hutchings (2014). Voir aussi le séminaire Bourbaki de Humilière (2021).

Soit (M, α) une variété de contact de dimension 3 et R_α le champ de Reeb associé à la forme de contact α. Supposons que α est non dégénérée. Cette hypothèse est vérifiée C^∞-génériquement pour α, comme l'ont montré Colin et Honda (2013). On peut penser à ECH comme à une généralisation de l'homologie de Morse. Les générateurs sont des couples d'orbites périodiques et d'entiers positifs. Plus précisément, fixons une classe d'homologie $\Gamma \in H_1(M)$. Un *générateur ECH* pour Γ est un ensemble fini de couples $\{(\gamma_1, m_1), \ldots, (\gamma_n, m_n)\}$ où :

1. les γ_i sont des orbites périodiques simples et distinctes du champ de Reeb R_α ;
2. les m_i sont des entiers positifs ;
3. la classe d'homologie $\sum_{i=1}^n m_i[\gamma_i] \in H_1(M)$ est Γ ;
4. si γ_i est hyperbolique, alors $m_i = 1$.

Dans la suite, on parlera de générateur ECH en faisant référence à un générateur ECH pour une classe Γ, si la classe d'homologie Γ est évidente dans le contexte, ou bien à un ensemble fini de couples $\{(\gamma_i, m_i)\}_{i=1}^n$ qui vérifient toutes les conditions précédentes, sauf la condition 3. On regarde le complexe de chaînes $\mathrm{ECC}(M, \alpha, \Gamma)$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ engendré par les générateurs ECH. Afin de définir l'homologie de ce complexe de chaînes, nous avons besoin d'une différentielle, qui est introduite à l'aide d'une structure presque complexe $\tilde{J}$ et d'un certain *indice ECH*. Rappelons que la symplectisation de M est la variété symplectique $(\mathbb{R} \times M, \omega)$, *i.e.* une variété différentielle munie d'une forme différentielle ω de degré 2, fermée et non dégénérée, où $\omega = d(e^t\alpha)$ et où t est la coordonnée dans $\mathbb{R}$. Une structure presque complexe $\tilde{J}$ sur $\mathbb{R} \times M$ est *admissible* si $\tilde{J}$ est $\mathbb{R}$-invariante, si $\tilde{J}(\partial t) = R_\alpha$, si $\tilde{J}(R_\alpha) = -\partial t$ et si $\tilde{J}$ envoie la structure de contact ξ sur elle-même, de manière compatible avec l'orientation de $d\alpha$. Fixons alors une structure presque complexe admissible $\tilde{J}$ sur $\mathbb{R} \times M$. En ce qui concerne l'*indice ECH*, il s'agit d'un nombre qu'on associe à une courbe $\tilde{J}$-holomorphe : nous renvoyons à Hutchings (2014) pour la définition.

Nous donnons maintenant l'idée de la définition de la différentielle ∂ de ECH. Soient $\psi = \{(\psi_i, m_i)\}$ et $\nu = \{(\nu_i, l_i)\}$ deux générateurs ECH. On écrit $\partial\psi = \sum_{\tau \text{ gén. ECH}} \langle \partial\psi, \tau\rangle \tau$, où le coefficient $\langle \partial\psi, \nu\rangle \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est le nombre mod 2 de certaines courbes $\tilde{J}$-holomorphes dans $\mathbb{R} \times M$. Précisément, on compte les courbes $\tilde{J}$-holomorphes d'indice ECH égal à 1 qui convergent vers $\{+\infty\} \times \sum_i m_i\psi_i$ en les extrémités positives et convergent vers $\{-\infty\} \times \sum_i l_i\nu_i$ en les extrémités négatives. Les courbes d'indice 1 sont des réunions de (revêtements multiples de) cylindres triviaux, *i.e.* de cylindres $\mathbb{R} \times \{\beta\}$, où β est une orbite périodique de Reeb, et de courbes plongées d'indice 1. Notons $\mathcal{M}_1(\psi, \nu)$ l'ensemble de ces courbes [11]. L'espace quotient $\mathcal{M}_1(\psi, \nu)/\mathbb{R}$ est fini

11. Modulo équivalence : deux courbes sont équivalentes s'elles induisent le même courant.

pour un choix générique de la structure presque complexe. Le coefficient $\langle \partial\psi, \nu\rangle \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est alors égal au cardinal de cet espace mod 2. L'homologie du complexe de chaînes $\mathrm{ECC}(M, \alpha, \Gamma)$ est notée $\mathrm{ECH}(M, \alpha, \Gamma, \tilde{J})$.

Dans le cadre de l'homologie de contact plongée, il est possible de définir des structures supplémentaires, qui seront utilisées dans la construction des livres brisés. Nous aurons besoin, en particulier, de la définition de la *U-map*, que nous présentons ci-dessous.

Fixons un point générique $z \in M$: ici générique signifie que z n'est pas périodique pour R_α. Considérons deux générateurs ECH, notés $\psi = \{(\psi_i, m_i)\}$ et $\nu = \{(\nu_i, l_i)\}$. Si on note $U\psi = \sum_{\tau \text{ gén. ECH}} \langle U\psi, \tau\rangle \tau$, le coefficient $\langle U\psi, \nu\rangle$ est le nombre mod 2 des courbes $\tilde{J}$-holomorphes suivantes : on compte les courbes $\tilde{J}$-holomorphes d'indice ECH égal à 2, qui convergent vers $\{+\infty\} \times \sum_i m_i\psi_i$ en les extrémités positives et convergent vers $\{-\infty\} \times \sum_i l_i\nu_i$ en les extrémités négatives, et qui passent par le point $(0, z) \in \mathbb{R} \times M$. Les courbes d'indice ECH égal à 2 sont réunion de (revêtements multiples de) cylindres triviaux et de courbes plongées d'indice 2. Comme pour la différentielle ∂, il est en effet possible de montrer que l'ensemble de ces courbes [12] est fini. De plus, ce nombre mod 2 ne dépend pas du point générique z choisi. Cela revient à dire que $\mathcal{M}_2(\psi, \nu)/\mathbb{R}$, l'ensemble des courbes holomorphes d'indice ECH égal à 2 de ψ à ν et passant par un point générique, quotienté par $\mathbb{R}$, est fini.

La propriété clef de la U-map qu'on utilise pour la construction des livres brisés est sa non-trivialité.

Proposition 3.1. — *Soit α une forme de contact non dégénérée sur M. Il existe $\hat{\Gamma} \in H_1(M)$ tel que $U(\hat{\Gamma}) \neq 0$, i.e. tel qu'il existe un générateur ECH, noté $\hat{\psi} = \{(\hat{\psi}_i, \hat{m}_i)\}$, pour lequel $\sum_i \hat{m}_i[\hat{\psi}_i] = \hat{\Gamma}$ et $U\hat{\psi} \neq 0$.*

Nous renvoyons à Hutchings et Taubes (2009, Proposition 2.8) pour la preuve du résultat ci-dessus. Nous soulignons que la non-trivialité de la U-map peut être montrée de deux façons, mais toutes les deux preuves doient passer par un lien entre l'homologie de contact plongée et une autre homologie. Taubes a montré que ECH est isomorphe à l'homologie de Seiberg–Witten, dans la version définie par Kronheimer et Mrowka (2007) : la non-trivialité suit alors des propriétés de cette dernière. Colin, Ghiggini et Honda (2020) ont montré, dans une série de plusieurs articles, que l'homologie de contact plongée est isomorphe à une version de l'homologie d'Heegard–Floer : dans cette dernière, la U-map associée devient assez simple et la non-trivialité en découle.

Rappelons aussi la notion d'action d'une orbite et d'un générateur ECH.

Définition 3.2. — *Soient α une forme de contact sur M et R_α le champ de Reeb associé. Soit γ une orbite périodique pour R_α, alors son action est $\mathcal{A}(\gamma) := \int_\gamma \alpha$. Soit $\{(\gamma_i, m_i)\}$ un générateur ECH, alors son action est $\mathcal{A}(\{(\gamma_i, m_i)\}) := \sum_i m_i \int_{\gamma_i} \alpha$.*

12. Modulo équivalence.

L'action d'un générateur ECH est plus grande que l'action de l'image du générateur par la différentielle ∂, ou bien par la U-map. La notion d'action ci-dessus sera utilisée pour définir l'ensemble $\mathcal{P}$ de la proposition suivante.

Proposition 3.3. — *Il existe un ensemble fini $\mathcal{P}$ d'orbites périodiques tel que, pour chaque point générique (i.e. non périodique) $z \in M \backslash \mathcal{P}$, il existe une courbe $\tilde{J}$-holomorphe d'indice ECH égal à 2, qui passe par le point $(0, z) \in \mathbb{R} \times M$ et qui converge vers $\{+\infty\} \times \mathcal{P}$ (resp. $\{-\infty\} \times \mathcal{P}$) en les extrémités positives (resp. négatives).*

Démonstration. — Soit $\hat{\psi} = \{(\hat{\psi}_i, m_i)\}$ un générateur ECH vérifiant $U\hat{\psi} \neq 0$, comme dans la proposition 3.1. Nous notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des orbites de Reeb périodiques γ dont l'action $\mathcal{A}(\gamma)$ est bornée par $\mathcal{A}(\hat{\psi})$. Comme le point $z \in M \setminus \mathcal{P}$ n'est pas périodique et que la U-map ne dépend pas du choix du point z, le fait que $U\hat{\psi} \neq 0$ garantit l'existence d'une courbe $\tilde{J}$-holomorphe d'indice ECH égal à 2 qui passe par le point $(0, z) \in \mathbb{R} \times M$ et dont les extrémités positives (resp. négatives) sont asymptotiques au produit de $\{+\infty\}$ (resp. $\{-\infty\}$) et d'une combinaison d'orbites périodiques dans $\mathcal{P}$, car la U-map décroît l'action. □

Dans la suite, nous aurons besoin de construire des courbes $\tilde{J}$-holomorphes qui passent par chaque point, pas seulement par un point générique. Chaque point z est limite d'une suite de points génériques $(z_n)_n$. Par la proposition 3.3, nous avons alors une suite de courbes $\tilde{J}$-holomorphes d'indice ECH 2. Il faut comprendre la limite de cette suite. On renvoie à Hutchings (2014, Lemma 5.12).

Lemme 3.4. — *Soient ψ, ν deux générateurs ECH. Soit $\{C_i\}_{i \geq 0}$ une suite dans $\mathcal{M}_2(\psi, \nu)/\mathbb{R}$. Il existe une sous-suite qui converge*

- *soit vers un élément de $\mathcal{M}_2(\psi, \nu)/\mathbb{R}$;*
- *soit vers une courbe $\tilde{J}$-holomorphe brisée qui est un couple (C^+, C^-) de courbes $\tilde{J}$-holomorphes d'indice ECH égal à 1 telles que les bouts négatifs de C^+ et les bouts positifs de C^- sont asymptotiques.*

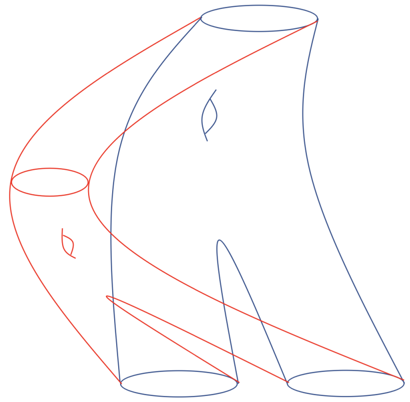

Figure 6. Exemple d'une courbe $\tilde{J}$-holomorphe brisée.

Rappelons que le nombre d'intersection de deux courbes $\tilde{J}$-holomorphes $C_1 \colon \Sigma_1 \to \mathbb{R} \times M, C_2 \colon \Sigma_2 \to \mathbb{R} \times M$ en un point d'intersection transverse $C_1(z_1) = C_2(z_2) = p$ est positif si l'orientation induite sur $\operatorname{im} dC_1(z_1) \oplus \operatorname{im} dC_2(z_2)$ par les orientations de $T_{z_1}\Sigma_1$ et de $T_{z_2}\Sigma_2$ coïncide avec l'orientation de $T_p(\mathbb{R} \times M)$.

Lemme 3.5. — *Soient $C_1 \colon \Sigma_1 \to \mathbb{R} \times M, C_2 \colon \Sigma_2 \to \mathbb{R} \times M$ deux courbes $\tilde{J}$-holomorphes plongées dans $\mathbb{R} \times M$ d'intersection non vide. Soit $p = C_1(z_1) = C_2(z_2)$. Alors*
- *soit il existe un voisinage $U_1 \subset \Sigma_1$ de z_1 et un voisinage $U_2 \subset \Sigma_2$ de z_2 tels que $C_1(U_1) = C_2(U_2)$;*
- *soit p est un point d'intersection isolé ; dans ce cas, le nombre d'intersection en p est positif.*

3.2. Sur la chirurgie de Fried

L'autre outil principal de la construction des livres brisés est la chirurgie de Fried sur des surfaces, que nous allons rappeler brièvement dans ce paragraphe. On renvoie à Fried (1983).

Soit X un champ de vecteurs non singulier sur la variété M de dimension 3. Soit S une surface compacte avec bord, immergée dans M, telle que ∂S est tangent à X et $\operatorname{int}(S)$ est positivement transverse à X.

Une *chirurgie de Fried* sur S est une opération qui donne une nouvelle surface de la façon suivante :
- mettre S en position transverse avec une perturbation générique. On obtient alors une nouvelle surface $\tilde{S}$ dont l'intérieur est encore positivement transverse à X et telle que les autointersections se composent d'un nombre fini de courbes de points d'intersection double et d'un nombre fini de points isolés d'intersection triple. Les points d'intersection triple sont toujours dans l'intérieur de $\tilde{S}$, tandis que les points d'intersection double peuvent être aussi sur le bord.
- Désingulariser $\tilde{S}$ en coupant et collant le long des intersections pour obtenir une surface $\hat{S}$ dont l'intérieur est plongé et toujours positivement transverse à X.

Nous soulignons que le fait de désingulariser les intersections tout en restant transverse au champ de vecteurs ne crée pas d'ambiguïté sur comment coller la surface. Voir Figures 7, 8 et 9. Fried utilise cette procédure pour montrer que tout flot d'Anosov transitif admet une section de Birkhoff.

Remarque 3.6. — Observons que, étant donné une droite de points d'autointersection double qui a une extrémité sur le bord de la surface (voir Figure 8), il est possible de réaliser la chirurgie en regardant le tore obtenu en éclatant l'orbite périodique γ. Une telle orbite périodique est à la fois transverse à la surface et contenue dans son bord.

Considérons le tore $\mathbb{T}_\gamma$, obtenu comme éclatement de l'orbite γ. La trace de la surface sur $\mathbb{T}_\gamma$ se compose de deux courbes fermées. La courbe qui correspond à la surface transverse à γ est un méridien. La courbe qui correspond à la surface dont le bord contient γ est dans une classe d'homologie (a, b) du tore. La chirurgie de Fried modifie

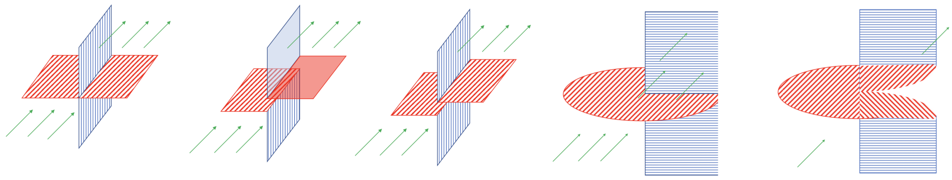

FIGURE 7. Comment désingulariser une courbe de points doubles dans l'interieur.

FIGURE 8. Comment désingulariser une courbe de points doubles qui arrive sur le bord.

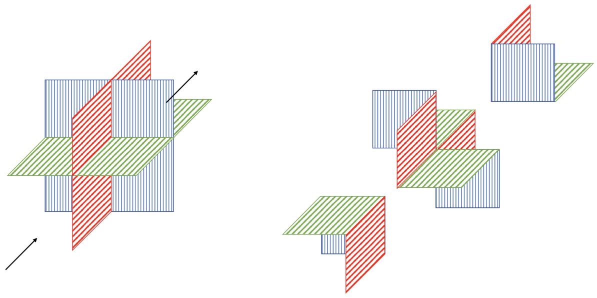

FIGURE 9. Comment désingulariser un point triple.

alors la surface de façon à ce que sa trace sur le tore $\mathbb{T}_\gamma$ devienne $(a \pm 1, b)$, où le signe est lié à l'orientation induite par le champ de vecteurs prolongé sur $\mathbb{T}_\gamma$. Voir Figure 10.

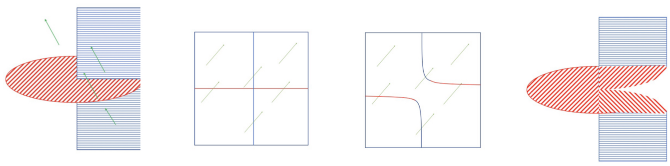

FIGURE 10. La chirurgie de Fried vue sur l'éclatement d'une orbite périodique du bord.

3.3. Construction d'une R_α-section en chaque point

Soit R_α le champ de Reeb associé à une forme de contact α non dégénérée sur une variété M fermée, orientée, de dimension 3. La non-trivialité de la U-map permet d'obtenir le résultat suivant. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble fini d'orbites périodiques de la proposition 3.3 ; en particulier, il existe $C > 0$ tel que l'action de chaque orbite dans $\mathcal{P}$ est bornée par C.

Proposition 3.7. — *Pour tout point $z \in M$, il existe une surface $S \subset M$ passant par z telle qu'il existe un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_N\}$ de points de $\mathrm{int}(S)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

— *S est immergée en dehors de $\{x_1, \dots, x_N\}$;*

— *$\mathrm{int}(S)$ est positivement transverse au champ de Reeb en dehors de $\{x_1, \dots, x_N\}$;*

— *∂S est contenu dans $\mathcal{P}$.*

De plus, si $z \in M \setminus \mathcal{P}$, alors z appartient à $\mathrm{int}(S)$.

Démonstration. — Soit $z \in M$ et $(z_n)_n$ une suite de points génériques (*i.e.* non périodiques) dans $M \setminus \mathcal{P}$ qui converge vers z. Considérons alors la symplectisation de M et le point $(0, z) \in \mathbb{R} \times M$. Par la proposition 3.3, pour chaque point z_n il existe une courbe $\tilde{J}$-holomorphe u_n dans $\mathbb{R} \times M$ dont les extrémités positive et négative convergent vers des ensembles finis d'orbites périodiques (multiples) contenues dans $\mathcal{P}$. Par le lemme 3.4, quitte à extraire une sous-suite, la suite de courbes $(u_n)_n$ converge vers une courbe $\tilde{J}$-holomorphe (brisée) u d'indice ECH égal à 1 ou 2, dont les extrémités sont toujours asymptotiques à des orbites dans $\mathcal{P}$. Grâce à Siefring (2008), nous savons que cette courbe u, au voisinage des extrémités positive et négative, n'est pas tangente au plan $\langle \partial t, R_\alpha \rangle$. Par les propriétés des applications holomorphes, il est possible de montrer que l'ensemble des points de u qui sont tangents au plan $\langle \partial t, R_\alpha \rangle$ est fini. Considérons la projection de la courbe u sur la variété M, *i.e.* on projette le long de la coordonnée $t \in \mathbb{R}$. On a alors une surface S qui passe par le point z. Cette surface est immergée sauf au plus en un ensemble fini de points : ce sont les points qui correspondent à la projection des points de tangence de u avec le plan $\langle \partial t, R_\alpha \rangle$. Notons ces points $x_1, \dots, x_N$. En dehors de ces points, S est positivement transverse au champ de Reeb, car en chaque $x \in S \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$, si on note $\hat{x} \in \mathbb{R} \times M$ le point qui se projette sur x et qui appartient à l'intersection de la courbe u et de la courbe tangente à $\langle \partial t, R_\alpha \rangle$ passant par $\hat{x}$, le nombre d'intersection de $\hat{x} \in \mathbb{R} \times M$ est positif par le lemme 3.5. □

En partant de la surface S donnée par la proposition 3.7, l'outil de la chirurgie de Fried transforme S en une R_α-section ∂-forte passant par le point z.

Proposition 3.8. — *Pour tout point $z \in M \setminus \mathcal{P}$ il existe une R_α-section ∂-forte dont l'intérieur passe par z et dont le bord est contenu dans $\mathcal{P}$.*

Démonstration. — Soit $z \in M \setminus \mathcal{P}$. La proposition 3.7 nous donne une surface $S \subset M$ passant par z immergée en dehors d'un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_N\}$ de points. Nous allons modifier S différemment autour des points $x_1, \dots, x_N$ et loin de ces points. Pour chaque point x_i on construit une boîte de flot $\mathcal{B}_i \simeq D^2 \times [-1, 1]$ telle que $x_i \in \mathrm{int}(\mathcal{B}_i)$, et telle que $\mathcal{B}_i$ ne rencontre pas le bord de S.

D'abord, nous travaillons loin des points x_i, *i.e.* sur $M \setminus \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_i$. Nous allons faire une chirurgie de Fried. Faisons une première perturbation générique de S afin de mettre la surface en position transverse en dehors des boîtes de flot. Ceci est possible en restant aussi positivement transverse au champ de Reeb sur $M \setminus \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_i$. On obtient une surface $\tilde{S}$ telle que $\partial S = \partial \tilde{S}$. Considérons la variété $M_{\partial S}$, *i.e.* la variété à bord obtenue en éclatant les orbites périodiques de $\partial S = \partial\tilde{S}$. Notre surface $\tilde{S}$ nous donne alors une surface à bord $\tilde{S}_{\partial S} \subset M_{\partial S}$.

Quitte à faire une autre perturbation générique, nous pouvons supposer que $\tilde{S}_{\partial S}$ est aussi positivement transverse à l'extension de R_α sur le bord de $M_{\partial S}$. Cela va nous assurer la condition ∂-forte sur le bord pour la section que nous allons construire.

Maintenant, nous pouvons faire une chirurgie de Fried pour résoudre les autointersections de la surface $\tilde{S}_{\partial S}$ dans $M_{\partial S} \setminus \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_i$. Cela nous donne une surface dont l'intérieur est plongé dans $M_{\partial S} \setminus \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_i$. Pour repasser de $M_{\partial S}$ à M, nous allons modifier la surface sur le bord. Sur un voisinage de chaque composante connexe du bord de $M_{\partial S}$, nous modifions la surface obtenue via des isotopies toujours positivement transverses au champ de Reeb afin d'obtenir, sur la composante du bord de $M_{\partial S}$ concernée,

— soit une collection de méridiens : dans ce cas l'orbite périodique dans ∂S correspondant à cette composante du bord de $M_{\partial S}$ n'est plus dans le bord de la nouvelle surface ;

— soit une courbe transverse aux méridiens : dans ce cas, l'orbite périodique reste toujours dans le bord de la nouvelle surface.

En faisant l'opération inverse de l'éclatement et en « écrasant » chaque composante du bord de $M_{\partial S}$ sur l'orbite périodique de départ, nous obtenons une surface $\hat{S}$, dont le bord est contenu dans ∂S et dont l'intérieur est plongé dans $M \setminus \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_i$. De plus, l'intérieur de $\hat{S}$ est positivement transverse au champ de Reeb et $\hat{S}$ satisfait la condition ∂-forte le long de son bord.

Il reste alors seulement à modifier notre surface $\hat{S}$ dans les boîtes de flot. Fixons une boîte de flot $\mathcal{B}_i$. La surface $\hat{S}$ intersecte le bord vertical de $\mathcal{B}_i$, *i.e.* la composante du bord qui correspond à $\partial D^2 \times [-1, 1]$, selon une sous-variété de dimension 1 sans bord, autrement dit, dans une collection plongée de cercles $\bigcup_i C_i$. On peut alors modifier notre surface en ajoutant, pour chaque cercle C_i, un disque $D_i \subset \mathcal{B}_i$ ayant C_i comme bord et qui est bien positivement transverse au champ de Reeb, voir Figure 11. En faisant cela pour toute boîte de flot, on obtient la R_α-section ∂-forte recherchée. □

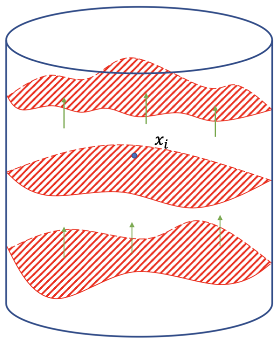

FIGURE 11. Comment modifier la surface dans la boîte de flot $\mathcal{B}_i$.

3.4. Auto-enlacement et composantes brisée et radiale de la reliure

Comme nous l'avons vu, la reliure est réunion de deux composantes, la composante brisée et la composante radiale. L'outil qui va nous permettre de comprendre comment distinguer ces deux composantes est l'autoenlacement d'une surface avec une orbite.

Rappelons que, étant donné une R_α-section S, $M_{\partial S}$ est la variété à bord obtenue en éclatant les orbites périodiques du bord ∂S. Chaque orbite $\gamma \in \partial S$ est éclatée en un tore $\mathbb{T}_\gamma$. La surface S induit sur $M_{\partial S}$ une surface à bord $S_{\partial S}$. Le champ de Reeb R_α est prolongé sur chaque tore $\mathbb{T}_\gamma$ par le linéarisé.

Définition 3.9. — *Soit S une R_α-section ∂-forte et soit γ une orbite périodique dans ∂S. L'autoenlacement de γ avec S, noté* $\mathrm{Enl}(\gamma, S) \in \mathbb{R}$, *est le nombre de rotation du prolongement de R_α sur $\mathbb{T}_\gamma$, calculé par rapport à la trace $S_{\partial S} \cap \mathbb{T}_\gamma$ de S sur le tore.*

Précisons. Nous pouvons voir l'éclatement de γ comme le fibré trivial $\gamma \times S^1$. La trace de S sur $\mathbb{T}_\gamma$ peut être vue comme le choix de (au moins) un point sur chaque fibre $\gamma(t) \times S^1$. Fixons $v \in \gamma(0) \times S^1$. En utilisant l'extension du champ de Reeb, nous pouvons considérer l'orbite de v : pour chaque t, l'image $D\phi_t^{R_\alpha}(v)$ est dans $\gamma(t) \times S^1$. En ayant la trace de S comme repère, nous pouvons associer à chaque t l'angle de $D\phi_t^{R_\alpha}(v)$ et construire une fonction angle $t \in \mathbb{R} \mapsto \theta(t) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Un relevé est alors une fonction continue $\tilde{\theta}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Le nombre de rotation peut être défini comme la vitesse angulaire moyenne de v, *i.e.* la limite $\lim_{t\to+\infty} \tilde{\theta}(t)/t$.

Exemple 3.10. — Considérons l'orbite $\gamma = \{0\} \times S^1$ dans $S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Soit S l'adhérence du disque $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \frac{z_1}{|z_1|} = 1 \in S^1\}$. Sur le tore $\mathbb{T}_\gamma$, la trace de S est le cercle $\{1\} \times S^1$. Supposons que le champ de Reeb se prolonge sur $\mathbb{T}_\gamma$ comme $(e^{2\pi it}, e^{2\pi is}) \mapsto (2\pi i\theta e^{2\pi it}, 2\pi ie^{2\pi is})$, pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. Alors l'autoenlacement de γ avec S est égal à $2\pi\theta$: sur chaque fibre, la trace de S correspond toujours au point 1, tandis que la dynamique au temps t agit comme la rotation d'angle $2\pi\theta t$.

Rappelons que $\mathcal{P}$ est l'ensemble des orbites périodiques dont l'action est bornée par l'action $\mathcal{A}(\hat{\psi})$, où $\hat{\psi}$ est un générateur ECH qui vérifie $U\hat{\gamma} \neq 0$, construit dans la proposition 3.1. Étant donné une orbite hyperbolique, ses variétés stables et instables décomposent un petit voisinage de l'orbite en *quadrants*. Nous allons raffiner la preuve de la proposition 3.8 pour mieux comprendre les types d'orbites qui constituent les bords des R_α-sections trouvées.

Lemme 3.11. — *Soit $\gamma \in \mathcal{P}$. Alors une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. *il existe une R_α-section ∂-forte S transverse à γ ;*
2. *il existe une R_α-section ∂-forte S telle que $\gamma \subset \partial S$ et* $\mathrm{Enl}(\gamma, S)$ *est non nul ;*
3. *il existe une R_α-section ∂-forte S telle que $\gamma \subset \partial S$ et* $\mathrm{Enl}(\gamma, S)$ *est nul. Le cas échéant, l'orbite γ est hyperbolique et il y a au moins une R_α-section ∂-forte dans chaque quadrant de γ qui contient γ dans son bord.*

Démonstration. — Ce lemme est un raffinement de la preuve de la proposition 3.8. En particulier, le point intéressant est ce qu'on peut déduire sur une certaine orbite périodique à partir de conditions sur l'autoenlacement, voir le point 3. Dans cette preuve, quand on parle de chirurgie de Fried, on fera référence toujours au procédé décrit dans la preuve de la proposition 3.8.

Soit $z \in \gamma$ et soit S la surface donnée par la proposition 3.7 et qui passe par le point z. Comme les points en lesquels la surface n'est pas immergée sont loin de $\mathcal{P}$, au moins une des conditions suivantes est vérifiée :

1. la surface S est transverse à γ en z ;
2. le point z est contenu dans ∂S et $\mathrm{Enl}(\gamma, S) \neq 0$;
3. $z \in \partial S$ et $\mathrm{Enl}(\gamma, S) = 0$.

Plusieurs de ces conditions peuvent être vérifiées simultanément.

Nous pouvons appliquer le même schéma de résolution à la surface S décrit dans la proposition 3.8 : il faut alors comprendre comment l'autoenlacement peut varier.

Supposons que seule la condition 1 est vérifiée. La chirurgie de Fried décrite dans la proposition 3.8 nous donne encore une surface transverse à γ en z.

Supposons que seule la condition 2 est vérifiée. La surface produite par chirurgie est une surface qui contient γ dans son bord et l'autoenlacement ne peut pas changer, il reste non nul.

Si la surface S vérifie la condition 1 et la condition 3, alors on doit défaire un point d'intersection double sur le bord, et la chirurgie nous donne une surface qui contient encore γ dans son bord, mais l'autoenlacement doit changer et, en particulier, il devient non nul.

Si la surface S satisfait les conditions 1 et 2, alors la chirurgie va donner une nouvelle surface qui contient encore γ dans le bord. Le processus de désingularisation de la surface change l'autoenlacement, mais, dans ce cas, de façon cohérente avec la surface initiale. En particulier, l'autoenlacement reste non nul.

Il nous reste alors un cas à discuter : supposons que S satisfait la seule condition 3. En particulier, la chirurgie de Fried ne change pas la surface proche de γ et l'orbite reste dans le bord de la surface, même après chirurgie. La projection de la courbe $\tilde{J}$-holomorphe satisfait les asymptotiques de Hofer, Wysocki et Zehnder (1996) (voir aussi Siefring, 2008). Il existe alors un voisinage $\gamma \times D^2$ de l'orbite γ tel que, si on munit D^2 des coordonnées polaires (θ, r) et si on note T la période de γ, la projection de la courbe $\tilde{J}$-holomorphe est tangente au premier ordre à une demi-hélice $(t, r) \mapsto (\gamma(t), \pi t/T, r)$ dans $\gamma \times D^2$. L'orbite γ est alors hyperbolique : en effet, si elle était elliptique, son autoenlacement avec la surface serait dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, mais cela serait en contradiction avec l'hypothèse $\mathrm{Enl}(\gamma, S) = 0$.

De plus, il est possible de montrer que la surface reste toujours dans le même quadrant déterminé par les variétés stables et instables de γ. Supposons par l'absurde que la surface sorte d'un quadrant. Comme elle est tangente au premier ordre à notre demi-hélice, et comme l'intérieur de la surface est toujours positivement transverse au champ de Reeb, la surface doit revenir dans le même quadrant en faisant un tour. Ceci est en contradiction avec le fait que l'autoenlacement est nul. Toujours dans le cadre de la condition 3, il est possible de montrer qu'il existe au moins une R_α-section par quadrant dont le bord contient γ. Nous pouvons approcher le point $z \in \gamma$ par une suite de points génériques $(z_n)_n$ contenus dans un quadrant fixé. On a alors une suite de R_α-sections S_n, chacune passant par z_n. La section candidate contenue dans le quadrant est alors la limite des S_n. Or, chaque S_n ne peut pas sortir du quadrant et cela reste vrai pour la limite. On peut démontrer que cette limite est une R_α-section qui contient γ dans son bord, et qui est contenu dans le quadrant fixé. Comme cette construction est possible pour chaque quadrant, on obtient le résultat cherché. □

3.5. Construction du livre brisé

Dans la section précédente, nous avons construit une R_α-section pour chaque point : il faut maintenant en choisir un nombre fini, tout en s'assurant de pouvoir « capturer » toutes les orbites.

Proposition 3.12. — *Il existe un nombre fini de R_α-sections ∂-forte $R_1, \ldots, R_m$ telles que*

— $\mathrm{int}(R_i) \cap \mathrm{int}(R_j) = \emptyset$ *pour* $i \neq j$ *;*

— $\mathcal{R} := \bigcup_{i=1}^m R_i$ *rencontre toute orbite.*

Démonstration. — Soit $\hat{\psi}$ un générateur ECH tel que $U\hat{\psi} \neq 0$, comme construit dans la proposition 3.1. Considérons l'ensemble $\mathcal{P}$ des orbites périodiques dont l'action est bornée par l'action de $\hat{\psi}$. Soit $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert de $\mathcal{P}$. Par compacité, nous pouvons recouvrir $M \setminus \mathcal{U}$ avec un nombre fini de boîtes de flot centrées en des points $z_1, \ldots, z_N$. Par la proposition 3.8, en chaque point de $M \setminus \mathcal{U}$ il passe au moins une R_α-section ∂-forte dont le bord est contenu dans $\mathcal{P}$. Pour chaque z_i, par compacité de l'adhérence de la boîte de flot centrée en z_i, il existe un nombre fini de R_α-sections, notées $R_1^i, \ldots, R_{m_i}^i$, dont la réunion rencontre toutes les orbites de la boîte de flot.

Considérons alors

$$\mathcal{R} := \bigcup_{i=1}^{N} \bigcup_{j=1}^{m_i} R_j^i \,.$$

La surface $\mathcal{R}$ rencontre alors toutes les orbites de $M \setminus \mathcal{U}$. On ne peut pas assurer qu'il n'y a pas d'autointersections de $\mathcal{R}$. Nous appliquons la procédure de désingularisation de Fried à $\mathcal{R}$ et nous obtenons une surface $\mathcal{R}^F$ qui est une collection finie de surfaces disjointes, chacune étant une R_α-section ∂-forte. Plus précisément, nous avons

$$\mathcal{R}^F = \bigcup_{i=1}^{M} S_i \,,$$

où chaque S_i est une R_α-section ∂-forte, $\mathrm{int}(S_i) \cap \mathrm{int}(S_j) = \emptyset$ pour $i \neq j$, $\mathcal{R}^F$ rencontre les orbites de tous les points dans $M \setminus \mathcal{U}$, et le bord satisfait $\partial \mathcal{R}^F \subset \mathcal{P}$.

Nous allons maintenant analyser la surface $\mathcal{R}^F$ autour de $\mathcal{P}$. Soit alors $\gamma \in \mathcal{P}$. S'il existe S_i transverse à γ, alors toutes les S_i sont transverses à γ : en fait, l'orbite γ n'est pas dans $\partial\mathcal{R}^F$.

Supposons maintenant qu'aucune surface S_i ne soit transverse à γ. Par le lemme 3.11, il existe une R_α-section ∂-forte, qu'on va noter S_γ, telle qu'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. γ est transverse à S_γ ;
2. $\gamma \subset \partial S_\gamma$ et l'autoenlacement satisfait $\mathrm{Enl}(\gamma, S_\gamma) \neq 0$;
3. $\gamma \subset \partial S_\gamma$ et l'autoenlacement satisfait $\mathrm{Enl}(\gamma, S_\gamma) = 0$.

Dans les cas 1 et 2, nous considérons $\mathcal{R}^F \cup S_\gamma$ et, par chirurgie de Fried, nous obtenons une nouvelle collection finie $\tilde{\mathcal{R}}$ de sections. L'orbite γ est contenue dans le bord $\partial\tilde{\mathcal{R}}$ et, soit par transversalité, soit car l'autoenlacement est non nul, la nouvelle surface $\tilde{\mathcal{R}}$ va rencontrer aussi les orbites autour de γ, en plus des orbites dans $M \setminus \mathcal{U}$.

Dans le cas 3, nous savons que l'orbite γ est hyperbolique et qu'il existe au moins une R_α-section contenue dans chaque quadrant déterminé par les variétés stables et instables. Pour des questions techniques de construction du modèle local du livre brisé autour des orbites périodiques de ce type, nous voulons garder aussi une section par quadrant dans notre réunion finie de R_α-sections.

Notons $(S_q^i)_{i\in I}$ la famille des sections qui localement sont dans les quadrants de γ. Si l'orbite est hyperbolique positive, nous avons 4 sections, si elle est négative, nous avons 2 sections. Considérons la réunion

$$\mathcal{R}^F \cup S_\gamma \cup \left(\bigcup_{i\in I} S_q^i \right) .$$

Par chirurgie de Fried sur la surface ci-dessus, nous obtenons une nouvelle collection de sections $\tilde{\mathcal{R}}$ telle que $\gamma \subset \partial\tilde{\mathcal{R}}$ et qui rencontre toutes les orbites autour de γ et dans $M \setminus \mathcal{U}$.

Comme $\mathcal{P}$ est un ensemble fini et quitte à remplacer $\mathcal{R}^F$ par la réunion des sections obtenue en suivant la procédure décrite précédemment pour une orbite périodique, on peut répéter ce schéma pour toutes les orbites dans $\mathcal{P}$. La collection finale des surfaces est l'ensemble de R_α-sections recherché. □

Remarque 3.13. — Soit z un point tel qu'il existe $T > 0$ pour lequel la demi-orbite $\phi^{R_\alpha}_{[T,+\infty)}(z)$ ne rencontre pas la collection $\mathcal{R}$ de sections donnée par la proposition 3.12. Il est alors possible de montrer que le point z doit converger vers une orbite $\gamma \in \partial\mathcal{R}$. De plus, cette orbite est hyperbolique et le point z appartient à sa variété stable. Il est aussi possible de déduire que, dans la construction de $\mathcal{R}$, l'orbite γ doit être une orbite dont l'autoenlacement est nul (sinon un tel point z ne pourrait pas exister) : chaque quadrant de γ contient alors localement au moins une R_α-section. Ces orbites seront les orbites de la composante brisée de la reliure.

Nous pouvons maintenant conclure la construction du livre brisé en partant de la collection finie de R_α-sections.

Remarque 3.14. — Si toute orbite rencontre une infinité de fois la collection de sections $\mathcal{R}$, alors il est possible d'ordonner les sections rencontrées et nous allons obtenir un livre ouvert rationnel.

Démonstration du théorème 2.18. — L'idée pour construire le feuilletage du livre brisé consiste à trouver un nombre fini de R_α-sections dont la réunion rencontre toutes les orbites. Il sera alors suffisant de pousser par le flot chacune de ces sections pour avoir notre feuilletage candidat. La reliure du livre brisé est la réunion finie des bords des R_α-sections de départ. Un point délicat de la construction sera d'assurer que les modèles locaux autour des orbites de la reliure sont ceux de la définition de livre brisé. Précisons cette idée.

La proposition 3.12 nous assure l'existence d'une collection finie de R_α-sections ∂-forte qui rencontre toutes les orbites :

$$\mathcal{R} = \bigcup_{i=1}^{m} R_i \,.$$

Parmi les orbites qui composent le bord $\partial\mathcal{R}$, nous pouvons considérer celles qui sont hyperboliques et qui ont un autoenlacement nul avec $\mathcal{R}$. Elles sont en nombre fini et nous les notons $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$. Toujours par la construction faite dans la proposition 3.12, pour chaque orbite de ce type, il y a une R_α-section par quadrant. Nous modifions $\mathcal{R}$ en doublant les sections contenues dans les quadrants des orbites hyperboliques d'autoenlacement nul : pour doubler une section, il suffit de la pousser par le flot du champ de Reeb R_α. Donc, notre collection $\mathcal{R}$ est à présent

$$\bigcup_{i=1}^{m} R_i \cup \bigcup_{j=1}^{n} \tilde{R}_j \,,$$

où chaque $\tilde{R}_j$ est la copie d'une section contenue dans le quadrant d'une orbite $\gamma_k, k = 1, \ldots, l$. Par un abus de notation, nous continuons à noter $\mathcal{R}$ la collection finie avec les doublons de sections. Maintenant, pour chaque orbite $\gamma_k, k = 1, \ldots, l$, nous enlevons un voisinage de type Morse de cette orbite, voir Figure 12.

Observons qu'en poussant par le flot de Reeb la réunion des sections $\mathcal{R}$, nous obtenons un feuilletage qui rencontre toutes les orbites de $M \backslash \partial\mathcal{R}$ et chaque feuille est positivement transverse au champ de Reeb. Il nous reste à comprendre les modèles locaux autour des orbites périodiques de $\partial\mathcal{R}$.

Considérons alors une orbite $\gamma \in \partial\mathcal{R}$. Il y a deux possibilités.

• Si $\mathrm{Enl}(\gamma, \mathcal{R}) \neq 0$, alors les orbites autour de γ rencontrent $\mathcal{R}$ une infinité de fois et il est possible de définir pour ces orbites une application de premier retour sur $\mathcal{R}$. En particulier, une telle orbite autour de γ peut être décomposée en segments compacts, dont les extrémités sont les intersections successives avec $\mathcal{R}$. En poussant les sections par le flot pour obtenir notre feuilletage, le modèle local autour de γ est alors celui d'un livre ouvert rationnel.

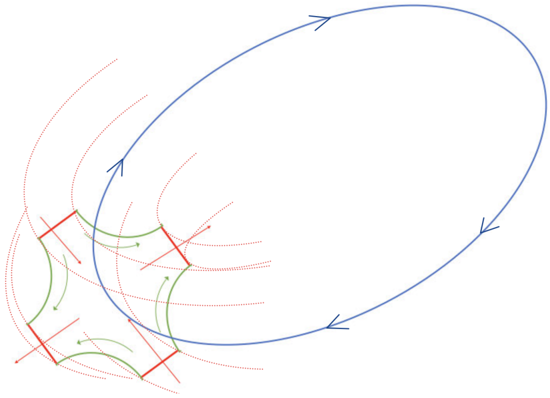

Figure 12. Un voisinage de type Morse d'une orbite hyperbolique.

• Si $\mathrm{Enl}(\gamma, \mathcal{R}) = 0$, alors la collection $\mathcal{R}$ aura des R_α-sections qui rencontrent le voisinage de type Morse de l'orbite. L'intersection de $\mathcal{R}$ avec le voisinage est composée d'au moins 8 anneaux : il y en a au moins deux qui se trouvent entre une branche stable et une instable, grâce à l'opération de doublage. Nous décrivons maintenant comment compléter le feuilletage autour de ces voisinages de type Morse. Notons $R_i, \tilde{R}_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$ les deux anneaux dans le i-ème quadrant. Entre chaque R_i et $\tilde{R}_i$, la partie contenue dans le quadrant est feuilletée sur un intervalle, il suffit de pousser R_i sur $\tilde{R}_i$ par le flot. Si nous considérons R_i et R_j, sections dans des quadrants différents mais adjacents, nous allons obtenir localement un seul anneau de la façon suivante.

Poussons R_i (resp. R_j) par le flot dans la direction de l'autre section : on obtient un anneau $\tilde{R}_i$ (resp. $\tilde{R}_j$). L'anneau $\tilde{R}_i$, qu'on identifie à $\mathbb{T} \times [0, 1]$, peut être décomposé comme deux anneaux $\tilde{R}_i^1$ et $\tilde{R}_i^2$, qu'on identifie à $\mathbb{T} \times [0, \frac{1}{2}]$ et $\mathbb{T} \times [\frac{1}{2}, 1]$, tels que $\gamma \subset \partial \tilde{R}_i^1$, $\partial \tilde{R}_i^2$ intersecte le bord du voisinage de type Morse, et $\partial \tilde{R}_i^1 \cap \partial \tilde{R}_i^2 =: \partial \tilde{R}_i^{\mathrm{int}}$ est contenu dans l'intérieur du voisinage de type Morse. Nous faisons la même opération pour l'anneau $\tilde{R}_j$, qu'on voit comme $\tilde{R}_j^1 \cup \tilde{R}_j^2$. Nous considérons un anneau A contenu dans l'intérieur du voisinage de type Morse, dont le bord est $\partial \tilde{R}_i^{\mathrm{int}} \cup \partial \tilde{R}_j^{\mathrm{int}}$ et qui est positivement transverse au champ de Reeb. Enfin, on va remplacer $\tilde{R}_i \cup \tilde{R}_j$ par la R_α section obtenue en recollant ensemble, de façon cohérente avec le champ de Reeb, les anneaux $\tilde{R}_i^1, A, \tilde{R}_j^1$, voir Figure 13. Nous complétons le feuilletage en poussant par le flot ce nouvel anneau en dehors du voisinage de type Morse. Chaque orbite autour de γ va rencontrer en temps fini une section ainsi modifiée.

En poussant par le flot de Reeb certaines sections ou des modifications de sections, nous obtenons un feuilletage de la variété M. Dans cette construction, le complémentaire des voisinages de type Morse est fibré sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

Pour terminer alors la construction de notre livre brisé, il suffit de préciser le modèle local autour des orbites hyperboliques d'autoenlacement nul, *i.e.* dans les voisinages de type Morse. La construction faite montre qu'il est possible de feuilleter les voisinages des orbites brisées comme annoncé dans la définition, tout en restant cohérent avec

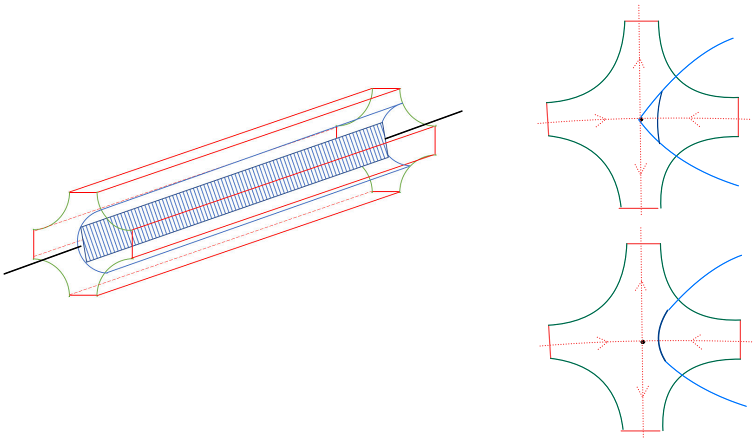

FIGURE 13. Comment coller des sections adjacentes et contenues dans des quadrants différents.

le feuilletage obtenu en dehors : on alterne quatre secteurs hyperboliques avec quatre secteurs radiaux.

□

4. Quelques idées de preuve des applications dynamiques

Le but de cette section est de donner les idées et les outils utilisés pour montrer les applications dynamiques de l'existence de livres brisés, présentées par Colin, Dehornoy et Rechtman (2023).

4.1. Quelques outils : fers à cheval, applications pseudo-Anosov, décomposition de Nielsen-Thurston

Dans la preuve des théorèmes 2.19, 2.20 et 2.22, les auteurs et l'autrice font appel à des notions et des résultats classiques en dynamique, que nous rappelons brièvement ici.

Nous commençons par rappeler la notion d'entropie topologique. Étant donné un flot ϕ_t^X sur un espace métrique compact X, l'entropie topologique de ϕ_t^X, notée $h(\phi_t^X)$, est une quantité qui mesure la complexité d'une telle dynamique. Plus précisément, si $d$est une distance sur X, nous fixons $\epsilon > 0, T > 0$ et définissons la boule dynamique centrée en $x \in X$ de rayon (ϵ, T) comme l'ensemble de points $y \in X$ tels que

$$\max_{t\in[0,T]} d(\phi_t^X(x), \phi_t^X(y)) < \epsilon\,.$$

Du fait de la compacité de X, il existe un nombre fini minimal $N(\epsilon, T)$ de telles boules dynamiques qui recouvrent l'espace : c'est une mesure de combien de morceaux d'orbites différents de longueur T on peut détecter à la précision ϵ. Le taux de croissance exponentiel de cette quantité est alors l'entropie topologique :

$$h(\phi_t^X) := \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{T \to +\infty} \frac{\log N(\epsilon, T)}{T}.$$

L'exemple typique d'une dynamique avec entropie topologique positive est le fer à cheval de Smale. Étant donné un difféomorphisme f sur une surface S, un fer à cheval est un sous-ensemble $H \subset S$, compact, invariant par f, tel que $f|_H$ est semi-conjugué à un décalage de type fini. Cette sous-dynamique apparaît dès qu'une orbite périodique hyperbolique a une intersection transverse entre sa variété stable et sa variété instable. Pour un flot de classe C^2 sur une variété fermée de dimension 3, on peut en dire plus : l'existence d'un fer à cheval est équivalente à la positivité de l'entropie, comme montré par Lima et Sarig (2019), en généralisant le travail fondateur de Katok (1980) pour des difféomorphismes de surface.

En particulier, pour un flot en dimension 3 de classe C^2, la positivité de l'entropie topologique assure aussi que le nombre d'orbites périodiques croît de façon exponentielle par rapport à la période.

Une condition pour garantir la positivité de l'entropie est l'existence d'un cycle d'intersections topologiques hétéroclines. Considérons un flot ϕ_t^X sur une variété fermée de dimension 3. Étant donné deux orbites périodiques hyperboliques γ_1, γ_2 (pas forcément distinctes), une orbite hétérocline de γ_1 à γ_2 est une orbite qui appartient à la variété instable de γ_1, ainsi qu'à la variété stable de γ_2 ; on parle d'orbite homocline si $\gamma_1 = \gamma_2$. Une intersection topologique hétérocline entre la variété instable de γ_1 et la variété stable de γ_2 est une intersection entre $W^u(\gamma_1)$ et $W^s(\gamma_2)$ (en particulier, l'intersection donne lieu à une orbite hétérocline) non nécessairement transverse, mais telle qu'il existe un disque D transverse au flot qui rencontre l'orbite hétérocline d'intersection en un point z tel que la condition suivante est vérifiée. Considérons la composante connexe $D \cap V^u(\gamma_1)$ qui contient le point z : son complémentaire dans D a deux composantes connexes. La condition à vérifier est que la composante connexe de $D \cap V^s(\gamma_2)$ qui contient z rencontre chacune de ces deux composantes.

Burns et Weiss (1995) montrent que, s'il existe un nombre fini d'orbites périodiques hyperboliques $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \gamma_{n+1} = \gamma_1$ tel que pour chaque $i = 1 \ldots, n$ il y a une intersection topologique hétérocline entre la variété instable de γ_i et la variété stable de γ_{i+1}, alors l'entropie topologique $h(\phi_t^X)$ est positive.

Une autre source d'entropie positive dans la suite sera l'existence de sections de Birkhoff telles que l'application de premier retour est pseudo-Anosov.

Considérons une surface S compacte et orientée. Rappelons qu'un feuilletage mesuré est un feuilletage singulier $\mathcal{F}$ muni d'une mesure transverse μ : il s'agit d'une mesure définie sur chaque arc transversal au feuilletage et telle que, si α et β sont deux arcs transversaux isotopes par des arcs transversaux dont les extrémités restent sur la même feuille, alors $\mu(\alpha) = \mu(\beta)$.

Définition 4.1. — *Une application* $f\colon S \to S$ *est dite pseudo-Anosov (de facteur* λ*) s'il existe deux feuilletages mesurés* $(\mathcal{F}^s, \mu^s), (\mathcal{F}^u, \mu^u)$ *avec les mêmes singularités et une constante* $\lambda > 1$ *tels que* f *préserve les deux feuilletages, contracte les feuilles de* $\mathcal{F}^s$ *d'un facteur* $\frac{1}{\lambda}$ *et dilate les feuilles de* $\mathcal{F}^u$ *d'un facteur* λ.

Une application pseudo-Anosov a toujours une entropie topologique positive. Il est possible de montrer que, pour une application pseudo-Anosov f de facteur λ, l'entropie vaut $h(f) = \log(\lambda)$. On fait référence à Fathi, Laudenbach et Poénaru (1979, Exposé 10). Les applications pseudo-Anosov ont un rôle clé dans la décomposition de Nielsen–Thurston, que nous allons rappeler ici.

Étant donné une surface compacte orientée S, le théorème de classification de Nielsen–Thurston permet de comprendre un homéomorphisme préservant l'orientation sur S à isotopie près. Voir Fathi, Laudenbach et Poénaru (1979) pour plus de détails.

Théorème 4.2 (Classification de Nielsen–Thurston). — *Pour chaque homéomorphisme* $f\colon S \to S$ *qui préserve l'orientation sur une surface compacte orientée, il existe un homéomorphisme* g *isotope à* f *et une collection finie* $\mathcal{C}$ *(possiblement vide) de courbes simples fermées deux à deux disjointes telles que* g *préserve* $\mathcal{C}$ *et sur chaque composante connexe* Y *de* $S \setminus \mathcal{C}$ *le premier itéré de* g *qui envoie* Y *sur* Y *est*

— *soit périodique, i.e. il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $g^n|_Y = \mathrm{Id}_Y$ *;*

— *soit pseudo-Anosov.*

4.2. Intersections hétéroclines et homoclines des composantes brisées

Soit $(\mathcal{F}, K)$ un livre brisé qui porte une forme de contact α sur M. Le but de ce paragraphe est de donner les idées de la preuve du lemme 2.21 : nous voulons expliquer pourquoi chaque branche de variété instable d'une orbite périodique brisée doit rencontrer une branche de variété stable d'une autre orbite brisée (pas forcément différente). Notre feuilletage $\mathcal{F}$ est obtenu à partir d'une réunion finie de sections, noté $\mathcal{R}$: en poussant par le flot ces sections, nous feuilletons la variété.

Soit $\gamma \in K_b$ une orbite périodique de la composante brisée de la reliure. Soit $V^u(\gamma)$ une branche de sa variété instable, *i.e.* une composante connexe de la variété instable de γ privée de γ. Observons qu'on a $V^u(\gamma) = \phi_{[0,+\infty)}(V^u_{\mathrm{loc}}(\gamma))$, où $V^u_{\mathrm{loc}}(\gamma)$ est une branche de la variété instable locale [(13)].

Supposons par l'absurde que $V^u(\gamma)$ ne rencontre pas de variétés stables d'autres orbites périodiques de la composante brisée. Alors chaque orbite de la branche rencontre une infinité de fois la réunion $\mathcal{R}$ de sections. Cela peut être déduit de la Remarque 3.13, par exemple, car une orbite hyperbolique γ telle que $\mathrm{Enl}(\gamma, \mathcal{R}) = 0$ est une orbite de la composante brisée. Chaque composante connexe de $V^u(\gamma) \cap \mathcal{R}$ est compacte ; comme $\mathcal{R}$ est finie, il existe une section R, parmi celles qui composent $\mathcal{R}$, telle que la branche $V^u(\gamma)$ rencontre une infinité de fois R.

13. La variété instable (resp. stable) locale de γ est l'ensemble des points $x \in M$ tels que $d(\phi_t(x), \gamma) < \epsilon$ pour tout $t < 0$ (resp. $t > 0$), pour un certain $\epsilon > 0$.

Pour T suffisamment grand, l'intersection $\phi_{[0,T]}(V^u_{\mathrm{loc}}(\gamma)) \cap R$ est une collection finie de courbes fermées plongées dans R. Considérons deux telles courbes, C, C'. Vues dans la variété instable, les courbes C, C' sont parallèles à l'orbite périodique γ et elles bordent un anneau $A \subset V^u(\gamma)$.

Si les courbes C, C' sont homotopiquement triviales dans R, elles bordent des disques dans R, respectivement D, D'. Il est possible de montrer que ces disques doivent avoir la même aire par rapport à la forme $d\alpha$. Cela entraîne que $D \cap D' = \emptyset$.

Pourquoi $\int_D d\alpha = \int_{D'} d\alpha$? Considérons la réunion des disques avec l'anneau A contenu dans la variété instable. Cette réunion est topologiquement une sphère, et, par le théorème de Stokes, $\int_{D\cup A\cup(-D')} d\alpha = 0$. Comme l'anneau A est tangent au champ de Reeb, on a $\int_A d\alpha = 0$ et on obtient l'égalité d'aire recherchée.

L'aire de la section R par rapport à la forme $d\alpha$ étant finie, nous pouvons avoir seulement un nombre fini de courbes homotopiquement triviales dans R. Quitte à prendre T encore plus grand [14], on peut supposer que les deux courbes fermées C, C' bordent un anneau A' dans R. Rappelons que les courbes C, C' sont aussi le bord d'un anneau $A \subset V^u(\gamma)$. La réunion des deux anneaux $A \cup A'$ est topologiquement une sphère et, encore par le théorème de Stokes, on a $\int_{A\cup A'} d\alpha = 0$. Comme A est tangent au champ de Reeb, nous en déduisons $\int_{A'} d\alpha = 0$. Ceci est une contradiction avec le fait que $A \subset R$ est positivement transverse au champ de Reeb.

Grâce au lemme 2.21 et en utilisant une approche du type théorie des graphes, il est alors possible de montrer l'énoncé suivant.

Proposition 4.3. — *Soit $(\mathcal{F}, K)$ un livre brisé qui porte une forme de contact α sur M. Supposons que la composante brisée de la reliure est non vide. Alors, il existe $\gamma \in K_b$ qui admet un cycle homocline, i.e. il existe un ensemble d'orbites périodiques hyperboliques $\gamma_i \in K_b$, $i = 0, \ldots, n$, tel que*

— *$\gamma_0 = \gamma_n = \gamma$;*
— *il existe une orbite hétérocline de γ_i à γ_{i+1}, pour tous $i = 0, \ldots, n-1$.*

4.3. Sur la dichotomie 2 ou ∞ : idées de la preuve du théorème 2.19

Soit (M, α) une variété fermée orientée de dimension 3 munie d'une forme de contact non dégénérée. Notons R_α le champ de Reeb associé et $\phi_t^{R_\alpha}$ son flot. Par le théorème 2.18, il existe un livre brisé $(\mathcal{F}, K)$ qui porte la forme de contact α. La reliure K du livre brisé est la réunion disjointe de la composante brisée K_b et de celle radiale K_r. Avant de rentrer dans les détails, nous résumons ci-dessous les trois conditions suffisantes principales garantissant l'existence de deux ou d'une infinité d'orbites périodiques.

1. Une première condition est l'existence d'un cycle d'intersections topologiques hétéroclines. Comme nous avons déjà évoqué, un tel cycle implique l'existence d'un fer à cheval, et donc d'une infinité d'orbites périodiques.

14. Cela va dépendre de la $d\alpha$-aire de la section, de la topologie de R et de l'action de γ.

2. Supposons qu'il existe une R_α-section sur laquelle une application de premier retour h est bien définie. L'existence d'une composante pseudo-Anosov pour la décomposition de Nielsen–Thurston de f implique que l'entropie topologique de f est positive (voir Fathi, Laudenbach et Poénaru, 1979, Exposé 10). Il existe alors un fer à cheval, et donc une infinité d'orbites périodiques.
3. Si on a une application de premier retour sur une R_α-section et si cette section est un disque ou un anneau, Cristofaro-Gardiner, Hutchings et Pomerleano (2019) montrent que le résultat de Franks et Handel (2003) implique l'existence de 2 ou une infinité d'orbites périodiques.

Dans la suite, nous allons distinguer deux cas, selon que la composante brisée K_b est vide ou pas.

4.3.1. *Cas de la composante brisée vide.* — Si la composante brisée de la reliure est vide, alors le livre brisé est un livre ouvert rationnel, voir Lemme 2.16. Il existe une section de Birkhoff ∂-forte S et un homéomorphisme $h\colon S \to S$ qui est l'application de premier retour sur S.

Si la surface S est un disque ou un anneau, alors la condition suffisante 3 s'applique et on a la dichotomie recherchée.

Si S n'est ni un disque ni un anneau, nous considérons la décomposition de Nielsen–Thurston de h. Si cette décomposition a une composante pseudo-Anosov, on peut conclure par la condition 2. Soit h_0 le représentant dans la classe d'isotopie de h donné par Nielsen–Thurston. S'il existe un itéré n pour lequel h_0^n est isotope à l'identité sur S toute entière, alors nous avons une infinité d'orbites périodiques par Cristofaro-Gardiner, Hutchings et Pomerleano (2019).

Supposons que h ne vérifie pas les hypothèses ci-dessus. Par la décomposition de Nielsen–Thurston, il existe une réunion finie $\mathcal{C}$ de courbes simples et un entier $n \in \mathbb{N}$, tels que h^n est isotope à l'identité sur chaque composante connexe de $S \backslash \mathcal{C}$. Comme le groupe des difféotopies de la surface [15] est engendré par des twists de Dehn, l'application h^n, à isotopie près, est une composition de twists de Dehn le long de certaines courbes disjointes. Comme S n'est ni le disque ni l'anneau, au moins une de ces courbes n'est isotope à aucune composante du bord de S. L'application twist de Dehn le long de cette courbe a un cercle de points périodiques de type (p, q) pour chaque $\frac{p}{q} \in [0, 1]$. En utilisant des arguments de stabilité de l'homologie de contact cylindrique, il est possible d'associer à chaque $\frac{p}{q}$ au moins deux orbites périodiques « non triviales » et « stables » pour le flot de Reeb. Ceci permet de déduire l'existence d'une infinité d'orbites périodiques [16].

4.3.2. *Cas de la composante brisée non vide.* — Si la composante brisée est non vide, alors la proposition 4.3 nous assure l'existence d'un cycle homocline. Comme discuté dans le paragraphe 2.5, si la forme de contact portée par le livre brisé est fortement non

15. En anglais *mapping class group*.
16. Une preuve peut être aussi déduite du résultat de Le Calvez (2022), obtenu en parallèle du travail des auteurs.

dégénérée, alors nous pouvons déduire l'existence d'une orbite périodique hyperbolique avec une intersection homocline transverse. En particulier, il y a un fer à cheval : l'entropie topologique est positive et il y a une infinité d'orbites périodiques.

Si la forme de contact est seulement non dégénérée (pas fortement), il n'est pas possible d'obtenir le résultat aussi directement. Une étude des différentes intersections hétéroclines est nécessaire. Voir Figure 14.

Définition 4.4. — *Soient γ_1, γ_2 deux orbites périodiques hyperboliques. Supposons qu'il existe une orbite hétérocline $\hat{\gamma}$ de γ_1 à γ_2. Notons $V^u(\gamma_1)$, resp. $V^s(\gamma_2)$, la branche instable, resp. stable, à laquelle l'orbite $\hat{\gamma}$ appartient. L'orbite $\hat{\gamma}$ peut être des types suivants :*

1. *l'orbite $\hat{\gamma}$ est une intersection hétérocline topologique ;*
2. *l'orbite $\hat{\gamma}$ est une connexion hétérocline : les branches $V^u(\gamma_1)$ et $V^s(\gamma_2)$ coïncident ;*
3. *l'orbite $\hat{\gamma}$ est une intersection hétérocline unilatérale : les branches stable et instable ne coïncident pas et elles ne se traversent pas en $\hat{\gamma}$.*

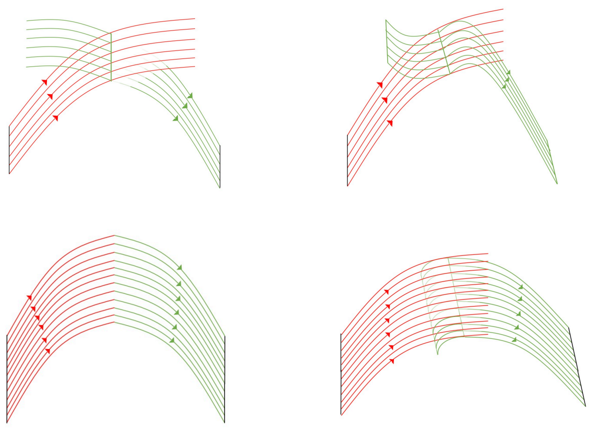

Figure 14. Les différents types d'intersection hétérocline.

Observons que les intersections hétéroclines topologiques contiennent aussi les intersections hétéroclines transverses.

Grâce aux résultats de Burns et Weiss (1995), si le cycle homocline dont l'existence est assurée par la proposition 4.3 se compose uniquement d'intersections hétéroclines topologiques, l'entropie est positive et il y a une infinité d'orbites périodiques : nous sommes dans le cas de la condition 1.

Il faut alors considérer les cas des connexions hétéroclines et des intersections hétéroclines unilatérales. Commençons par supposer que toutes les intersections sont des connexions hétéroclines.

Proposition 4.5. — *Soit* $(\mathcal{F}, K)$ *un livre brisé qui porte une forme de contact non dégénérée* α*. Supposons que la composante brisée de la reliure est non vide et que toutes les orbites hétéroclines entre orbites périodiques de* K_b *sont des connexions hétéroclines. Alors il existe une infinité d'orbites périodiques.*

Démonstration. — Nous découpons la variété M le long des connexions hétéroclines entre les orbites de la composante brisée de la reliure. On obtient alors une nouvelle variété $\hat{M}$ de dimension 3 a priori non connexe. Grâce au feuilletage induit par $\mathcal{F}$ sur la nouvelle variété et par le théorème d'Haefliger, il est possible de montrer que chaque composante connexe de $\hat{M}$ est fibrée sur S^1 et qu'il existe une section de Birkhoff (∂-forte) dans chaque composante connexe.

S'il existe une section de Birkhoff qui n'est ni un disque ni un anneau, alors il est possible de montrer l'existence d'une infinité d'orbites périodiques en argumentant comme pour le cas $K_b = \emptyset$.

Dans le cas restant, on peut déduire qu'il existe une section de Birkhoff qui est un anneau et dont le bord se compose d'une orbite de la composante radiale et d'une orbite de la composante brisée. Quitte à faire une perturbation du feuilletage, et donc de la section de Birkhoff, on obtient une application de premier retour sur l'anneau fermé qui a un point périodique sur le bord. Un théorème de Franks (1992) assure alors qu'il y a une infinité d'orbites périodiques.

□

La partie plus technique de la preuve concerne les intersections hétéroclines unilatérales. Il faut montrer que, si de telles intersections se produisent, elles viennent toujours avec des intersections topologiques. Nous renvoyons à Colin, Dehornoy et Rechtman (2023) pour la preuve du résultat suivant.

Lemme 4.6. — *Soit* $(\mathcal{F}, K)$ *un livre brisé qui porte la forme de contact* α *non dégénérée. Soit* $\gamma \in K_b$*. Si une branche instable* $V^u(\gamma)$ *ne coïncide pas avec des branches stables d'orbites de la composante brisée* K_b*, alors il existe une intersection hétérocline topologique faisant intervenir* $V^u(\gamma)$*.*

Pour montrer le théorème 2.19 il reste à discuter le cas suivant : les intersections hétéroclines ne sont pas toutes des connexions, en particulier, par le lemme 4.6, il y a au moins une intersection hétérocline topologique.

Proposition 4.7. — *Soit* $(\mathcal{F}, K)$ *un livre brisé qui porte la forme de contact* α *non dégénérée. Supposons que la composante brisée de la reliure est non vide et qu'il existe au moins une intersection hétérocline topologique entre deux orbites périodiques dans* K_b*. Alors le champ de Reeb* R_α *admet une infinité d'orbites périodiques.*

Démonstration. — L'idée de la preuve est d'exhiber un cycle d'intersections topologiques hétéroclines, ce qui permet de conclure par la condition 1. Si l'intersection topologique implique les branches stable et instable de la même orbite périodique, alors nous avons tout de suite le cycle recherché. Sinon, comme dans la preuve de la proposition 4.5, nous découpons M le long des connexions hétéroclines. Soit N une composante connexe de la nouvelle variété qui contient une intersection hétérocline topologique dans son intérieur. En partant des branches stable et instable impliquées dans cette intersection topologique, on peut trouver un cycle homocline qui doit être contenu dans N. Comme il n'y a pas de connexions hétéroclines à l'intérieur de N, le cycle se compose d'intersections topologiques hétéroclines. Ceci termine alors la preuve. □

Remarque 4.8. — Nous remarquons que, si la composante brisée est non vide et les orbites hétéroclines ne sont pas toutes des connexions, alors les auteurs sont en train de montrer l'existence d'un fer à cheval, donc d'une entropie topologique positive. Cela va être utilisé dans la section suivante pour traiter une bonne partie des cas possibles.

4.4. Sur l'entropie du champ de Reeb : idées de la preuve des théorèmes 2.20 et 2.22

Nous commençons par donner les idées de la preuve du fait qu'un champ de Reeb non dégénéré sur une variété M non graphée a une entropie topologique positive. Les conditions suffisantes utilisées pour garantir une entropie positive sont les points 1 et 2 décrits dans la section précédente. Considérons une variété M fermée, orientée, de dimension 3, qui ne soit pas graphée. Cela signifie qu'il n'est pas possible de décomposer M, en coupant le long des tores plongés, comme fibrés en cercle au-dessus d'une surface. Soit α une forme de contact sur M non dégénérée portée par un livre brisé $(\mathcal{F}, K)$.

Si la composante brisée K_b est vide, alors $(\mathcal{F}, K)$ est un livre ouvert rationnel. Nous avons une section de Birkhoff ∂-forte S et un homéomorphisme de premier retour $h\colon S \to S$. Comme la variété M n'est pas graphée, la décomposition de Nielsen–Thurston de h a une composante pseudo-Anosov, voir Fathi, Laudenbach et Poénaru (1979, Exposé 14). Ceci permet de conclure que l'entropie topologique est positive par la condition 2.

Si la composante brisée K_b est non vide et toutes les intersections hétéroclines sont des connexions, alors nous allons couper la variété M le long des connexions hétéroclines, comme dans la preuve de la proposition 4.5. Chaque composante connexe de la nouvelle variété est une fibration sur S^1 et il existe une application de premier retour h bien définie sur une section de Birkhoff. Comme pour le cas où la composante brisée est vide, comme la variété n'est pas graphée, la décomposition de Nielsen–Thurston de h a une composante pseudo-Anosov et on conclut par la condition 2.

Si la composante brisée K_b est non vide et les intersections hétéroclines ne sont pas toutes des connexions, alors, par le lemme 4.6, il existe au moins une intersection topologique hétérocline. On peut répéter la preuve de la proposition 4.7, voir Remarque 4.8 :

il existe un cycle d'intersections topologiques hétéroclines et on en déduit que l'entropie est positive par la condition 1.

Pour terminer, concernant le théorème 2.22, si nous avons un champ de Reeb fortement non dégénéré d'entropie nulle, alors il est porté par un livre brisé tel que la composante brisée de la reliure est vide. Sinon, comme toutes les intersections hétéroclines sont transverses pour l'hypothèse de forte non dégénérescence, il serait possible de montrer l'existence d'un fer à cheval. Le flot aurait alors une entropie positive, en contradiction avec l'hypothèse.

Cet argument, avec la preuve du théorème 2.20, permet de donner un énoncé légèrement plus général du théorème 2.22 : si R_α est un champ de Reeb non dégénéré d'entropie topologique nulle et tel que les intersections hétéroclines ne sont pas toutes des connexions hétéroclines, alors R_α est porté par un livre ouvert rationnel.

Références

Marcelo Alves (2016). « Cylindrical contact homology and topological entropy », *Geom. Topol.* **20** (6), p. 3519-3569.

Marcelo Alves et Abror Pirnapasov (2022). « Reeb orbits that force topological entropy », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **42** (10), p. 3025-3068.

George Birkhoff (1917). « Dynamical systems with two degrees of freedom », *Trans. Amer. Math. Soc.* **18** (2), p. 199-300.

Barney Bramham (2015a). « Periodic approximations of irrational pseudo-rotations using pseudoholomorphic curves », *Ann. of Math. (2)* **181** (3), p. 1033-1086.

——— (2015b). « Pseudo-rotations with sufficiently Liouvillean rotation number are C^0-rigid », *Invent. Math.* **199** (2), p. 561-580.

Keith Burns et Howard Weiss (1995). « A geometric criterion for positive topological entropy », *Comm. Math. Phys.* **172** (1), p. 95-118.

Robert Cardona et Ana Rechtman (2023). *Periodic orbits and Birkhoff sections of stable Hamiltonian structures.* arXiv : `2206.14732 [math.DS]`.

Vincent Colin, Pierre Dehornoy, Umberto Hryniewicz et Ana Rechtman (2023). « Generic properties of 3-dimensional Reeb flows : Birkhoff sections and entropy », *Comment. Math. Helv.* To appear.

Vincent Colin, Pierre Dehornoy et Ana Rechtman (2023). « On the existence of supporting broken book decompositions for contact forms in dimension 3 », *Invent. Math.* **231** (3), p. 1489-1539.

Vincent Colin, Paolo Ghiggini et Ko Honda (2020). « An exposition of the equivalence of Heegaard Floer homology and embedded contact homology », in : *Characters in low-dimensional topology.* T. 760. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., [Providence], RI, p. 45-101.

Vincent Colin et Ko Honda (2013). « Reeb vector fields and open book decompositions », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **15** (2), p. 443-507.

Gonzalo Contreras, Gerhard Knieper, Marco Mazzucchelli et Benjamin Schulz (2022). *Surfaces of section for geodesic flows of closed surfaces*. arXiv : 2204.11977 [math.DG, math.DS, math.SG].

Gonzalo Contreras et Marco Mazzucchelli (2022). « Existence of Birkhoff sections for Kupka–Smale Reeb flows of closed contact 3-manifolds », *Geom. Funct. Anal.* **32** (5), p. 951-979.

——— (2024). « Proof of the C^2-stability conjecture for geodesic flows of closed surfaces », *Duke Math. J.* **173** (2), p. 347-390.

Gonzalo Contreras et Fernando Oliveira (2004). « C^2 densely the 2-sphere has an elliptic closed geodesic », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **24** (5), p. 1395-1423.

Gonzalo Contreras et Gabriel Paternain (2002). « Genericity of geodesic flows with positive topological entropy on S^2 », *J. Differential Geom.* **61** (1), p. 1-49.

Daniel Cristofaro-Gardiner, Umberto Hryniewicz, Michael Hutchings et Hui Liu (2023). « Contact three-manifolds with exactly two simple Reeb orbits », *Geom. Topol.* **27** (9), p. 3801-3831.

Daniel Cristofaro-Gardiner et Michael Hutchings (2016). « From one Reeb orbit to two », *J. Differential Geom.* **102** (1), p. 25-36.

Daniel Cristofaro-Gardiner, Michael Hutchings et Daniel Pomerleano (2019). « Torsion contact forms in three dimensions have two or infinitely many Reeb orbits », *Geom. Topol.* **23** (7), p. 3601-3645.

Naiara de Paulo et Pedro Salomão (2018). « Systems of transversal sections near critical energy levels of Hamiltonian systems in $\mathbb{R}^4$ », *Mem. Amer. Math. Soc.* **252** (1202), p. v+105.

Albert Fathi, François Laudenbach et Valentin Poénaru (1979). *Travaux de Thurston sur les surfaces*. T. 66-67. Astérisque. Séminaire Orsay, With an English summary. Société Mathématique de France, Paris, p. 284.

Todd Fisher et Boris Hasselblatt (2019). *Hyperbolic flows*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. EMS Publishing House, Berlin, p. xiv+723.

John Franks (1992). « Geodesics on S^2 and periodic points of annulus homeomorphisms », *Invent. Math.* **108** (2), p. 403-418.

John Franks et Michael Handel (2003). « Periodic points of Hamiltonian surface diffeomorphisms », *Geom. Topol.* **7**, p. 713-756.

David Fried (1983). « Transitive Anosov flows and pseudo-Anosov maps », *Topology* **22** (3), p. 299-303.

Hansjörg Geiges (2008). *An introduction to contact topology*. T. 109. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, p. xvi+440.

Viktor Ginzburg, Doris Hein, Umberto Hryniewicz et Leonardo Macarini (2013). « Closed Reeb orbits on the sphere and symplectically degenerate maxima », *Acta Math. Vietnam.* **38** (1), p. 55-78.

Emmanuel Giroux (2002). « Géométrie de contact : de la dimension trois vers les dimensions supérieures ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*. Higher Ed. Press, Beijing, p. 405-414.

André Haefliger (1962). « Variétés feuilletées », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3)* **16**, p. 367-397.

Adam Harris et Gabriel Paternain (2008). « Dynamically convex Finsler metrics and J-holomorphic embedding of asymptotic cylinders », *Ann. Global Anal. Geom.* **34** (2), p. 115-134.

Jenny Harrison (1988). « C^2 counterexamples to the Seifert conjecture », *Topology* **27** (3), p. 249-278.

Helmut Hofer (1993). « Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three », *Invent. Math.* **114** (3), p. 515-563.

Helmut Hofer, Krzysztof Wysocki et Eduard Zehnder (1996). « Properties of pseudoholomorphic curves in symplectisations. I. Asymptotics », *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire* **13** (3), p. 337-379.

——— (1998). « The dynamics on three-dimensional strictly convex energy surfaces », *Ann. of Math. (2)* **148** (1), p. 197-289.

——— (2003). « Finite energy foliations of tight three-spheres and Hamiltonian dynamics », *Ann. of Math. (2)* **157** (1), p. 125-255.

Umberto Hryniewicz et Pedro Salomão (2018). « Global surfaces of section for Reeb flows in dimension three and beyond ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. II. Invited lectures.* World Sci. Publ., Hackensack, NJ, p. 941-967.

Umberto Hryniewicz, Pedro Salomão et Krzysztof Wysocki (2023). « Genus zero global surfaces of section for Reeb flows and a result of Birkhoff », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **25** (9), p. 3365-3451.

Vincent Humilière (2021). « Un lemme de fermeture C^∞ [d'après Asaoka et Irie] », in : Séminaire Bourbaki, Volume 2019/2021, Astérisque, no. 430 (2021), Exposé no. 1168, 55-92.

Michael Hutchings (2014). « Lecture notes on embedded contact homology », in : *Contact and symplectic topology.* T. 26. Bolyai Soc. Math. Stud. János Bolyai Math. Soc., Budapest, p. 389-484.

Michael Hutchings et Clifford Taubes (2009). « The Weinstein conjecture for stable Hamiltonian structures », *Geom. Topol.* **13** (2), p. 901-941.

Kei Irie (2021). « Equidistributed periodic orbits of C^∞-generic three-dimensional Reeb flows », *J. Symplectic Geom.* **19** (3), p. 531-566.

Anatole Katok (1980). « Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (51), p. 137-173.

Peter Kronheimer et Tomasz Mrowka (2007). *Monopoles and three-manifolds.* T. 10. New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, Cambridge, p. xii+796.

Krystyna Kuperberg (1994). « A smooth counterexample to the Seifert conjecture », *Ann. of Math. (2)* **140** (3), p. 723-732.

Patrice Le Calvez (2022). « Conservative surface homeomorphisms with finitely many periodic points », *J. Fixed Point Theory Appl.* **24** (2), Paper No. 20, 36.

Yuri Lima et Omri Sarig (2019). « Symbolic dynamics for three-dimensional flows with positive topological entropy », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **21** (1), p. 199-256.

Robert Lutz (1971). « Sur quelques propriétés des formes différentielles en dimension trois ». Thèse de doct. Université de Strasbourg.

Leonardo Macarini et Felix Schlenk (2011). « Positive topological entropy of Reeb flows on spherizations », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **151** (1), p. 103-128.

Jean Martinet (1971). « Formes de contact sur les variétés de dimension 3 ». In : *Proceedings of Liverpool Singularities Symposium, II (1969/1970).* T. Vol. 209. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin-New York, p. 142-163.

Maurício Peixoto (1967). « On an approximation theorem of Kupka and Smale », *J. Differential Equations* **3**, p. 214-227.

Paul Schweitzer (1974). « Counterexamples to the Seifert conjecture and opening closed leaves of foliations », *Ann. of Math. (2)* **100**, p. 386-400.

Richard Siefring (2008). « Relative asymptotic behavior of pseudoholomorphic half-cylinders », *Comm. Pure Appl. Math.* **61** (12), p. 1631-1684.

Clifford Taubes (2007). « The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture », *Geom. Topol.* **11**, p. 2117-2202.

William Thurston et Horst Winkelnkemper (1975). « On the existence of contact forms », *Proc. Amer. Math. Soc.* **52**, p. 345-347.

Claude Viterbo (1987). « A proof of Weinstein's conjecture in $\mathbf{R}^{2n}$ », *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **4** (4), p. 337-356.

Alan Weinstein (1979). « On the hypotheses of Rabinowitz' periodic orbit theorems », *J. Differential Equations* **33** (3), p. 353-358.

Horst Winkelnkemper (1973). « Manifolds as open books », *Bull. Amer. Math. Soc.* **79**, p. 45-51.

Anna Florio

Université Paris Dauphine-PSL
Place du Maréchal de Lattre de Tassigny
75016 PARIS
E-mail : `florio@ceremade.dauphine.fr`