

Séminaire N. Bourbaki

SAMEDI 29 MARS 2025

Exposé n° 1236

Claire DEBORD

Hypoellipticité de polynômes de champs de vecteurs et conjectures de Helffer et Nourrigat,

d'après I. Androulidakis, O. Mohsen et R. Yuncken

On étudie ici la géométrie sous-riemannienne sur une variété M induite par une famille finie F de champs de vecteurs satisfaisant la condition de Hörmander, ainsi que les opérateurs différentiels obtenus comme polynômes en les éléments de F . Un tel opérateur D est hypoelliptique si, pour toute fonction lisse f , les solutions u de l'équation $Du = f$ sont elles aussi lisses. Une notion plus fine, celle des opérateurs hypoelliptiques maximaux, étend cette propriété en termes de régularité Sobolev, offrant un parallèle, en géométrie sous-riemannienne, aux opérateurs elliptiques.

En 1979, Helffer et Nourrigat ont proposé une conjecture caractérisant l'hypoellipticité maximale, généralisant le théorème principal de régularité des opérateurs elliptiques. Cette conjecture a été récemment confirmée grâce à des outils de géométrie non commutative. Un élément central de ce travail est une généralisation naturelle en géométrie sous-riemannienne, introduite par Mohsen, du groupoïde tangent de Connes, dans lequel apparaissent tous les cônes tangents, ingrédients clés dans le travail de Helffer et Nourrigat. En collaboration avec Androulidakis et Yuncken, Mohsen a développé un calcul pseudodifférentiel dans ce contexte, introduisant notamment la notion de symbole principal. Ils obtiennent que l'inversibilité de ce symbole équivaut à l'hypoellipticité maximale, validant ainsi la conjecture.

Cet exposé présentera les ingrédients et les grandes lignes de ces avancées novatrices.

Hypoellipticity of vector field polynomials and conjectures of Helffer and Nourrigat,

after I. Androulidakis, O. Mohsen, and R. Yuncken

In 1979, Helffer and Nourrigat proposed a conjecture characterising maximal hypoellipticity, generalising the main regularity theorem for elliptic operators. This conjecture has recently been confirmed using tools from non-commutative geometry. A central element of this work is a natural generalisation in sub-Riemannian geometry, introduced by Mohsen, of the Connes tangent groupoid, in which appear all the tangent cones, key ingredients in the work of Helffer and Nourrigat. In collaboration with Androulidakis and Yuncken, Mohsen developed a pseudodifferential calculus in this context, introducing in particular the notion of principal symbol. They obtained that the invertibility of this symbol is equivalent to maximal hypoellipticity, thus validating the conjecture.

This talk will present the ingredients and broad outlines of these innovative advances.

Le texte de l'exposé sera disponible après le Séminaire.

The text of the talk will be made available after the Seminar.