Séminaire BOURBAKI Juin 2025
77^{e} année, 2024–2025, n° 1240

LA LOGIQUE CONTINUE DES CORPS GLOBALEMENT VALUÉS

par **Antoine Chambert-Loir**

À la mémoire de Zoé Chatzidakis

Introduction

La logique mathématique met en jeu des structures mathématiques c'est-à-dire des ensembles, des fonctions, ainsi que des prédicats à valeur vrai/faux, assujetis à satisfaire aux axiomes relatifs à ces structures. Un de ses objectifs est d'élucider la géométrie des *ensembles définissables* que ces fonctions et prédicats permettent de construire, un autre est d'étudier les *modèles* de ces axiomes, c'est-à-dire de structures mathématiques où ils sont vérifiés. Elle prête également une attention particulière à la nature des *formules* considérées, par exemple la présence ou la position des quantificateurs logiques. En retour, elle fournit des théorèmes généraux (comme le théorème de compacité) et des concepts structuraux (diverses notions de dimension, le concept d'imaginaire, la théorie de la stabilité...) qui permettent d'aborder des théories mathématiques de façon originale. Née des travaux de Tarski et Robinson sur la théorie des corps algébriquement clos et des corps réels clos, la théorie des modèles s'est ouverte de façon féconde à des théories moins élémentaires : algèbre différentielle, corps aux différences, corps valués...

Cet exposé est consacré au point de vue qu'offre la logique mathématique sur la notion de *hauteur* en géométrie arithmétique. Sous sa forme la plus élémentaire, où l'on s'intéresse aux solutions entières d'équations polynomiales, la hauteur correspond tout simplement à leur taille, et l'intérêt de la considérer apparaît dans la méthode de descente infinie explicitée par Fermat (1894) dans sa lettre d'août 1659 à Carcavi. Exploitée par Mordell (1922) et Weil (1928), puis Northcott (1950), c'est aujourd'hui un outil primordial de la géométrie diophantienne, et également un objet de nombreuses questions ouvertes. Cette notion admet aussi un analogue sur les corps de fonctions, au parfum plus géométrique, qu'en retour, la géométrie d'Arakelov se propose de diffuser à la théorie « naïve » des hauteurs en arithmétique.

Même sur les corps de fonctions, les fonctions hauteurs sont a priori à valeurs réelles. Deux options s'offrent à la logique mathématique pour axiomatiser ces fonctions : les considérer comme à valeurs dans un corps ordonné, éventuellement réel clos, ou insister pour qu'elles soient à valeurs réelles. Dans le premier cas, le théorème de compacité et la construction de modèles « non standard » en logique classique conduiront à des hauteurs à valeurs non standard dans des corps non archimédiens, qui font perdre de vue l'intuition initiale de la descente infinie. C'est donc la seconde option qu'on va suivre, grâce au point de vue offert par la *logique continue*. Une première théorie avait été proposée dans (Chang et Keisler, 1966), mais la variante récente de (Ben Yaacov, Berenstein, Henson et Usvyatsov, 2008 ; Ben Yaacov, 2008) semble plus adaptée. Il est impossible de résumer en deux phrases ces théories mais deux images peuvent être éclairantes. La première consiste à penser les nombres réels comme des valeurs de vérité, de sorte que ces fonctions à valeurs réelles apparaissent comme des prédicats. La seconde, plus technique, observe que la topologie des espaces de types de la logique mathématique classique sont compacts et totalement discontinus, et la logique continue donne lieu à des espaces localement compacts généraux.

Avant même toute logique continue, le premier chapitre de cet exposé consistera à expliquer la notion de *corps globalement valué* qui est l'*axiomatisation* des hauteurs proposée par Ben Yaacov et Hrushovski (2022) et développée dans l'article (Ben Yaacov, Destic, Hrushovski et Szachniewicz, 2024). Il s'agit bien ici d'élucider les propriétés générales de ces fonctions hauteurs qui justifieraient de les étudier sur un corps arbitraire. De fait, la notion de corps globalement valué peut être abordée de plusieurs façons, et tous ces regards se complètent. Partant d'une notion de *hauteur* (définition 1.1.1) sur un corps F, nous définirons ensuite un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel réticulé de *diviseurs* sur F et une forme linéaire positive sur cet espace vectoriel, puis une mesure sur espace de valeurs absolues généralisées donnant lieu à une formule du produit, d'où la terminologie de *corps globalement valué*.

Le résultat principal de ce chapitre est l'équivalence de ces points de vue. Comme on peut le deviner, la présentation en termes de mesures recoupe d'autres axiomatisations de la notion de hauteur, comme les « M-fields » de Gubler (1997) ou les « courbes adéliques » de Chen et Moriwaki (2020). Nous verrons aussi comment ces corps globalement valués donnent une épaisseur supplémentaire à l'analogie entre approximation diophantienne et théorie de Nevanlinna proposée par Vojta (1987).

Dans un second chapitre, nous expliquons comment l'on peut décrire les différentes structures de corps globalement valué dans le cas des corps F qui sont de type fini sur un sous-corps k. Lorsqu'on impose que la structure soit « triviale » sur ce sous-corps k, le groupe des diviseurs évoqués ci-dessus s'identifie au groupe des diviseurs birationnels de Shokurov (1996) sur un k-schéma propre, intègre, normal de corps des fractions F. La description des structures de corps globalement valué est un raffinement du théorème de Boucksom, Demailly, Păun et Peternell (2013) qui décrit le cône pseudo-effectif d'une variété complexe comme le dual du cône des courbes mobiles.

En particulier, les corps de fonctions d'une variable sur k possèdent essentiellement une seule structure de corps globalement valué qui soit triviale sur k.

De même, les corps de nombres possèdent essentiellement une seule structure de corps globalement valué, donnée par la théorie classique des hauteurs. Des développements récents en géométrie d'Arakelov permettent une description des structures de corps globalement valué sur un corps F qui est de type fini sur $\mathbf{Q}$ analogue à celle que nous avons évoquée dans le cas géométrique.

Dans un dernier chapitre, nous présentons la logique continue des corps globalement valués et expliquons les deux théorèmes qui ont suscité cet exposé. Le premier, dû à Ben Yaacov et Hrushovski (2022), affirme que si k est un corps, la clôture algébrique K de $k(\mathrm{T})$, munie de sa structure naturelle (triviale sur k) est un corps globalement valué *existentiellement clos*. Cela signifie en particulier que tout système d'équations constitué d'équations et d'inéquations polynomiales à coefficients dans K qui admet une solution dans un corps globalement valué L prolongeant K possède également une solution dans K dont les hauteurs seront arbitrairement proches de la première. Le second théorème, du à Szachniewicz (2023), est l'analogue pour le corps $\overline{\mathbf{Q}}$ des nombres algébriques.

C'est toute une théorie qu'ouvrent ces deux théorèmes avec, pour l'instant, plus de questions que de réponses, et nous en dirons quelques mots dans un paragraphe final.

Je remercie E. Hrushovski et S. Rideau d'avoir répondu avec tant de gentillesse à mes nombreuses questions, et les collaborateurs de N. Bourbaki de leur œil vigilant et néanmoins amical.

1. Quatre regards sur les corps globalement valués

Ben Yaacov, Destic, Hrushovski et Szachniewicz (2024) proposent sept regards sur la notion de corps globalement valué. Nous en présentons ici quatre : hauteurs, termes locaux, fonctionnelles divisorielles et mesures. Nous expliquerons ensuite au §1.6 comment elles conduisent à des notions équivalentes.

1.1. Hauteurs

Le premier de ces regards est une axiomatisation de la notion de hauteur en géométrie diophantienne.

Définition 1.1.1. — *Soit* F *un corps. Une* hauteur *sur* F *est une suite d'applications* $h_n\colon \mathrm{F}^n \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$*, pour* $n \in \mathbf{N}$*, qui vérifient les propriétés suivantes :*

(i) *Pour tout* n*, on a* $h_n(x) = -\infty$ *si et seulement si* $x = 0$ *;*

(ii) *Pour tout* $n \geq 1$*, on a* $h_n(1, \dots, 1) = 0$ *;*

(iii) *Pour toute permutation* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *et tout* $x \in \mathrm{F}^n$*, on a* $h_n(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = h_n(x)$ *;*

(iv) *Pour tout* $x \in \mathrm{F}^m$ *et tout* $y \in \mathrm{F}^n$*, on a* $h_m(x) \leq h_{m+n}(x, y)$ *;*

(v) *Pour tout* $x \in \mathrm{F}^m$ *et tout* $y \in \mathrm{F}^n$*, on a* $h_{mn}(x \otimes y) = h_m(x) + h_n(y)$*, où* $x \otimes y = (x_i y_j)$ *;*

(vi) *Il existe un nombre réel* e *tel que* $h_n(x+y) \leq h_{2n}(x, y) + e$ *pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *et tous* $x, y \in \mathrm{F}^n$*.*

On notera souvent h au lieu de h_n.

On dit qu'une hauteur sur F est *globale* si $h_n(c \cdot x) = h_n(x)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, tout $c \in \mathrm{F}^\times$ et tout $x \in \mathrm{F}^n$. Elle définit alors des fonctions fonctions de $\mathbf{P}_{n-1}(\mathrm{F})$ dans $\mathbf{R}$, également notées h, qui vérifient les propriétés algébriques classiques des *hauteurs* sur un corps global, à l'exception importante du théorème de finitude de Northcott. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{F}^n$, on a $h_n(x) = h([1 : x_1 : \dots : x_n])$.

Le nombre réel e dans la condition (vi) est nécessairement positif ou nul ; il reflète la possibilité de places archimédiennes.

Exemple 1.1.2. — La théorie classique des hauteurs en géométrie arithmétique munit le corps $\mathbf{Q}$ d'une fonction hauteur. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{Q}^n$, on pose $h_n(x_1, \dots, x_n) = -\infty$ si les x_i sont tous nuls ; sinon, on note d le générateur strictement positif du sous-groupe abélien $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ de $\mathbf{Q}$ et l'on pose

$$h_n(x_1, \dots, x_n) = \sup(\log|x_1|, \dots, \log|x_n|)/d.$$

La vérification des cinq premiers axiomes de la définition 1.1.1 est élémentaire, de même que le fait qu'il s'agit d'une hauteur globale. Pour le sixième, on peut prendre $e = \log(2)$: on se ramène à prouver l'inégalité (vi) lorsque x, y sont des éléments non nuls de $\mathbf{Z}^n$; alors,

$$\begin{aligned} h_n(x+y) &\leq \log \sup(|x_1 + y_1|, \dots, |x_n + y_n|) \\ &\leq \log \sup(2 \sup(|x_1|, |y_1|), \dots) \\ &\leq \log(2) + \log \sup(|x_1|, \dots, |x_n|, |y_1|, \dots, |y_n|). \end{aligned}$$

Soit k un corps. En exploitant le fait que $\mathbf{Z}$ et $k[\mathrm{T}]$ sont tous deux des anneaux principaux, et l'analogie entre valeur absolue des entiers et degré des polynômes, on définit de même une hauteur sur le corps $k(\mathrm{T})$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $(x_1, \dots, x_n) \in k(\mathrm{T})^n$, on pose en effet $h_n(x_1, \dots, x_n) = -\infty$ si les x_i sont tous nuls ; sinon, on choisit un générateur du sous-$k[\mathrm{T}]$-module $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ de $k(\mathrm{T})$ et l'on pose

$$h_n(x_1, \dots, x_n) = \sup(\deg(x_1/d), \dots, \deg(x_n/d)).$$

On obtient ainsi une hauteur globale sur $k(\mathrm{T})$; pour l'axiome (vi), on peut prendre $e = 0$.

Nous dirons que ce sont les structures de hauteurs *standard* sur $\mathbf{Q}$ et $k(\mathrm{T})$.

La théorie classique des hauteurs étend ces définitions aux corps de nombres et aux corps de fonctions d'une variable, mais il est nécessaire, pour leur définition, de recourir à la classification des valeurs absolues sur ces corps. Elles apparaissent alors comme un cas particulier de l'exemple suivant. Nous y reviendrons également dans l'exemple 1.7.2.

Exemple 1.1.3. — La notion de M-corps introduite par Gubler (1997) ou celle de *courbe adélique* dégagée par Chen et Moriwaki (2020) fournissent un cadre dans lequel interpréter de façon uniforme la théorie classique des hauteurs. Une courbe adélique est formée d'un espace mesuré (Ω, μ) et d'une application de Ω dans l'ensemble M_F des valeurs absolues sur un corps F, notée $\omega \mapsto |\cdot|_\omega$, telle que pour tout $x \in \mathrm{F}^\times$, l'application $\omega \mapsto \log|x|_\omega$ soit intégrable. La formule

$$h_n(x_1, \dots, x_n) = \int_\Omega \sup(\log|x_1|_\omega, \dots, \log|x_n|_\omega)\, d\mu(\omega) \tag{1.1.4}$$

définit alors une hauteur sur F ; cette hauteur est globale si et seulement si l'on a la *formule du produit*

$$\int_\Omega \log|x|_\omega \, d\mu(\omega) = 0 \tag{1.1.5}$$

pour tout $x \in \mathrm{F}^\times$.

Ces exemples justifient la terminologie de corps globalement valué et suggèrent un deuxième regard sur cette structure, en termes d'espaces mesurés.

1.2. Pseudo-valuations

Pour représenter la hauteur comme une intégrale sur un espace intrinsèque, l'axiomatisation proposée par Ben Yaacov, Destic, Hrushovski et Szachniewicz (2024) conduit à considérer des objets un peu plus généraux que des valeurs absolues : les pseudo-valuations.

Si Γ est un groupe ordonné dont la loi est notée additivement [(1)], on note $\overline{\Gamma}$ l'ensemble ordonné obtenu par adjonction d'un plus petit et d'un plus grand éléments, respectivement notés $-\infty$ et $+\infty$. On étend la loi de groupe de Γ en une loi partiellement définie sur $\overline{\Gamma}$ en posant $(+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty$ pour tout $a \neq -\infty$, et $(-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty$ pour tout $a \neq +\infty$.

Définition 1.2.1. — *Soit* A *un anneau. Une pseudo-valuation sur* A *est une application* $v \colon \mathrm{A} \to \overline{\Gamma}$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *On a* $v(0) = +\infty$ *et* $v(1) = 0$ *;*

(ii) *On a* $v(xy) = v(x) + v(y)$ *pour tous* $x, y \in \mathrm{A}$ *tels que* $\{v(x), v(y)\} \neq \{-\infty; +\infty\}$ *;*

(iii) *Il existe* $e \in \Gamma$ *tel que* $v(x+y) \geq \inf(v(x), v(y)) - e$ *pour tous* $x, y \in \mathrm{A}$.

Dans la condition (iii), on a nécessairement $e \geq 0$. Lorsqu'on peut prendre $e = 0$, la pseudo-valuation est dite *ultramétrique*. L'introduction de ce paramètre permet de tenir compte de façon uniforme de l'existence des valeurs absolues au sens de Weil (1951, §9) et également étudiées récemment sous le nom de *pseudo-valeur absolue* par Sédillot (2024), pour qui elles peuvent prendre la valeur $+\infty$; alors $\log|\cdot|^{-1}$ est une pseudo-valuation. En fait, si v n'est pas ultramétrique, alors il existe une pseudo-semi-valeur absolue $|\cdot|$ sur A telle que $v = \log|\cdot|^{-1}$. En particulier, on peut prendre $e = -\inf(0, v(2))$.

1. La théorie des valeurs absolues et celle des valuations conduisent à un double conflit concernant le sens de la relation d'ordre et le caractère additif du groupe de valeurs, conflit matérialisé par la relation « $v(x) = \log|x|^{-1}$ » entre les deux notions. Si le formalisme de Huber (2013) corrige ces deux conflits, il n'est pas non plus adapté à la géométrie diophantienne dans laquelle c'est la fonction $\log|x|^{-1}$ qui possède les propriétés de *positivité* appropriées et qu'il s'agit de *sommer* ou d'intégrer.

Lorsque v ne prend pas la valeur $-\infty$, on dira que c'est une *valuation*. Lorsque v est ultramétrique, on retrouve effectivement les valuations au sens classique, mais conduit également à appeler valuation toute fonction de la forme $\log|\cdot|^{-1}$, où $|\cdot|^{-1}$ est une valeur absolue (au sens classique).

Dans le cas général, l'ensemble A° des éléments $a \in \mathrm{A}$ tels que $v(a) \neq -\infty$ est un sous-anneau de A sur lequel v définit une valuation (au sens de ce texte) ; en quelque sorte, les pseudo-valuations sont aux valuations ce que les places (Bourbaki, 2006, chapitre VI, §2, n° 2) sont aux morphismes d'anneaux.

On dit qu'une pseudo-valuation est *triviale* si elle ne prend que les valeurs $-\infty$, 0 et $+\infty$.

Dans la suite de ce texte, on s'intéressera essentiellement aux pseudo-valuations *non triviales* à valeurs réelles sur un corps F.

On munit l'espace $\overline{\mathbf{R}}$ de sa topologie usuelle et l'espace $\overline{\mathbf{R}}^{\mathrm{F}}$ de la topologie de la convergence simple ; ils sont compacts. On note $\mathrm{Val}(\mathrm{F})$ et $\mathrm{PVal}(\mathrm{F})$ les sous-espaces de $\overline{\mathbf{R}}^{\mathrm{F}}$ formés des valuations et des pseudo-valuations, ainsi que $\mathrm{Val}(\mathrm{F})_*$ et $\mathrm{PVal}(\mathrm{F})_*$ les sous-espaces des valuations et pseudo-valuations non triviales. Pour des raisons topologiques dont l'intérêt apparaîtra plus tard, on introduit également la partie $\mathrm{QVal}(\mathrm{F})$ de $\overline{\mathbf{R}}^{\mathrm{F}}$ définie comme l'adhérence de $\mathrm{PVal}(\mathrm{F})_*$ privée de l'ensemble (fermé) des fonctions ne prenant que les valeurs $-\infty, 0, +\infty$; elle est localement compacte et $\mathrm{PVal}(\mathrm{F})_*$ en est un sous-espace dense.

1.3. Termes locaux

On appelle *polynôme tropical* tout terme dans le langage des $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels ordonnés. Autrement dit, un polynôme tropical est défini par récurrence à partir des constructions suivantes :

— Tout symbole de variable définit un polynôme tropical ;

— Si t et t' sont des polynômes tropicaux, alors $\sup(t, t')$ et $t + t'$ sont des polynômes tropicaux ;

— Si t est un polynôme tropical et c est un nombre rationnel, $c \cdot t$ est un polynôme tropical.

Si V est un ensemble de symboles de variables, on note $\mathscr{T}_{\mathrm{V}}$ l'ensemble des polynômes tropicaux dont les variables appartiennent à V. (Lorsque $\mathrm{V} = \{x_1, \dots, x_n\}$, on écrit plus simplement $\mathscr{T}_n$.) Pour tout $\mathbf{Q}$-espace vectoriel ordonné Γ et tout $a \in \Gamma^{\mathrm{V}}$, un polynôme tropical $t \in \mathscr{T}_{\mathrm{V}}$ définit une application d'évaluation de Γ^{V} dans Γ. On identifie deux polynômes tropicaux à la classe de leurs évaluations ; ils forment alors un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel.

Définition 1.3.1. — *Soit* F *un corps. Une structure de* termes locaux *sur* F *est la donnée, pour tout ensemble* V *de symboles de variables et tout terme* $t \in \mathscr{T}_{\mathrm{V}}$*, d'une application* $\mathrm{R}_t \colon (\mathrm{F}^\times)^{\mathrm{V}} \to \mathbf{R}$*, vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *Si deux polynômes tropicaux* $t, t' \in \mathscr{T}_{\mathrm{V}}$ *se déduisent l'un de l'autre par une permutation* σ *de* V*, il en est de même des applications* R_t *et* $\mathrm{R}_{t'}$ *;*

(ii) *Si un symbole de variable de* V *n'apparaît pas dans un terme* $t \in \mathscr{T}_{\mathrm{V}}$, *l'application* R_t *ne dépend pas de la coordonnée correspondante ;*

(iii) *L'application* $t \mapsto \mathrm{R}_t$ *est* $\mathbf{Q}$*-linéaire ;*

(iv) *Si* $t \in \mathscr{T}_{\mathrm{V}}$ *et si* $a \in (\mathrm{F}^\times)^{\mathrm{V}}$ *vérifie* $t(v(a_1), \dots, v(a_n)) \geq 0$ *pour tout* $v \in \mathrm{QVal}(\mathrm{F})$, *alors* $\mathrm{R}_t(a_1, \dots, a_n) \geq 0$.

Une structure de termes locaux sur un corps F est dite *globale* si le terme $t = x$ en une variable x vérifie la relation

$$\mathrm{R}_x = 0. \tag{1.3.2}$$

Nous avons vu qu'une structure de courbe adélique sur un corps F donne lieu à une hauteur ; elle fournit également des termes locaux : pour tout terme $t \in \mathscr{T}_{\mathrm{V}}$ et tout $a \in (\mathrm{F}^\times)^{\mathrm{V}}$, on pose

$$\mathrm{R}_t(a) = \int_\Omega t((\log|a|_\omega)_v)\, d\nu(\omega). \tag{1.3.3}$$

Lorsque F vérifie la formule du produit, cette structure de termes locaux est globale.

Plus généralement, la formule

$$h(a_1, \dots, a_n) = \mathrm{R}_t(a_1, \dots, a_n), \qquad t = \sup(x_1, \dots, x_n) \tag{1.3.4}$$

montre comment une structure de termes locaux fournit naturellement une structure de hauteur, qui est globale, si celle de termes locaux l'est.

Pour construire, inversement, une structure de courbe adélique associée à une structure de termes locaux (ou à une structure de hauteur), il faut, d'une part, identifier un espace mesuré sous-jacent naturel et, d'autre part, identifier la forme linéaire correspondant à l'intégrale. Nous étudions d'abord cette seconde question.

1.4. Fonctionnelles divisorielles

Soit F un corps.

Nous allons définir maintenant un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel ordonné $\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$, et même réticulé, c'est-à-dire que deux éléments quelconques possèdent une borne supérieure et une borne inférieure (Bourbaki, 2007a, chapitre VI, §1, nº 9), que nous appelerons le groupe des *diviseurs* sur F. L'origine de cette terminologie apparaîtra au chapitre suivant lorsque nous ferons le lien entre une variante relative de ce groupe et la notion de diviseurs birationnels introduite par Shokurov (1996). Ce groupe est en outre muni d'un morphisme de groupes $\mathrm{div}\colon \mathrm{F}^\times \to \mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ dont l'image engendre $\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ comme $\mathbf{Q}$-espace vectoriel réticulé. Cette dernière propriété sera (peut-être) familière aux lecteur · ices au fait de la théorie élémentaire des hauteurs, dans laquelle la construction des hauteurs naïves associées à un diviseur arbitraire ne fait effectivement intervenir que des combinaisons linéaires et des bornes supérieures.

La construction de $\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ est formelle, et débute par la considération du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel réticulé universel $\mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ associé au groupe $\mathrm{F}^\times$, lui-même construit à partir du monoïde réticulé universel (l'ensemble des parties finies de $\mathrm{F}^\times$, l'addition correspondant à la réunion et l'opération sup au produit des parties), puis adjonction de différences et tensorisation par $\mathbf{Q}$. Pour tout $a \in \mathrm{F}^\times$, soit $\mathrm{div}(a)$ l'élément de $\mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ image de la partie $\{a\}$ de $\mathrm{F}^\times$ du monoïde réticulé universel ; cela fournit un morphisme de groupes $\mathrm{div}\colon \mathrm{F}^\times \to \mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ dont l'image engendre $\mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$: à multiplication par un nombre rationnel près, tout élément γ de $\mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ peut être représenté sous la forme

$$\gamma = \inf(\mathrm{div}(a_1), \dots, \mathrm{div}(a_m)) - \inf(\mathrm{div}(b_1), \dots, \mathrm{div}(b_m)),$$

où $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m \in \mathrm{F}^\times$.

Si v est une valuation sur F dont le groupe de valeurs Γ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel totalement ordonné, il existe une unique application $\mathbf{Q}$-linéaire de $\mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ dans Γ, encore notée v, qui applique $\mathrm{div}(a)$ sur $v(a)$ pour tout $a \in \mathrm{F}^\times$. Lorsque v est seulement une pseudo-valuation à valeurs dans un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel totalement ordonné, on peut définir une application de $\mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ dans $\overline{\Gamma}$: l'élément γ ci-dessus est appliqué sur

$$v(\gamma) = \sup_i \inf_j v(a_i/b_j).$$

Pour $\gamma, \delta \in \mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$, on a alors $v(\sup(\gamma,\delta)) = \sup(v(\gamma), v(\delta))$, ainsi que $v(\gamma+\delta) = v(\gamma)+v(\delta)$ si le second terme est défini.

Pour tout $\gamma \in \mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$, l'application de $\mathrm{PVal}(\mathrm{F})$ dans $\overline{\mathbf{R}}$ donnée par $v \mapsto v(\gamma)$ est continue et se prolonge par continuité à $\mathrm{QVal}(\mathrm{F})$.

Définition 1.4.1. — *On définit le groupe* $\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ *des diviseurs de* F *comme le quotient de* $\mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ *par l'idéal des éléments* γ *de* $\mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ *tels que* $v(\gamma) = 0$ *pour tout* $v \in \mathrm{PVal}(\mathrm{F})_*$.

Pour $a \in \mathrm{F}^\times$, l'image de $\mathrm{div}(a)$ est encore notée $\mathrm{div}(a)$; ces diviseurs sont dits *principaux.*

Par construction, pour tout $v \in \mathrm{PVal}(\mathrm{F})_*$, l'application $\gamma \mapsto v(\gamma)$ de $\mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ dans Γ définit une application additive de $\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ dans Γ. Par passage à la limite, cela s'étend à tout $v \in \mathrm{QVal}(\mathrm{F})$. Pour tout $\gamma \in \mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$, l'application de $\mathrm{QVal}(\mathrm{F})$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $v \mapsto v(\gamma)$ est continue.

On dit qu'un diviseur γ est *effectif* si $v(\gamma) \geq 0$ pour tout $v \in \mathrm{PVal}(\mathrm{F})_*$; par continuité, cela vaut alors pour tout $v \in \mathrm{QVal}(\mathrm{F})$. Les diviseurs effectifs forment un cône $\mathrm{Div}^+_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ de $\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$.

Pour tout nombre réel $c > 0$, soit Γ_c l'ensemble des éléments de $\mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ de la forme

$$\inf_{1\leq i\leq m} \mathrm{div}(\sum_{j=1}^n c_{ij} b_j) - \inf_{1\leq j\leq n} \mathrm{div}(b_j),$$

pour $m, n \geq 1$, $b_1, \dots, b_n \in \mathrm{F}^\times$, et (c_{ij}) est une famille d'entiers relatifs tels que $|\sum_{j=1}^n c_{ij}| < 2^c$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Ben Yaacov, Destic, Hrushovski et Szachniewicz (2024, corollaire 5.17) démontrent la caractérisation suivante des éléments de $\mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ dont l'image dans $\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ est effective.

Proposition 1.4.2. — *Soit* $\alpha \in \mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout* $v \in \mathrm{PVal}(\mathrm{F})_*$, *on a* $v(\alpha) \geq 0$ *;*

(ii) *Pour tout* $v \in \mathrm{QVal}(\mathrm{F})$, *on a* $v(\alpha) \geq 0$ *;*

(iii) *Pour tout nombre réel* $c > 0$, *il existe un entier* $p \geq 1$ *tel que* $p\alpha \in \Gamma_{pc}$

Démonstration. — L'équivalence entre (i) et (ii) découle de la densité de PVal(F) dans QVal(F).

Démontrons l'implication (iii)⇒(i). Soit $c > 0$. Soit p un entier ≥ 1, soit $b_1, \dots, b_n$ des éléments de $\mathrm{F}^\times$, et soit (c_{ij}) des entiers relatifs vérifiant $|\sum_{j=1}^n c_{ij}| < 2^{pc}$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, tels que l'on ait

$$p\alpha = \inf_{1 \leq i \leq m} \mathrm{div}(\sum_{j=1}^n c_{ij} b_j) - \inf_{1 \leq j \leq n} \mathrm{div}(b_j) \ ;$$

pour tout i, posons $a_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} b_j$. Soit v une pseudo-valuation sur F. Pour tout i, on a $v(a_i) \geq \inf_j v(b_j) - pcv(2)$. par suite

$$v(p\alpha) = \inf_i \sup_j v(a_i/b_j) \geq -pcv(2).$$

Puisque $v(p\alpha) = p\alpha$, on en déduit $v(\alpha) \geq -cv(2)$, d'où $v(\alpha) \geq 0$ puisque c est arbitraire.

Vérifions l'implication (ii)⇒(iii). On se ramène au cas où il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathrm{F}^\times$ tel que $\alpha = -\inf(\mathrm{div}(a_1), \dots, \mathrm{div}(a_n))$. Munissons l'anneau $\mathbf{Z}[\mathrm{T}_1, \dots, \mathrm{T}_n]$ de la norme donnée par

$$\|f\| = \sum_k |f_k| 2^{-|k|c} \qquad (f = \sum f_k \mathrm{T}^k).$$

Démontrons d'abord qu'il existe $f \in \mathbf{Z}[\mathrm{T}]$ tel que $\|f\| < 1$ et $f(a) = 1$; raisonnons par l'absurde. Pour tout $x \in \mathrm{F}$, soit $\|x\|$ la borne inférieure des $\|f\|$, pour $f \in \mathbf{Z}[\mathrm{T}]$ tel que $f(a) = x$; en particulier, $\|x\| = +\infty$ si et seulement si x n'est pas de la forme $f(a)$, pour $f \in \mathbf{Z}[\mathrm{T}]$. Par hypothèse, on a $\|1\| = 1$; les inégalités $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ et $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$ découlent de la définition. Ainsi, $\|\cdot\|$ est une « pseudo-seminorme » sous-multiplicative sur F. Le lemme de Zorn entraîne l'existence d'une pseudo-seminorme sous-multiplicative *minimale* $|\cdot|$ sur F qui est majorée par F. On démontre qu'une telle pseudo-seminorme est en fait multiplicative, de sorte que $v = -\log\|\cdot\|$ est une pseudo-valuation sur F, éventuellement triviale. Puisque $\|\mathrm{T}_i\| = 2^{-c}$, on a $|a_i| \leq \|\mathrm{T}_i\| \leq 2^{-c} < 1$ pour tout i, c'est-à-dire $v(a_i) > c\log(2) > 0$. Ainsi, $v(\alpha) = -\inf(v(a_i)) \leq -c\log(2)$.

Compte tenu de l'hypothèse (ii), la pseudo-valuation v est triviale. Pour tout i, la minoration $v(a_i) > 0$ entraîne que $v(a_i) = +\infty$; en particulier a_i appartient à l'anneau de valuation R de v, mais n'y est pas inversible. Soit Δ le groupe ordonné $\mathrm{F}^\times/\mathrm{R}^\times$ (noté additivement) et soit $w \colon \mathrm{F} \to \overline{\Delta}$ l'application canonique ; c'est une pseudo-valuation. Posons $\gamma = \inf(w(a_1), \dots, w(a_n))$; on a $\gamma > 0$. Soit Δ_1 le plus petit sous-groupe convexe de Δ qui contient γ et soit Δ_0 le plus grand sous-groupe convexe de Δ_1 qui ne contient pas γ. On déduit de w une pseudo-valuation w' à valeurs dans Δ_1/Δ_0 : pour $x \in \mathrm{F}$, on a $w'(x) = +\infty$ si $w(x) > \Delta_1$, $w'(x) = -\infty$ si $w(x) < \Delta_1$, et $w'(x)$ est la classe de $w(x) \in \Delta_1$ sinon. Comme le groupe ordonné Δ_1/Δ_0 se plonge dans $\mathbf{R}$, on déduit de w' une pseudo-valuation à valeurs réelles sur F, qui n'est pas triviale et telle que

$w'(a_i) \geq \gamma > 0$ pour tout i. Par suite, $w'(\alpha) = -\inf(w'(a_i)) \leq -\gamma < 0$, ce qui contredit l'hypothèse (i).

Considérons donc un polynôme $f \in \mathbf{Z}[\mathrm{T}_1, \dots, \mathrm{T}_n]$ tel que $f(a_1, \dots, a_n) = 1$ et $\|f\| < 1$. Soit P l'ensemble des polynômes $g \in \mathbf{Z}[\mathrm{T}_1, \dots, \mathrm{T}_n]$ de degré $\leq \deg(f)$ tel que $\|g\| < 1$ et $g(a) \neq 0$. On a donc

$$\alpha = -\sup_{1 \leq i \leq n} \operatorname{div}(a_i) = \inf_{g \in \mathrm{P}} \operatorname{div}(g(a)) - \inf_{1 \leq i \leq n} \inf_{g \in \mathrm{P}} \operatorname{div}(a_i g(a)).$$

On déduit alors de cette relation que $\alpha \in \Gamma_d$, où $2^d = (n + 2^c + 2)\deg(f)$.

Cette inclusion n'est cependant pas suffisante pour établir (iii). On considère alors, pour tout entier $m \geq 1$ l'ensemble H_m des monômes de degré m de $\mathbf{Z}[\mathrm{T}_1, \dots, \mathrm{T}_n]$; on a $\mathrm{Card}(\mathrm{H}_m) = \binom{n+m-1}{n-1}$, et

$$m\alpha = -\inf_{h \in \mathrm{H}_m} \operatorname{div}(h(a)).$$

En écrivant $f^m(a) = 0$, on obtient un polynôme g de degré $m \deg(f)$ en des indéterminées U_h, pour $h \in \mathrm{H}_m$, telles que $g((h(a))_{h \in \mathrm{H}_m}) = 1$ et $\|g\| < 1$. L'argument précédent démontre que $m\alpha \in \Gamma_d$, où $2^d = (\mathrm{N} + 2^c + 2)m \deg(f)$. Lorsque m tend vers l'infini, d/m tend vers 0, ce qui conclut la preuve de l'implication (ii)⇒(iii). □

Définition 1.4.3. — *Une* fonctionnelle divisorielle *sur* F *est une application* $\mathbf{Q}$*-linéaire de* $\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ *dans* $\mathbf{R}$ *qui est positive sur le cône* $\mathrm{Div}^+_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$.

Une fonctionnelle divisorielle sur F est dite *globale* si elle s'annule sur les diviseurs principaux.

Proposition 1.4.4. — *Si* λ *est une fonctionnelle divisorielle sur* F*, la formule*

$$h_n(x_1, \dots, x_n) = -\lambda(\inf(\operatorname{div}(x_1), \dots, \operatorname{div}(x_n)))$$

définit une hauteur sur F*. Cette relation induit une bijection entre fonctionnelles divisorielles et hauteurs, par laquelle fonctionnelles globales et hauteurs globales se correspondent.*

Démonstration. — Le seul point non évident est le comportement de h_n par rapport à l'addition. On remarque tout d'abord que pour $x, y \in \mathrm{F}^\times$ tels que $x + y \neq 0$, le diviseur $\operatorname{div}(x+y) - \inf(\operatorname{div}(x), \operatorname{div}(y)) + \inf(\operatorname{div}(2), 0)$ est effectif : en effet, pour toute pseudo-valuation $v \in \mathrm{PVal}(\mathrm{F})_*$, et, par passage à la limite, pour toute $v \in \mathrm{QVal}(\mathrm{F})$, on a $v(x+y) \geq \inf(v(x), v(y)) - \inf(v(2), 0)$. Par suite, pour tous $x, y \in \mathrm{F}^n$, on a

$$\begin{aligned}&\inf(\operatorname{div}(x_1 + y_1), \dots, \operatorname{div}(x_n + y_n)) \\ &\qquad \geq \inf(\operatorname{div}(x_1), \dots, \operatorname{div}(x_n), \operatorname{div}(y_1), \dots, \operatorname{div}(y_n)) - \inf(v(2), 0).\end{aligned}$$

Puisque λ est une fonctionnelle divisorielle, on en déduit

$$\begin{aligned} h(x+y) &= -\lambda(\inf(\operatorname{div}(x+y))) \\ &\leq -\lambda(\inf(\operatorname{div}(x), \operatorname{div}(y))) + \lambda(\inf(\operatorname{div}(2), 0)) \\ &= h(x,y) + h(2,1). \end{aligned}$$

Inversement, soit h une hauteur sur F. Comme $\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ est engendré par les éléments de la forme $\inf(\operatorname{div}(x_1), \dots, \operatorname{div}(x_n))$, on voit que h ne peut être associée qu'à au plus une fonctionnelle divisorielle. Pour démontrer l'existence d'une telle fonctionnelle, on remarque qu'il existe un unique morphisme de groupes λ de $\mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ dans $\mathbf{R}$ tel que $\lambda(\inf(\operatorname{div}(x_1), \dots, \operatorname{div}(x_n))) = -h(x_1, \dots, x_n)$, et il suffit de prouver que λ est positive en tout $\gamma \in \mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ tel que $v(\gamma) \geq 0$ pour tout $v \in \mathrm{QVal}(\mathrm{F})$. On utilise pour cela la caractérisation de la proposition 1.4.2. □

1.5. Mesures

On a vu comment la notion de courbe adélique de Chen et Moriwaki (2020) permet de définir des stuctures de hauteurs, de termes locaux, ou des fonctionnelles divisorielles. Inversement, pour montrer que ces structures fournissent un objet analogue à une courbe adélique, il faut leur associer un espace « canonique » et, pour autant que l'on souhaite construire une mesure via le théorème de Riesz, assurer qu'il soit localement compact et munir l'espace de ses fonctions continues à support compact d'une forme linéaire positive.

Compte tenu de la définition d'une fonctionnelle divisorielle associée à une courbe adélique, l'espace $\mathrm{Val}(\mathrm{F})_*$ des valuations réelles non triviales sur F semble un candidat naturel mais il ne convient pas vraiment, pas plus que ses variantes $\mathrm{PVal}(\mathrm{F})_*$ ou $\mathrm{QVal}(\mathrm{F})$: il faudrait plutôt considérer leurs quotients par la relation d'équivalence induite par l'action de $\mathbf{R}_+^*$ qui identifie une valuation à ses multiples par un nombre réel strictement positif. Comme cette action n'est en général pas propre, l'espace quotient $\mathrm{PVal}(\mathrm{F})_*/\mathbf{R}_+^*$ n'est pas séparé (Ben Yaacov, Destic, Hrushovski et Szachniewicz, 2024, remarque 2.12).

D'autre part, si les éléments de $\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ donnent lieu à des fonctions continues sur $\mathrm{QVal}(\mathrm{F})$, ces fonctions sont *homogènes* de degré 1 sous l'action de $\mathbf{R}_+^*$.

Pour une représentation « mesurée » des structures de hauteur ou de fonctionnelles divisorielles, on est donc amené à introduire des conditions explicites de normalisation sur l'espace $\mathrm{QVal}(\mathrm{F})$.

Pour tout élément positif de $\alpha \in \mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$, identifié à son image dans $\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}^+(\mathrm{F})$, on note Ω_α^1 le sous-espace de $\mathrm{QVal}(\mathrm{F})$ formé des v tels que $v(\alpha) = 1$; par exemple, si $\alpha = \inf(\operatorname{div}(a_1), \dots, \operatorname{div}(a_n))$, cette condition s'écrit $\inf(v(a_1), \dots, v(a_n)) = 1$. C'est un espace *compact* : c'est la trace, sur le sous-espace fermé de l'espace compact $\overline{\mathbf{R}}^{\mathrm{F}}$ défini par la condition $v(\alpha) = 1$, de l'adhérence de $\mathrm{PVal}(\mathrm{F})_*$ dans $\overline{\mathbf{R}}^{\mathrm{F}}$. L'application de passage au quotient de $\mathrm{QVal}(\mathrm{F})$ sur $\mathrm{QVal}(\mathrm{F})/\mathbf{R}_+^*$ induit un homéomorphisme de Ω_α^1 sur une partie compacte (séparée !) Ω_α de $\mathrm{QVal}(\mathrm{F})/\mathbf{R}_+^*$. Lorsque α parcourt $\mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$, ces parties compactes recouvrent $\mathrm{QVal}(\mathrm{F})/\mathbf{R}_+^*$.

Soit $\mathscr{D}_\alpha$ l'ensemble des $\gamma \in \mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ pour lesquels il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $-n \cdot \alpha \leq \gamma \leq n \cdot \alpha$. C'est un sous-espace vectoriel réticulé de $\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$. Pour tout $\gamma \in \mathscr{D}_\alpha$, la fonction $j(\gamma)$ sur Ω^1_α donnée par $j(\gamma)(v) = v(\gamma)$ est continue et à valeurs réelles. Ces fonctions $j(\gamma)$ séparent les points de Ω^1_α et contiennent les fonctions constantes (prendre $\gamma = \alpha\,!$). La version réticulée du théorème de Stone (Bourbaki, 2007b, chapitre X, §4, n° 2, p. 35, corollaire), entraîne que l'image de j est dense dans l'espace des fonctions continues sur Ω^1_α (pour la topologie de la convergence compacte). Il existe donc une unique mesure μ^1_α sur Ω^1_α pour laquelle

$$\lambda(\gamma) = \int_{\Omega^1_\alpha} v(\gamma)\, d\mu^1_\alpha(v)$$

pour tout $\gamma \in \mathscr{D}_\alpha$, et une unique mesure μ_α sur Ω_α déduite de μ^1_α par l'homéomorphisme de Ω^1_α sur Ω_α.

Les mesures μ_α vérifient les relations de compatibilité suivantes. Pour $\alpha, \beta \in \mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})^+$, la condition $v(\beta) = +\infty$ définit un ensemble μ_α-négligeable dans Ω_α. Soit alors f^β_α l'application sur $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$ qui, pour tout $v \in \mathrm{QVal}(\mathrm{F})$ tel que $0 < v(\alpha), v(\beta) < +\infty$, applique la classe de v sur le quotient $v(\alpha)/v(\beta)$, et qui applique toute autre classe en 0. Avec ces notations, les restrictions à $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$ des mesures μ_α et μ_β vérifient la relation $\mu_\alpha = f^\beta_\alpha \cdot \mu_\beta$.

Définition 1.5.1. — *Une* structure locale de mesures *sur* F *est la donnée, pour tout $a \in \mathrm{F}^\times$, d'une mesure μ_a sur $\Omega_{\sup(0,\mathrm{div}(a))}$, de telle façon que les conditions suivantes soient satisfaites, pour tous $a, b \in \mathrm{F}^\times$:*

(i) *L'ensemble des $v \in \Omega_a$ tels que $v(b) = +\infty$ est μ_a-négligeable ;*

(ii) *Sur $\Omega_a \cap \Omega_b$, on a $\mu_a = f^b_a \cdot \mu_b$, où f^b_a est la fonction sur $\Omega_a \cap \Omega_b$ (continue en dehors d'un ensemble μ_a et μ_b-négligeable) qui applique la classe de v sur $v(a)/v(b)$.*

Une structure locale de mesures (μ_a) sur F est dite *globale* si l'on a

$$\mu_{a^{-1}}(\Omega_{a^{-1}}) = \mu_a(\Omega_a) \tag{1.5.2}$$

pour tout $a \in \mathrm{F}^\times$.

Proposition 1.5.3. — *Soit λ une fonctionnelle divisorielle sur* F*. Pour tout $a \in \mathrm{F}^\times$, notons μ_a la mesure associée à l'élément positif* $\sup(0, \mathrm{div}(a))$ *de* $\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$*. La famille $(\mu_a)_{a\in\mathrm{F}^\times}$ est une structure locale de mesures sur* F *; elle est globale si et seulement si λ l'est.*

1.6. Équivalences

Le théorème principal de cette première partie est que tous ces regards sur la notion de corps globalement valué sont équivalents.

Théorème 1.6.1. — *Soit* F *un corps. Les constructions précédentes fournissent des bijections entre structures de hauteur, structures de termes locaux, fonctionnelles divisorielles et structures locales de mesures sur* F*, qui induisent des bijections entre leurs versions globales.*

Démonstration. — On a défini des applications :

— Des structures de termes locaux vers les structures de hauteur (formule (1.3.4)) ;
— Des fonctionnelles divisorielles vers les structures de hauteur, et inversement (proposition 1.4.4) ;
— Des fonctionnelles divisorielles vers les structures locales de mesures (§1.5).

La construction d'une structure de termes locaux associée à une structure locale de mesures passe par la construction de mesures μ sur QVal(F) associées à une structure locale (μ_a) de mesures sur F. Ces mesures μ ont la propriété que pour tout $a \in \mathrm{F}^\times$, la restriction de μ à l'ouvert des $v \in \mathrm{QVal}(\mathrm{F})$ tels que $0 < v(a) < +\infty$ est de la forme $(s_a)_*\mu_a$, où $s_a \colon \Omega_a \to \mathrm{QVal}(\mathrm{F})$ est une section borélienne de l'application de passage au quotient. Pour tout polynôme tropical $t \in \mathscr{T}_\mathrm{V}$ et tout $a \in (\mathrm{F}^\times)^\mathrm{V}$, on démontre que la formule (comparer avec la relation (1.3.3))

$$\mathrm{R}_t(a) = \int_{\mathrm{QVal}(\mathrm{F})} t(v(a))\, d\mu(v),$$

définit une structure de termes locaux sur F. De plus, on démontre que cette structure ne dépend pas de la mesure μ choisie, mais seulement de la famille (μ_a). □

1.7. Corps globalement valués

Un *corps multiplement valué* est un corps muni de l'une des structures précédentes. On dit que c'est un *corps globalement valué* si cette structure est globale. Il est dit *purement non archimédien* si l'on peut prendre $e = 0$ dans sa structure de hauteur.

Exemple 1.7.1 (Restriction et extension). — Soit $\mathrm{F} \to \mathrm{K}$ une extension de corps.

Une structure de corps globalement valué sur K induit une telle structure sur F : il suffit de restreindre la structure de hauteur, ou la structure de termes locaux.

Inversement, supposons F munie d'une structure de corps globalement valué. Si l'extension K de F est quasi-galoisienne (Bourbaki, 2007a, chapitre V, §9, nº 3 ; certains auteurs disent « normale »), il existe une unique structure de corps globalement valué sur K qui induise celle de F et soit invariante par $\mathrm{Aut}_\mathrm{F}(\mathrm{K})$.

Il s'ensuit qu'une de corps globalement valué sur F s'étend de façon canonique à toute extension algébrique ; on parlera d'extension *symétrique*. Dans le cas du corps $\overline{\mathbf{Q}}$ des nombres algébriques et d'une clôture algébrique du corps $k(\mathrm{T})$, on qualifiera de *standard* la structure de corps globalement valué qui prolonge celle de $\mathbf{Q}$ ou de $k(\mathrm{T})$.

Exemple 1.7.2 (Corps globaux). — Artin et Whaples (1945, théorème 3) ont caractérisé les *corps globaux* F de la théorie du corps de classes. Ils partent de corps munis d'un ensemble $\mathrm{M_F}$ de valeurs absolues non triviales sur F, deux à deux non équivalentes, donnant lieu à une formule du produit

$$\prod_{v\in\mathrm{M_F}} |a|_v = 1$$

(où, pour tout $a \in \mathrm{F}^\times$, presque tous les facteurs sont égaux à 1), et démontrent que les corps globaux sont alors caractérisés par l'existence d'une valeur absolue $v \in \mathrm{M_F}$ qui, ou bien soit archimédienne, ou bien soit discrète à corps résiduel fini.

Ils fournissent en particulier des exemples de corps globalement valués.

Dans le premier cas, F est un corps de nombres ; on peut décrire l'espace des fonctionnelles divisorielles globales et en déduire que *toute structure de corps globalement valué sur* F *est multiple de la structure standard.*

Dans le second cas, F est le corps des fonctions d'une courbe propre, régulière, géométriquement intègre C sur un corps fini k. De même, on peut décrire l'espace des fonctionnelles divisorielles globales qui sont triviales sur k et en déduire que *toute structure de corps globalement valué sur* F *qui est triviale sur* k *est multiple de la structure standard.*

Cette propriété s'étend à leurs extensions algébriques.

Exemple 1.7.3. — Soit k un corps algébriquement clos et soit F le corps des fonctions d'un k-schéma propre X, supposé irréductible et normal. Soit $\mathrm{C} \to \mathrm{S}$ une famille plate de courbes (propres, irréductibles) sur X paramétrée par un schéma non vide connexe S ; on suppose que cette famille n'est contenue dans aucun sous-schéma strict de X. Soit Ω l'ensemble des hypersurfaces intègres de X. On le munit de la mesure discrète μ_C pour laquelle la masse $\mu_\mathrm{C}(\mathrm{H})$ d'un point $\mathrm{H} \in \Omega$ est le degré d'intersection commun $\mathrm{C}_s \cdot \mathrm{H}$, pour $s \in \mathrm{S}$ tel que $\mathrm{C}_s \not\subset \mathrm{H}$. Comme X est normale, toute hypersurface $\mathrm{H} \in \Omega$ est le centre d'une unique valuation discrète, normalisée ; notons-la v_H. On a ainsi muni F d'une structure de courbe adélique. Pour toute fonction $f \in k(\mathrm{X})^\times$, il existe $s \in \mathrm{S}$ tel que la courbe C_s ne soit contenue dans aucune composante de $\operatorname{div}(f)$; alors,

$$\sum_{\mathrm{H}\in\Omega} v_\mathrm{H}(f)\mu_\mathrm{C}(\mathrm{H}) = \mathrm{C}_s \cdot \operatorname{div}(f) = 0.$$

On obtient ainsi une structure de corps globalement valué sur F ; sa restriction à k est la structure triviale.

Les exemples précédents peuvent être décrits via la notion de courbe adélique, mais les prochains sont construits par ultraproduits.

Exemple 1.7.4. — Soit $(\mathrm{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de corps globalement valués ; on suppose qu'il existe un même nombre réel e pour lequel leurs fonctions hauteurs (que nous noterons indistinctement h) satisfont l'inégalité (vi) de la définition 1.1.1. Soit $\mathfrak{u}$ un ultrafiltre (non principal) sur I. Considérons la partie B de $\prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{F}_i$ formée des familles (a_i) telles que la famille $(h_2(1, a_i))$ soit éventuellement bornée suivant l'ultrafiltre $\mathfrak{u}$. C'est un sous-anneau. Munissons-le de la relation d'équivalence définie par $(a_i) \sim (b_i)$ si et seulement si l'ensemble des $i \in \mathrm{I}$ tels que $a_i = b_i$ appartient à $\mathfrak{u}$. Cette relation est compatible avec la structure d'anneau de B, de sorte que l'ensemble quotient $\mathrm{F}_{\mathfrak{u}}$ hérite d'une structure d'anneau ; c'est en fait un corps.

Pour toute suite finie $(a_1, \dots, a_n)$ d'éléments de B, la famille de nombres réels $(h_n(a_{1,i}, \dots, a_{n,i}))_i$ est bornée, donc possède une limite suivant l'ultrafiltre $\mathfrak{u}$. Cette limite ne dépend que des images $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans $\mathrm{F}_{\mathfrak{u}}$ de $a_1, \dots, a_n$; notons-la $h_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. On obtient ainsi une structure de hauteur sur $\mathrm{F}_{\mathfrak{u}}$.

On peut appliquer cette construction à une suite de structures de corps globalement valués sur $\overline{\mathbf{Q}}$ dont les erreurs archimédiennes tendent vers 0. Cela fournit un corps globalement valué, algébriquement clos de caractéristique zéro, induisant la structure triviale sur $\overline{\mathbf{Q}}$, et donc non archimédien.

On peut également l'appliquer à une suite de structures de corps globalement valuées sur des clôtures algébriques K_p de $\mathbf{F}_p(\mathrm{T})$, où I est l'ensemble des nombres premiers. On en déduit un corps globalement valué, algébriquement clos, de caractéristique zéro, induisant également la structure triviale sur $\overline{\mathbf{Q}}$.

Exemple 1.7.5. — Soit $\mathscr{M}$ le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$. Pour $f \in \mathscr{M}^\times$ et $a \in \mathbf{C}$, notons $v_a(f)$ l'ordre d'annulation de f en a. Soit $f \in \mathscr{M}^\times$; supposons $f(0) \neq 0$. Pour tout nombre réel $r > 0$, la formule de Jensen s'écrit

$$\log|f(0)|^{-1} = \sum_{0<|a|<r} v_a(f) \log \frac{r}{|a|} + \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|^{-1} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

La première partie du membre de droite de cette formule se déduit de valuations sur $\mathscr{M}$; le second terme est de nature différente, si ce n'est que pour tout $z \in \mathbf{C}$, l'application $f \mapsto \log|f(z)|^{-1}$ est une pseudo-valuation sur $\mathscr{M}$.

Pour $a \in \mathbf{C}$, notons δ_a la mesure de Dirac en a ; pour $r \in \mathbf{R}_+^*$, notons γ_r la mesure de Haar normalisée sur le cercle de centre 0 et de rayon r ; soit alors μ_r la mesure positive sur $\mathbf{C}$ donnée par

$$\mu_r = \sum_{0<|a|<r} \log \frac{r}{|a|} \delta_a + \gamma_r.$$

Soit $\eta\colon \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$ une fonction tendant vers 0 et soit $\mathfrak{u}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbf{R}_+^*$. Pour $f \in \mathscr{M}$ et $r > 0$, posons

$$\mathrm{ht}_r(f) = \mu_r(\sup(0, \log|f|^{-1})).$$

En fait, $\mathrm{ht}_r(f)$ n'est autre que la fonction caractéristique $\mathrm{T}_f(r)$ attachée à f par la théorie de Nevanlinna, voir (Vojta, 1987).

Soit alors $\mathscr{M}_{\eta,\mathfrak{u}}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{M}$ telles que la famille $(\eta(r)\,\mathrm{ht}_r(f))_r$ soit bornée selon $\mathfrak{u}$; notons alors $\mathrm{ht}(f)$ la limite de cette famille selon $\mathfrak{u}$. Alors, $\mathscr{M}_{\eta,\mathfrak{u}}$ est un sous-corps de $\mathscr{M}$. Pour toute suite finie $(f_1, \dots, f_n)$ dans $\mathscr{M}_{\eta,\mathfrak{u}}$, la famille de nombres réels

$$(\eta(r)\mu_r(\sup(\log|f_1|^{-1}, \dots, \log|f_n|^{-1}))$$

est bornée selon $\mathfrak{u}$; notons $h_n(f_1, \dots, f_n)$ sa limite. Cela définit une structure de corps globalement valué sur le sous-corps $\mathscr{M}_{\eta,\mathfrak{u}}$. qui est triviale sur le sous-corps des fonctions constantes.

2. Théorie de l'intersection

Dans ce chapitre, on s'intéresse plus particulièrement aux structures de corps globalement valués sur un corps F qui vérifient l'une des deux hypothèses suivantes :

— Le corps F est de type fini sur un sous-corps k, et sa structure de corps globalement valué induit la structure triviale sur k (cas géométrique) ;

— Le corps F est de type fini sur $\mathbf{Q}$ et sa structure de corps globalement valué induit la structure standard sur $\mathbf{Q}$ (cas arithmétique).

Nous allons voir comment la théorie de l'intersection (géométrique ou arithmétique) permet de décrire essentiellement toutes ces structures de corps globalement valué.

2.1. Densité des valuations

Commençons par introduire une variante « relative » des corps globalement valués où l'on impose la structure triviale sur un sous-corps.

Soit F un corps et k un sous-corps de F. On note $\mathrm{Val}(\mathrm{F}/k)$ et $\mathrm{PVal}(\mathrm{F}/k)$ les sous-espaces de $\mathrm{Val}(\mathrm{F})$ et $\mathrm{PVal}(\mathrm{F})$ formés des valuations et pseudo-valuations sur F dont la restriction à k est triviale. On note encore $\mathrm{Val}(\mathrm{F}/k)_*$ et $\mathrm{PVal}(\mathrm{F}/k)_*$ les sous-espaces constitués des valuations et pseudo-valuations non triviales, ainsi que $\mathrm{QVal}(\mathrm{F}/k)$ l'adhérence de $\mathrm{PVal}(\mathrm{F}/k)_*$ dans $\mathrm{QVal}(\mathrm{F})$.

On note alors plutôt $\mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F}/k)$ le groupe réticulé $\mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$, et l'on définit $\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F}/k)$ comme son quotient par l'idéal des $\gamma \in \mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F}/k)$ tels que $v(\gamma) = 0$ pour tout $v \in \mathrm{QVal}(\mathrm{F}/k)$. Ce groupe est muni d'une relation d'ordre analogue à celle de $\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ et on note $\mathrm{Div}^+_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F}/k)$ le cône effectif correspondant, image des $\gamma \in \mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F}/k)$ tels que $v(\gamma) \geq 0$ pour tout $v \in \mathrm{QVal}(\mathrm{F}/k)$.

Proposition 2.1.1. — *Soit k un corps et soit* F *une extension de type fini de k. L'espace* $\mathrm{Val}(\mathrm{F}/k)$ *des valuations (à valeurs réelles) sur* F *qui sont triviales sur k est dense dans l'espace* $\mathrm{PVal}(\mathrm{F}/k)$ *des pseudo-valuations sur* F *qui sont triviales sur k.*

Démonstration. — Munissons k de la valeur absolue triviale.

Si X est un k-schéma de type fini, l'espace k-analytique X^{an} au sens de Berkovich (1990) a pour ensemble sous-jacent l'ensemble des couples (x, p), où $x \in \mathrm{X}$ et p est une valeur absolue sur le corps résiduel $k(x)$ qui induit la valeur absolue triviale sur k. Soit $\pi\colon \mathrm{X}^{\mathrm{an}} \to \mathrm{X}$ l'application donnée par $\pi(x, p) = x$. Cet ensemble est muni de la topologie la moins fine telle que pour tout ouvert U de X et toute fonction $f \in \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U})$, l'ensemble $\pi^{-1}(\mathrm{U})$ soit ouvert dans X^{an} et l'application $(x, p) \mapsto p(f(x))$ de $\pi^{-1}(\mathrm{U})$ dans $\mathbf{R}$ soit continue.

L'application π est continue et surjective.

Si X est séparé, l'espace X^{an} est localement compact ; si X est propre, il est compact.

Supposons X intègre et soit η_{X} son point générique. La partie $\pi^{-1}(\eta_{\mathrm{X}})$ de X^{an} s'identifie à l'espace $\mathrm{Val}(\mathrm{F}/k)$ des valeurs absolues sur $k(\mathrm{X})$ qui sont triviales sur k ; cette partie est dense dans X^{an} (Berkovich, 1990, §3.5).

Plus généralement, toute pseudo-valuation à valeurs réelles sur F qui est triviale sur k est une valuation sur un anneau de valuation de F contenant k. On définit ainsi une application continue $\mathrm{PVal}(\mathrm{F}/k) \to \mathrm{X}^{\mathrm{an}}$.

Cette construction est fonctorielle. Soit $u\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de k-schémas, soit $x \in \mathrm{X}$; le morphisme u induit un morphisme de corps $u^*\colon k(u(x)) \to k(x)$ de sorte qu'une valeur absolue p sur $k(x)$ qui est triviale sur k induit, via u^*, une valeur absolue similaire u^*p sur $k(u(x))$. L'application $u^{\mathrm{an}}\colon \mathrm{X}^{\mathrm{an}} \to \mathrm{Y}^{\mathrm{an}}$ qui applique (x, p) sur $(u(x), u^*p)$ est continue. Si u est surjective, il en est de même de u^{an}.

Restreignons-nous maintenant au cas où les k-schémas considérés sont des *modèles* de F, c'est-à-dire des k-schémas propres et intègres munis d'un isomorphisme $\mathrm{F} \simeq k(\mathrm{X})$, et les morphismes $u\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ sont compatibles à ces isomorphismes (en particulier birationnels).

On en déduit une application continue

$$\mathrm{PVal}(\mathrm{F}/k) \to \varprojlim_{\mathrm{F}\simeq k(\mathrm{X})} \mathrm{X}^{\mathrm{an}}.$$

On prouve que cette application est un *homéomorphisme* : l'argument est similaire à l'identification, classique dans le contexte des espaces de Riemann de Zariski, de la limite projective du système des schémas birationnels à un schéma intègre donné comme un espace de valuations. La densité de $\mathrm{Val}(\mathrm{F}/k)$ dans chaque X^{an} entraîne la densité requise. $\square$

Corollaire 2.1.2. — *Soit k un corps et soit* F *une extension de type fini de k. Pour qu'un élément $\gamma \in \mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F}/k)$ soit positif, il faut et il suffit que $v(\gamma) \geq 0$ pour toute valuation réelle v sur* F.

Proposition 2.1.3. — *Soit* F *un corps dénombrable. L'espace* $\mathrm{Val}(\mathrm{F})$ *des valuations (à valeurs réelles) sur* F *est dense dans l'espace* $\mathrm{PVal}(\mathrm{F})$.

Démonstration. — La démonstration est analogue mais utilise la possibilité, au sein de la théorie de Berkovich (1990), d'associer un espace analytique X^{an} à un $\mathbf{Z}$-schéma de type fini X, ainsi que des résultats de Lemanissier et Poineau (2024) sur ces espaces analytiques. $\square$

Corollaire 2.1.4. — *Soit* F *un corps dénombrable. Pour qu'un élément $\gamma \in \mathrm{U}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ soit positif, il faut et il suffit que $v(\gamma) \geq 0$ pour toute valuation réelle v sur* F.

2.2. Diviseurs birationnels et fonctionnelles divisorielles

Soit k un corps et soit X un k-schéma propre et intègre. Pour simplifier la discussion, on suppose que X est normal, de sorte qu'un diviseur de Cartier sur X n'est autre qu'un diviseur sur X qui est localement représenté comme le diviseur d'une fonction rationnelle (non nulle). Les diviseurs birationnels (ou b-diviseurs) introduits par Shokurov (1996) sont les diviseurs de Cartier sur un modèle birationnel propre normal arbitraire X′

de X, modulo l'identification de D et $\pi^*(D)$ si $\pi\colon X'' \to X'$ est un X-morphisme propre birationnel et D est un diviseur de Cartier sur X'. Plus synthétiquement, on a

$$\mathrm{bDiv}(X) = \varinjlim_{X'} \mathrm{Div}(X').$$

On peut même se restreindre au système cofinal des modèles projectifs.

Le groupe abélien bDiv(X) est muni d'une relation d'ordre pour laquelle les élements positifs sont ceux qui sont représentés par un diviseur de Cartier effectif sur un modèle adéquat. Ce groupe abélien ordonné est réticulé : lorsque deux diviseurs birationnels sont représentés sur un même modèle par des diviseurs de Cartier dont les composantes irréductibles sont deux à deux disjointes ou égales, leur borne inférieure est définie en prenant, pour chacune d'entre elle, la borne inférieure des coefficients ; on se ramène à ce cas par éclatement. L'exemple le plus simple éclaire cette définition : considérons dans $\mathrm{bDiv}(\mathbf{P}_2)$, les deux diviseurs de Cartier D_1 et D_2 correspondant aux deux axes de coordonnées $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ dans $\mathbf{P}_2$; alors $\inf(D_1, D_2)$ est défini par le diviseur exceptionnel sur l'éclatement de leur point d'intersection.

Dans la suite, on utilisera plutôt le **Q**-espace vectoriel réticulé $\mathrm{bDiv}(X)_{\mathbf{Q}}$ des **Q**-diviseurs birationnels sur X.

Proposition 2.2.1. — *Soit k un corps et soit X un k-schéma propre, intègre et normal. Il existe un unique morphisme d'espaces vectoriels réticulés*

$$\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(k(X)/k) \to \mathrm{bDiv}(X)_{\mathbf{Q}}$$

qui, pour $f \in k(X)^\times$, applique $\mathrm{div}(f)$ sur le diviseur birationnel sur X correspondant au diviseur de Cartier principal $\mathrm{div}(f)$ sur X. C'est un isomorphisme.

Démonstration. — Soit $\theta\colon U_{\mathbf{Q}}(k(X)/k) \to \mathrm{bDiv}(X)_{\mathbf{Q}}$ l'unique morphisme d'espaces vectoriels réticulés qui, pour tout $f \in k(X)^\times$, applique $\mathrm{div}(f)$ sur le diviseur birationnel sur X correspondant au diviseur de Cartier principal $\mathrm{div}(f)$ sur X. Pour tout élément de $\mathrm{bDiv}(X)_{\mathbf{Q}}$ représenté par un diviseur de Cartier D sur un modèle X' de X, le diviseur D est localement sur X' de la forme $\mathrm{div}(f)$; en combinant ces représentations, on obtient que le morphisme θ est surjectif. La description des diviseurs de Cartier birationnels en termes de valuations (divisorielles) entraîne que le noyau de θ est égal au noyau de l'homomorphisme canonique de $U_{\mathbf{Q}}(k(X)/k)$ sur $\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(k(X)/k)$. □

Compte tenu de cette proposition, les fonctionnelles divisorielles sur $k(X)$ correspondent aux familles $(\lambda_{X'})$ où, pour tout modèle X' de X, $\lambda_{X'}$ est une forme linéaire sur le groupe Div(X') des diviseurs de Cartier sur X', positive sur le cône effectif, ces formes linéaires étant astreintes à la relation de compatibilité $\lambda_{X''}(\pi^*D) = \lambda_{X'}(D)$ si $\pi\colon X'' \to X'$ est un X-morphisme et D un diviseur de Cartier sur X'. On peut se limiter, si l'on veut, aux modèles projectifs X' qui dominent un modèle donné de X.

La théorie de l'intersection fournit alors des exemples géométriques de fonctionnelles divisorielles. Considérons en effet un modèle projectif X' de X et soit A un diviseur ample sur X'. Pour tout X-morphisme projectif et birationnel $\pi\colon X'' \to X'$, définissons une forme linéaire $\lambda_{X''}$ sur $\mathrm{Div}(X'')_{\mathbf{Q}}$ par

$$\lambda_{X''}(D) = \pi^* A^{d-1} \cdot D,$$

où on a posé $d = \dim(X) = \deg.\mathrm{tr}_k(k(X))$. Ces formes linéaires définissent une fonctionnelle divisorielle sur $k(X)$. De telles fonctionnelles divisorielles seront dites *géométriques.*

Lemme 2.2.2. — *Soit λ une fonctionnelle divisorielle* globale *sur $k(X)$. Pour tout modèle projectif X', la forme linéaire $\lambda_{X'}$ sur $\mathrm{Div}(X')$ s'annule sur le groupe des diviseurs numériquement triviaux.*

Démonstration. — Soit D un diviseur de Cartier numériquement trivial sur X'. Soit A un diviseur ample sur X'. D'après le critère de Kleiman, pour tout entier relatif n, il existe un entier $q \geq 1$ tel que le diviseur $q(A + nD)$ soit linéairement équivalent à un diviseur effectif ; soit $f \in k(X)^\times$ tel que $q(A + nD) - \mathrm{div}(f)$ soit effectif. Comme λ est globale, on a $\lambda(\mathrm{div}(f)) = 0$, de sorte que $\lambda_{X'}(A + nD) \geq 0$. Ainsi, $n\lambda_{X'}(D) \geq -\lambda_{X'}(A)$. Ceci vaut pour tout $n \in \mathbf{Z}$; en faisant tendre n vers $\pm\infty$, on obtient $\lambda_{X'}(D) = 0$, ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque 2.2.3. — Revenons sur l'exemple 1.7.2 en supposant que X est une courbe projective intègre et régulière. Dans ce cas, $\mathrm{bDiv}(X)_{\mathbf{Q}}$ est le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de base l'ensemble des points fermés de X. Soit λ une fonctionnelle divisorielle globale sur F qui est triviale sur k. D'après le lemme précédent, il existe un unique nombre réel c tel que $\lambda(D) = c\deg(D)$ pour tout $D \in \mathrm{bDiv}(X)_{\mathbf{Q}}$. Par définition, une fonctionnelle divisorielle est positive en tout diviseur effectif ; on a donc $c \geq 0$.

Théorème 2.2.4 (Ben Yaacov et Hrushovski, 2022). — *Soit k un corps et soit X un k-schéma projectif, intègre et normal. L'ensemble des fonctionnelles divisorielles géométriques sur $k(X)$ est dense dans l'espace des fonctionnelles divisorielles sur $k(X)$ qui sont triviales sur k, muni de la topologie faible.*

Compte tenu de la définition de cette topologie, et quitte à remplacer X par un modèle projectif convenable, il s'agit de démontrer qu'une forme linéaire sur l'espace des $\mathbf{Q}$-diviseurs de Cartier sur X qui est positive sur le cône effectif et nulle sur le sous-espace des diviseurs de Cartier numériquement équivalents à zéro peut être approchée par des formes linéaires du type $D \mapsto (A^{d-1} \cdot D)$, où A est la classe d'un $\mathbf{Q}$-diviseur ample. Ben Yaacov et Hrushovski (2022) déduisent ce résultat d'un énoncé plus précis.

Soit donc X une variété projective, intègre, sur un corps k ; soit d sa dimension. Soit $Z_1(X)$ le groupe des classes d'équivalence linéaire de cycles de dimension 1 sur X et soit $\mathrm{Div}(X)$ le groupe des classes d'équivalence linéaire de diviseurs de Cartier sur X. Le degré d'un diviseur de Cartier sur une courbe propre munit le produit les espaces vectoriels $\mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ et $Z_1(X)_{\mathbf{R}}$ d'une forme bilinéaire.

Notons $\mathrm{N}^1(\mathrm{X})$ et $\mathrm{N}_1(\mathrm{X})$ les quotients de ces espaces par les noyaux de cette forme (équivalence numérique) ; ils sont de dimension finie et la forme bilinéaire induite par le degré identifie chacun au dual de l'autre.

Le *volume* d'un diviseur de Cartier D sur X est la limite supérieure

$$\mathrm{vol}(\mathrm{D}) = \varlimsup_{n\to+\infty} (d!/n^d) \dim_k \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathscr{O}(n\mathrm{D})).$$

C'est en fait une limite. Sur un corps algébriquement clos, ce résultat a d'abord été démontré en caractéristique zéro par Fujita (1994), il a ensuite été étendu au cas général par Takagi (2007) via les altérations de de Jong (1996), et par Lazarsfeld et Mustaţă (2009) par la méthode des « corps d'Okounkov » ; sur un corps arbitraire, la preuve est due à Cutkosky (2014).

La fonction volume s'étend en une fonction continue, d-homogène, sur $\mathrm{N}^1(\mathrm{X})$, encore notée vol ; la preuve donnée par Lazarsfeld (2004, corollaire 2.2.45) vaut sur un corps arbitraire.

L'espace $\mathrm{N}^1(\mathrm{X})$ contient deux cônes convexes fondamentaux :

— Le cône effectif, engendré par les classes de diviseurs effectifs. Son adhérence est appelée le cône *pseudo-effectif*. Son intérieur est le cône *gros* : une classe α est grosse si et seulement si $\mathrm{vol}(\alpha) > 0$;

— Le cône ample, engendré par les classes de diviseurs amples ; il est ouvert et son adhérence est le cône *numériquement effectif*. Sur ce cône, le volume se calcule par le théorème d'Hilbert–Samuel : $\mathrm{vol}(\alpha) = (\alpha^d)$; c'est en particulier une application polynomiale.

Dans l'espace $\mathrm{N}_1(\mathrm{X})$, on définit le cône pseudo-effectif comme l'adhérence du cône convexe engendré par les classes de courbes irréductibles.

Ces cônes sont saillants. On munit alors $\mathrm{N}_1(\mathrm{X})$ (resp. $\mathrm{N}^1(\mathrm{X})$) de la structure d'espace vectoriel ordonné pour laquelle les éléments positifs sont les éléments du cône pseudo-effectif.

Pour tout morphisme projectif et birationnel $\pi\colon \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$, et toute classe grosse $\alpha \in \mathrm{N}^1(\mathrm{X})$, la classe $\pi^*\alpha$ est encore grosse, donc admet une décomposition $\pi^*\alpha = \beta + \gamma$, où β est ample et γ est pseudo-effective ; on a donc $\beta \leq \pi^*\alpha$. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1} \in \mathrm{N}^1(\mathrm{X})$ sont des classes grosses, on démontre que lorsque $\pi\colon \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ parcourt la classe des morphismes projectifs et birationnels, et $\beta_1, \dots, \beta_{d-1} \in \mathrm{N}^1(\mathrm{X}')$ sont des classes amples telles que $\beta_p \leq \pi^*\alpha_p$ pour tout p, alors les classes de cycle

$$\pi_*(\beta_1 \dots \beta_{d-1}) \in \mathrm{N}_1(\mathrm{X})$$

possèdent une borne supérieure ; on la note $\langle \alpha_1 \dots \alpha_{d-1} \rangle$: c'est l'*intersection positive* des classes $\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}$.

Proposition 2.2.5. — *Pour tout $\alpha \in \mathrm{N}^1(\mathrm{X})$ dans le cône gros, la fonction* vol *est différentiable en α et l'on a*

$$\mathrm{D}\,\mathrm{vol}(\alpha) = d\langle \alpha^{d-1} \rangle.$$

De plus, on a

$$\mathrm{vol}(\alpha) = \langle \alpha^{d-1} \rangle \cdot \alpha.$$

Cette proposition est démontrée par Boucksom, Favre et Jonsson (2008) lorsque le corps k est algébriquement clos de caractéristique zéro ; Cutkosky (2015) et Ben Yaacov et Hrushovski (2022) ont étendu la preuve à tout corps k.

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du théorème 2.2.4. Les arguments donnés par Ben Yaacov et Hrushovski (2022) anticipent ceux de Dang et Favre (2022, théorème C) en caractéristique zéro.

Soit λ une forme linéaire sur $\mathrm{N}^1(\mathrm{X})$ qui est positive sur le cône pseudo-effectif. Quitte à lui ajouter une multiple d'une forme linéaire du type $\gamma \mapsto \alpha^{d-1}\gamma$, où α est ample et petit, on peut supposer que λ est strictement positive sur tout élément non nul du cône pseudo-effectif. La fonction $\alpha \mapsto \mathrm{vol}(\alpha)/\lambda(\alpha)^n$ sur le cône gros est continue, homogène, et s'annule au bord de ce cône ; elle atteint donc son maximum en une classe α. En écrivant que la différentielle du volume s'annule en α, on obtient l'égalité

$$\lambda = \frac{\lambda(\alpha)}{\mathrm{vol}(\alpha)} \langle \alpha^{d-1} \rangle.$$

Par définition de l'intersection positive, la forme linéaire $\langle \alpha^{d-1} \rangle$ est limite de formes linéaires de la forme $\pi_* \beta^{d-1}$, où $\pi \colon \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ est un morphisme projectif et birationnel et β est une classe ample sur X', d'où le théorème.

Remarque 2.2.6. — On peut choisir pour β des classes de $\mathbf{Q}$-diviseurs amples. D'après le théorème de Bertini, $\pi_*(\beta^{d-1})$ est alors représenté par un cycle de la forme $w[\mathrm{C}]$, où C est une courbe irréductible sur X et w est un nombre rationnel strictement positif. De telles classes de courbes sont *mobiles* : pour toute sous-variété stricte Y de X, on peut choisir une telle courbe C qui ne soit contenue dans aucune composante de Y. On retrouve ainsi le théorème de Boucksom, Demailly, Păun et Peternell (2013) que le dual du cône pseudo-effectif de $\mathrm{N}^1(\mathrm{X})_{\mathbf{R}}$ est le cône convexe fermé de $\mathrm{N}_1(\mathrm{X})_{\mathbf{R}}$ engendré par les classes de courbes mobiles.

En passant à la limite, cela fournit également un homéomorphisme de l'espace des fonctionnelles divisorielles sur $k(\mathrm{X})$ sur la limite projective des cônes des courbes mobiles dans $\mathrm{N}_1(\mathrm{X}')_{\mathbf{R}}$, où X' parcourt la classe des modèles projectifs de X (Ben Yaacov et Hrushovski, 2022, théorème 11.6).

2.3. Géométrie d'Arakelov

Soit F un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$. On souhaite étudier les structures de corps globalement valués sur F qui induisent la structure standard sur $\mathbf{Q}$. Les résultats du paragraphe précédent supposent que la structure globalement valuée est triviale sur un sous-corps fixé et sont donc sans effet. Dans ce paragraphe, nous décrivons les théorèmes de Szachniewicz (2023) compagnons des précédents.

Le corps F est le corps des fonctions d'un $\mathbf{Z}$-schéma projectif et plat $\mathscr{X}$, intègre. L'analogie classique entre corps de nombres et corps de fonctions amène à considérer ce schéma comme « fibré » au-dessus de la courbe arithmétique $\operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$, mais le caractère affine de cette dernière est un obstacle au développement d'une théorie de l'intersection sur $\mathscr{X}$. La géométrie d'Arakelov résout cette question en adjoignant aux objets usuels de la théorie de l'intersection (diviseurs, fibrés en droites, cycles...) des structures analytiques (fonctions de Green, métriques, courants de Green...) sur l'espace analytique complexe $\mathscr{X}(\mathbf{C})$.

Initiée dans le cas des surfaces arithmétiques par Arakelov (1974), la théorie de l'intersection arithmétique a été construite en dimension arbitraire par Gillet et Soulé (1990) ; citons aussi Zhang (1995) pour l'étude de l'amplitude dans ce cadre, et Yuan (2008) et Chen (2011) pour celle du volume.

Soit donc $\mathscr{X}$ un $\mathbf{Z}$-schéma projectif et plat, intègre, surjectif sur $\operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$. Pour simplifier la discussion, on le suppose normal. Soit $\kappa(\mathscr{X})$ le corps des fonctions de $\mathscr{X}$ et soit d son degré de transcendance sur $\mathbf{Q}$; on a donc $\dim(\mathscr{X}) = d+1$.

Définition 2.3.1. — *Si* D *est un diviseur de Cartier sur* $\mathscr{X}$*, une* fonction de Green *pour* D *est une fonction* $g_{\mathrm{D}} \colon \mathscr{X}(\mathbf{C}) - |\mathrm{D}| \to \mathbf{R}$ *telle que pour tout ouvert* U *de* $\mathscr{X}$ *et toute fonction méromorphe inversible* $f \in \kappa(\mathscr{X})^\times$ *définissant* D *sur* U*, la fonction* $g_{\mathrm{D}} + \log|f|$ *est la restriction d'une fonction sur* $\mathrm{U}(\mathbf{C})$ *qui est continue et invariante par conjugaison complexe.*

Alors, le fibré en droites $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}(\mathrm{D})$ possède une unique métrique continue pour laquelle la section méromorphe canonique a norme $e^{-g_{\mathrm{D}}}$ hors de $|\mathrm{D}|$.

Une fonction de Green pour le diviseur nul est une fonction continue sur $\mathscr{X}(\mathbf{C})$ et invariante par la conjugaison complexe ; en général, l'ensemble des fonctions de Green pour D est un espace affine sous cet espace vectoriel.

Si $(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})$ et $(\mathrm{E}, g_{\mathrm{E}})$ sont des diviseurs de Cartier sur $\mathscr{X}$ munis de fonctions de Green, la fonction $g_{\mathrm{D}} + g_{\mathrm{E}}$ sur $\mathscr{X}(\mathbf{C}) - (|\mathrm{D}| \cup |\mathrm{E}|)$ se prolonge de manière unique en une fonction de Green pour $\mathrm{D}+\mathrm{E}$. Cela revient aussi au produit tensoriel des fibrés en droites munis de métriques continues.

Définition 2.3.2. — *Le groupe* $\widehat{\operatorname{Div}}(\mathscr{X})$ *est le* $\mathbf{Z}$*-module libre de base l'ensemble des couples* $(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})$*, où* D *est un diviseur de Cartier irréductible sur* $\mathscr{X}$ *et* g_{D} *une fonction de Green pour* D*. Ses éléments sont appelés* diviseurs arithmétiques.

On définit de même le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\widehat{\operatorname{Div}}_{\mathbf{Q}}(\mathscr{X})$ et le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\widehat{\operatorname{Div}}_{\mathbf{R}}(\mathscr{X})$; leurs élément sont respectivement appelés $\mathbf{Q}$-diviseurs arithmétiques et $\mathbf{R}$-diviseurs arithmétiques. L'espace $\widehat{\operatorname{Div}}_{\mathbf{Q}}(\mathscr{X})$ s'identifie à $\widehat{\operatorname{Div}}(\mathscr{X}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$, mais on prendra garde[2] que $\widehat{\operatorname{Div}}_{\mathbf{R}}(\mathscr{X})$ n'est pas égal à $\widehat{\operatorname{Div}}(\mathscr{X}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$.

Pour tout $f \in \kappa(\mathscr{X})^\times$, on définit un diviseur arithmétique en posant

$$\widehat{\operatorname{div}}(f) = (\operatorname{div}(f), \log|f|^{-1}).$$

On en déduit une application linéaire de $\kappa(\mathscr{X})^\times_{\mathbf{R}}$ dans $\widehat{\operatorname{Div}}_{\mathbf{R}}(\mathscr{X})$, encore notée $\widehat{\operatorname{div}}$.

2. Voir la note 12, p. 276, de Bost (1999).

On munit l'espace des $\mathbf{R}$-diviseurs arithmétiques de la topologie localement convexe la moins fine qui coïncide avec la topologie localement convexe canonique sur ses sous-espaces vectoriels de dimension finie, et qui induit la topologie de la convergence compacte sur le sous-espace $\mathscr{C}(\mathscr{X}(\mathbf{C})/\sim;\mathbf{R})$.

On dit qu'un élément $(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})$ de $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbf{R}}(\mathscr{X})$ est *effectif* si $\mathrm{D} \geq 0$ et $g_{\mathrm{D}} \geq 0$. Les diviseurs arithmétiques effectifs forment un cône convexe fermé dans $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbf{R}}(\mathscr{X})$.

Volume arithmétique. — Pour tout $(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}}) \in \widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbf{R}}(\mathscr{X})$, on pose

$$\widehat{\mathrm{H}}^0(\mathscr{X}, (\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})) = \{f \in \kappa(\mathscr{X})\,;\, (\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}}) + \widehat{\mathrm{div}}(f) \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Lorsque $(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}}) \in \widehat{\mathrm{Div}}(\mathscr{X})$, cet ensemble correspond à celui des sections globales du fibré en droites $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}(\mathrm{D})$ de norme au plus 1 en tout point, pour la métrique continue correspondant à g_{D}, c'est-à-dire la boule unité d'un espace vectoriel normé de dimension finie ; il est en particulier fini.

On en déduit que cette propriété de finitude vaut en général, et l'on pose

$$\widehat{h}^0(\mathscr{X}, (\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})) = \log(\mathrm{Card}(\widehat{\mathrm{H}}^0(\mathscr{X}, (\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})))).$$

On définit alors le *volume arithmétique* de $(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})$ par l'expression

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}}) = \varlimsup_{n} \frac{(d+1)!}{n^{d+1}} \widehat{h}^0(\mathscr{X}, n(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})). \tag{2.3.3}$$

Cette expression est finie et ne dépend que de la classe de $(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})$ modulo les diviseurs de la forme $\widehat{\mathrm{div}}(f)$. Lorsque $(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}}) \in \widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbf{Q}}(\mathscr{X})$, Chen (2010) a démontré que cette limite supérieure est une limite. En outre, la fonction $\widehat{\mathrm{vol}}$ est continue sur $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbf{R}}(\mathscr{X})$ (Moriwaki, 2009, théorème 4.4) et homogène de degré $(d+1)$.

Si $(\mathrm{E}, g_{\mathrm{E}})$ est effectif, on a l'inégalité $\widehat{\mathrm{vol}}(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}}) \leq \widehat{\mathrm{vol}}(\mathrm{D}+\mathrm{E}, g_{\mathrm{D}}+g_{\mathrm{E}})$ pour tout diviseur arithmétique $(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})$.

On dit que le diviseur arithmétique $(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})$ est gros si l'on a $\widehat{\mathrm{vol}}(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}}) > 0$; on dit qu'il est pseudo-effectif si $(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}}) + \widehat{\mathrm{B}}$ est gros pour tout diviseur arithmétique $\widehat{\mathrm{B}}$ qui est gros.

Dans certains cas, ces volumes arithmétiques s'epxriment en termes de la théorie de l'accouplement d'intersection arithmétique. Une difficulté est que cette théorie n'est pas définie sur tout $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbf{R}}(\mathscr{X})$.

Théorie de l'intersection arithmétique. — Un diviseur arithmétique $(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})$ est dit *lisse* si pour tout ouvert U de $\mathscr{X}$ et toute fonction méromorphe inversible f définissant D sur U, la fonction $g_{\mathrm{D}}+\log|f|$ est la restriction d'une fonction lisse sur $\mathrm{U}(\mathbf{C})$. Cela entraîne que g_{D} est lisse sur $\mathscr{X}(\mathbf{C}) - |\mathrm{D}|$ et que la $(1,1)$-forme $dd^c g_{\mathrm{D}}$ sur cet ouvert se prolonge en une forme lisse sur $\mathscr{X}(\mathbf{C})$, que nous noterons $\omega_{(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})}$. Pour toute $f \in \kappa(\mathscr{X})^{\times}$, le diviseur arithmétique $\widehat{\mathrm{div}}(f)$ est lisse, et la forme $\omega_{\widehat{\mathrm{div}}(f)}$ est nulle. En général, si $(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})$ est un diviseur arithmétique lisse, la formule de Poincaré–Lelong

$$dd^c g_{\mathrm{D}} + \delta_{\mathrm{D}} = [\omega_{(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})}]$$

exprime que g_{D} est un *courant de Green* pour le cycle D au sens de Gillet et Soulé (1990).

La théorie de l'intersection arithmétique définie par Gillet et Soulé (1990) permet de munir l'espace $\widehat{\mathrm{Div}}(\mathscr{X})$ des diviseurs arithmétiques lisses sur $\mathscr{X}$ d'une application $(d+1)$-linéaire symétrique à valeurs réelles, nulle sur les diviseurs du type $\widehat{\mathrm{div}}(f)$. En fait, Gillet et Soulé (1990) construisent une théorie générale d'intersection de « cycles arithmétiques », mais supposent la régularité de $\mathscr{X}$; quitte à considérer des coefficients rationnels, l'utilisation d'altérations (de Jong, 1996) permet d'éviter cette hypothèse.

Dans le cas des diviseurs, Faltings (1992) avait montré comment la formule de récurrence sous-jacente à la construction de Gillet et Soulé (1990) permet également d'éviter cette hypothèse. Soit $(\mathrm{D}_0, g_0), \dots, (\mathrm{D}_d, g_d)$ des $\mathbf{R}$-diviseurs arithmétiques ; pour tout p, notons $\omega_p = \omega_{(\mathrm{D}_p, g_p)}$. Lorsque D_0 est contenu dans la fibre de $\mathscr{X}$ au-dessus de l'idéal maximal $\langle p \rangle$ de $\mathbf{Z}$, l'intersection arithmétique des (D_i, g_i) est donnée par

$$(\mathrm{D}_0, g_0) \cdots (\mathrm{D}_d, g_d) = \deg(\mathrm{D}_1|_{\mathrm{D}_0} \cdot \mathrm{D}_d|_{\mathrm{D}_0}) \log(p) + \int_{\mathscr{X}(\mathbf{C})} g_0 \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_d,$$

formule dans laquelle les restrictions $\mathrm{D}_p|_{\mathrm{D}_0}$ des $\mathbf{R}$-diviseurs de Cartier D_p à D_0 est définie à équivalence linéaire près. En particulier, on a

$$(0, g_0)(\mathrm{D}_1, g_1) \cdots (\mathrm{D}_d, g_d) = \int_{\mathscr{X}(\mathbf{C})} g_0 \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_d.$$

Lorsque D_0 est irréductible, surjectif sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, et n'est contenu dans aucune composante de $\mathrm{D}_1, \dots, \mathrm{D}_d$, on a

$$(\mathrm{D}_0, g_0) \cdots (\mathrm{D}_d, g_d) = ((\mathrm{D}_1, g_1)|_{\mathrm{D}_0}) \cdots (\mathrm{D}_d, g_{\mathrm{D}})|_{\mathrm{D}_0} + \int_{\mathscr{X}(\mathbf{C})} g_0 \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_d.$$

Dans le cas général, il faut modifier (D_0, g_0) en lui ajoutant un diviseur arithmétique de la forme $\widehat{\mathrm{div}}(f)$ pour se ramener à cette situation.

Cette formule montre également que l'on peut définir cette intersection arithmétique lorsque au plus un des $\mathbf{R}$-diviseurs arithmétiques considérés (mis en première position) n'est pas lisse.

On dit qu'un diviseur arithmétique lisse $(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}}) \in \widehat{\mathrm{Div}}(\mathscr{X})$ est *nef* si le $\mathbf{R}$-diviseur de Cartier D est relativement nef et si la forme $\omega_{(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})}$ est positive. Dans ce cas, Moriwaki (2009, Corollaire 5.5) a démontré l'égalité suivante (« Hilbert-Samuel arithmétique ») :

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}}) = (\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})^{d+1}. \tag{2.3.4}$$

2.3.1. *Différentiabilité du volume arithmétique.* — Le théorème suivant est l'analogue arithmétique des propriétés du volume en géométrie algébrique. Il est dû à Chen (2011) dans le cas des $\mathbf{Q}$-diviseurs, et à Ikoma (2015) en général. Leurs démonstrations sont inspirées par le théorème géométrique. Il s'agit en particulier de définir un analogue de l'intersection positive pour les diviseurs arithmétiques.

Si $(\mathrm{D}_0, g_0), \dots, (\mathrm{D}_d, g_d)$ sont des $\mathbf{R}$-diviseurs arithmétiques tels que (D_k, g_k) est lisse et nef pour $k \geq p+1$, leur *intersection positive*

$$\langle (\mathrm{D}_1, g_1) \cdots (\mathrm{D}_p, g_p) \rangle \cdot (\mathrm{D}_{p+1}, g_{p+1}) \cdots (\mathrm{D}_d, g_d)$$

est définie comme la borne supérieure des intersections

$$(\mathrm{D}'_1, g'_1)\cdots(\mathrm{D}'_p, g'_p)\pi^*(\mathrm{D}_{p+1}, g_{p+1})\cdots\pi^*(\mathrm{D}_d, g_d)$$

où π parcourt la classe des morphismes projectifs et birationnels $\pi\colon \mathscr{X}' \to \mathscr{X}$ et où, pour $k \in \{0,\dots,p\}$, (D'_k, g'_k) est un $\mathbf{Q}$-diviseur arithmétique sur $\mathscr{X}'$ tel que $(\mathrm{D}'_k, g'_k) \leq \pi^*(\mathrm{D}_k, g_k)$. Cette expression est multi-additive en (D_k, g_k) pour $k \geq p+1$ et s'étend de manière unique en une forme multilinéaire sur l'espace vectoriel des diviseurs arithmétiques lisses. Lorsque $k = d$, elle s'étend de manière unique en une forme linéaire continue sur $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbf{R}}(\mathscr{X})$.

Théorème 2.3.5. — *Soit* $(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}}) \in \widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbf{R}}(\mathscr{X})$ *un* $\mathbf{R}$*-diviseur arithmétique gros et soit* $(\mathrm{E}, g_{\mathrm{E}}) \in \widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbf{R}}(\mathscr{X})$ *un* $\mathbf{R}$*-diviseur arithmétique. La fonction* $t \mapsto \widehat{\mathrm{vol}}((\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}}) + t(\mathrm{E}, g_{\mathrm{E}}))$ *est dérivable en* $t = 0$*, de dérivée*

$$(d+1)\langle(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})^d\rangle \cdot (\mathrm{E}, g_{\mathrm{E}}).$$

On a de plus :

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}}) = \langle(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})^{d+1}\rangle = \langle(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})^d\rangle \cdot (\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}}).$$

2.4. Géométrie d'Arakelov birationnelle

Soit F un corps de type fini sur $\mathbf{Q}$; notons $d = \deg.\mathrm{tr}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$. Soit $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F})$ la limite inductive des espaces vectoriels totalement ordonnés $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbf{Q}}(\mathscr{X})$, lorsque $\mathscr{X}$ parcourt la classe ordonnée, filtrante à gauche, des *modèles* de F, c'est-à-dire des $\mathbf{Z}$-schémas projectifs et plats $\mathscr{X}$, intègres et normaux, munis d'un isomorphisme $\mathrm{F} \simeq \kappa(\mathscr{X})$. Il est réticulé : la démonstration est analogue au cas géométrique, il faut en outre observer que la borne inférieure de deux fonctions de Green fournit une fonction de Green pour la borne inférieure des diviseurs de Cartier correspondants.

Pour tout $f \in \mathrm{F}\times$, les diviseurs arithmétiques $\widehat{\mathrm{div}}(f)$ sur les différents modèles $\mathscr{X}$ fournissent un élément de $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbf{Q}}(\mathscr{X})$ que nous notons encore $\widehat{\mathrm{div}}(f)$.

Proposition 2.4.1. — *Il existe un unique morphisme d'espaces vectoriels réticulés*

$$\mathrm{Div}_{\mathbf{Q}}(\mathrm{F}) \to \widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbf{Q}}(\mathscr{X})$$

qui applique $\mathrm{div}(f)$ *sur* $\widehat{\mathrm{div}}(f)$ *pour tout* $f \in \mathrm{F}^\times$*. Ce morphisme induit une bijection entre fonctionnelles divisorielles* λ *sur* F *qui induisent la structure canonique sur* $\mathbf{Q}$ *et formes linéaires* $\lambda\colon \widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbf{R}}(\mathscr{X}) \to \mathbf{R}$ *qui sont positives en tout diviseur arithmétique effectif, nulles en tout diviseur arithmétique principal et vérifient* $\lambda((0,1)) = 1$*.*

Remarque 2.4.2. — Revenons à l'exemple 1.7.2 en supposant $\mathrm{F} = \mathbf{Q}$. La description précédente conduit à poser $\mathscr{X} = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. Dans ce cas, l'intersection arithmétique correspond au « degré arithmétique » $\widehat{\deg}\colon \widehat{\mathrm{Div}}(\mathscr{X}) \to \mathbf{R}$ donné par $\widehat{\deg}(\langle p\rangle, g) = \log(p) + g$ pour tout nombre premier p et tout nombre réel g. Si $(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})$ est un $\mathbf{R}$-diviseur arithmétique effectif, son degré arithmétique est positif ou nul ; de plus, $\widehat{\deg}(\widehat{\mathrm{div}}(f)) = 0$ pour tout $f \in \mathbf{Q}$. Cette application induit alors un isomorphisme de $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbf{R}}(\mathscr{Z})/\langle\widehat{\mathrm{div}}(\mathbf{Q}^\times)\rangle$

sur $\mathbf{R}$, qui correspond à la structure de hauteur standard sur $\mathbf{Q}$. Toute fonctionnelle divisorielle sur $\mathbf{Q}$ en est un multiple positif.

On dit qu'un diviseur arithmétique lisse $(\mathrm{A}, g_{\mathrm{A}})$ sur $\mathscr{X}$ est *ample*[3] si A est ample, si la forme $\omega_{(\mathrm{A},g_{\mathrm{A}})}$ est strictement positive en tout point, et si pour tout entier n assez grand, le fibré en droites $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}(n\mathrm{A})$, muni de sa métrique associée à ng_{A}, est engendré par ses sections globales de norme < 1 en tout point.

On dit qu'un $\mathbf{R}$-diviseur arithmétique est *nef* (resp. *ample*) si c'est une combinaison linéaire (non vide) à coefficients strictement positifs de diviseurs arithmétiques nef (resp. amples).

Par la théorie de l'intersection arithmétique, un $\mathbf{R}$-diviseur lisse $(\mathrm{A}, g_{\mathrm{A}})$ sur $\mathscr{X}$ fournit une forme linéaire sur $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbf{R}}(\mathscr{X})$, par la formule

$$(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}}) \mapsto \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathrm{A}_{\mathbf{Q}})}(\mathrm{A}, g_{\mathrm{A}})^d(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}}).$$

Elle s'annule sur tout diviseur arithmétique principal. Lorsque $(\mathrm{A}, g_{\mathrm{A}})$ est ample, cette forme linéaire est positive sur tout diviseur arithmétique effectif. On a $(\mathrm{A}, g_{\mathrm{A}})^d \cdot (0, 1) = (\mathrm{A}_{\mathbf{Q}})^d = \mathrm{vol}(\mathrm{A}_{\mathbf{Q}})$.

Par ailleurs, cette forme linéaire s'étend en une forme linéaire sur $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbf{R}}(\mathscr{X}')$, pour tout modèle $\mathscr{X}'$ de F qui domine $\mathscr{X}$ et vérifie les mêmes propriétés : annulation sur les diviseurs arithmétiques principaux, et positivité en les diviseurs arithmétiques effectifs. Elle définit ainsi une fonctionnelle divisorielle. De telles fonctionnelles divisorielles seront dites *arithmétiques*.

Théorème 2.4.3 (Szachniewicz, 2023). — *Soit* F *un corps de type fini sur* $\mathbf{Q}$. *Les fonctionnelles divisorielles arithmétiques sur* F *sont denses dans l'espace des fonctionnelles divisorielles qui induisent la structure standard sur* $\mathbf{Q}$.

La démonstration est analogue à celle que nous avons esquissée, en remplaçant les objets géométriques (diviseurs, volume) par les analogues arithmétiques que nous avons décrits au paragraphe précédent.

3. Logique continue

3.1. Le langage de la géométrie diophantienne

Structures. — Dans la version « bornée » de (Ben Yaacov, Berenstein, Henson et Usvyatsov, 2008) de la logique continue, les structures sont des espaces métriques compacts et les prédicats sont des fonctions à valeurs dans un intervalle borné, disons $[0; 1]$. Dans la version non bornée (Ben Yaacov, 2008), les structures sont des espaces métriques complets M munis d'une « jauge », c'est-à-dire une application 1-lipschitzienne $\nu\colon \mathrm{M} \to \mathbf{R}$ telle que la distance soit bornéee sur chaque partie où ν est bornée. Il s'agit ici des

3. Les définitions fluctuent dans la littérature ; nous prenons ici celle de Charles (2021, définition 2.3).

corps globalement valués, considérés comme espaces métriques pour la distance triviale, munis de la fonction jauge $\mathrm{ht}\colon x \mapsto h(1,x)$.

Fonctions et termes. — Dans cette logique, un symbole de fonction n-aire f représente une application de M^n dans M qui vérifie une condition d'uniforme continuité uniforme sur chaque partie où ν bornée, c'est-à-dire qu'on fixe, pour tout tel symbole de fonction f un « module », c'est-à-dire une fonction $\delta_f\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, strictement croissante, continue à droite et nulle en 0, et on les interprétations de f seront des fonctions de M^n dans M telles que pour tous $x, y \in \mathrm{M}^n$ tels que $d(x,y) < r$ et $\nu(x), \nu(y) < 1/r$, on a $d(f(x), f(y)) < \delta_f(r)$ et $\nu(f(x,y)) < 1/\delta_f(r)$. Dans le cas qui va nous intéresser, la condition d'uniforme continuité s'évanouit et il ne reste qu'une majoration, qu'on récrit sous la forme $\nu(f(x,y)) < \Delta_f(\sup(\nu(x), \nu(y)))$, où $\Delta_f\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ est une fonction croissante. Les symboles de fonctions de la théorie des corps globalement valués sont simplement les deux symboles de constantes 0 et 1 et les trois symboles arithmétiques $+, -, \cdot$ représentant bien sûr l'addition, la soustraction et la multiplication. Le lemme ci-dessous montre que l'on peut prendre pour modules les fonctions données par $\Delta_0(r) = 0$, $\Delta_1(r) = 0$, $\Delta_+(r) = \Delta_-(r) = 2r + e$, et $\Delta_\cdot(r) = 2r$.

LEMME 3.1.1. — *Soit h une hauteur sur un corps* F*. Pour $x \in \mathrm{F}$, posons* $\mathrm{ht}(x) = h_2(1,x)$*. Soit e un nombre réel tel que $e \geq \mathrm{ht}(2)$.*

a) On a $\mathrm{ht}(0) = 0$ *et* $\mathrm{ht}(1) = 0$ *;*

b) Pour tous $x, y \in \mathrm{F}$, on a $\mathrm{ht}(x+y) \leq \mathrm{ht}(x) + \mathrm{ht}(y) + e$ *et* $\mathrm{ht}(x-y) \leq \mathrm{ht}(x) + \mathrm{ht}(y) + e$ *;*

c) Pour tous $x, y \in \mathrm{F}$, on a $\mathrm{ht}(xy) \leq \mathrm{ht}(x) + \mathrm{ht}(y)$.

Les *termes* de la logique continue représentent les fonctions de puissances M^n dans M que l'on peut définir dans le langage donné. Ils sont définis de manière usuelle, par récurrence, à partir de symboles de variables et des symboles de fonctions. Ici, ce seront des expressions formelles (bien formées) utilisant les symboles $+$, $-$, $\cdot$ et des symboles de variables, c'est-à-dire — essentiellement — des polynômes.

3.1.1. *Prédicats et formules.* — En logique continue, les prédicats sont des fonctions à valeurs réelles, et on impose de manière analogue aux fonctions que chaque prédicat p soit muni d'un module de continuité uniforme et d'une majoration de la jauge sur chaque partie de la structure où la jauge est bornée. Dans de le cas d'un espace muni de la distance triviale, cette condition se simplifie en une relation du type $\mathrm{ht}(x) < r \Rightarrow |p(x)| \leq \Delta_p(r)$, où $\Delta_p\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ est une fonction croissante.

Les symboles de prédicats de la théorie des corps globalement valués contiennent d'abord un prédicat binaire $=$ représentant l'égalité. On introduit également, pour tout entier n, un symbole de prédicat n-aire h_n, qui représente la fonction h_n dans un corps globalement valué. Si F est un corps globalement valué et x est un élément non nul de F^n, on a $h_n(x) \leq \sum_i \mathrm{ht}(x_i)$ pour tout $x \in \mathrm{F}^n$; cela montre qu'on peut prendre pour module de h_n la fonction donnée par $\Delta_{h_n}(r) = nr$. Cependant, comme les axiomes des corps globalement valués ont postulé $h_n(0) = -\infty$, il est plus naturel de considérer ici que les prédicats sont des fonctions continues à valeurs dans $[-\infty; +\infty[$; nous tairons désormais cette subtilité. Plus généralement, pour tout polynôme tropical t en n symboles de variables, on introduit un symbole de prédicat n-aire R_t qui représente le terme local associé à t. On définit le module Δ_t du prédicat R_t de récurrence sur la construction du polynôme tropical t de sorte que lorsque F est un corps globalement valué et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathrm{F}^\times)^n$, on ait

$$\mathrm{R}_t(x_1, \dots, x_n) \le \Delta_t(\sup(\mathrm{ht}(x_1), \dots, \mathrm{ht}(x_n)).$$

En fait, le symbole h_n introduit précédemment peut être pris comme l'abréviation de R_t pour $t = -\inf(x_1, \dots, x_n)$.

Les *formules* sont également définies par récurrence :

- Les formules atomiques sont celles de la forme $pt_1 \dots t_n$, où p est un symbole de prédicat n-aire et $t_1, \dots, t_n$ sont des termes ;
- Les connecteurs logiques sont fournis par les fonctions continues de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$; ainsi, si u est une telle fonction et si $f_1, \dots, f_n$ sont des formules, l'expression $uf_1 \dots f_n$ est une formule ;
- Le rôle des quantificateurs logiques ($\forall$, $\exists$) est respectivement joué par inf et sup ; précisément, si f est une formule, L un ensemble de symboles de variables et $\varphi \colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ une fonction continue à support compact, alors les expressions $\inf_{\mathrm{L},\varphi}$ et $\sup_{\mathrm{L},\varphi} f$ sont des formules. (Nous expliquerons ci-dessous leur interprétation.)

Une formule sans quantificateurs est une formule sans sup et inf. Les variables libres d'une formule sont définies de manière usuelle ; une formule sans variable libre est appelée un *énoncé*.

3.2. Types et modèles

3.2.1. *Interprétation.* — Une *structure* pour ce langage est simplement un ensemble M, muni d'une fonction $\mathrm{ht} \colon \mathrm{M} \to \mathbf{R}$, d'éléments 0^M et 1^M de M tels que $\mathrm{ht}(0^\mathrm{M}) \le \Delta_0$ et $\mathrm{ht}(1^\mathrm{M}) \le \Delta_1$, de fonctions $+^\mathrm{M}, -^\mathrm{M}, \cdot^\mathrm{M}$ de M^2 dans M telles que $\mathrm{ht}(x +^\mathrm{M} y) \le \Delta_+(r)$ pour $x, y \in \mathrm{M}$ tels que $\mathrm{ht}(x), \mathrm{ht}(y) < r$, etc. et de $\mathrm{R}_t^\mathrm{M} \colon \mathrm{M}^n \to \mathbf{R}$, pour tout polynôme tropical t, telles que $\mathrm{ht}(\mathrm{R}_t^\mathrm{M}(x)) \le \Delta_t(r)$ si $\mathrm{ht}(x_i) < r$ pour tout i. Lorsque $t = -\inf(x_1, \dots, x_n)$, on écrit $\mathrm{R}_t = h_n$.

On commettra souvent l'abus d'écriture consistant à écrire 0, +, R_t ou h_n pour 0^M, $+^\mathrm{M}$, R_t^M ou h_n^M.

Donnons-nous une telle structure M.

Les termes s'interprétent comme des fonctions sur M et ses puissances. Si t est un terme et si V est un ensemble de symboles de variables contenant ceux qui apparaissent dans t, on définit par récurrence une fonction $t^\mathrm{M} \colon \mathrm{M}^\mathrm{V} \to \mathrm{M}$, ainsi qu'une fonction $\Delta_t \colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, croissante et continue à droite, telle que pour tout $a \in \mathrm{M}^\mathrm{V}$ tel que $\mathrm{ht}(a_v) < r$ pour tout v, on ait $\mathrm{ht}(t^\mathrm{M}(a)) \le \Delta_t(r)$. Explicitement, si $t = v$, alors $v \in \mathrm{V}$ et t^M est la fonction $a \mapsto a_v$; si $t = t_1 + t_2$, alors t^M est la fonction $a \mapsto t_1^\mathrm{M}(a) + t_2^\mathrm{M}(a)$, etc.

De même, les prédicats s'interprètent comme des fonctions à valeurs réelles sur M et ses puissances.

À première vue, le prédicat binaire pour l'égalité est à valeurs booléennes, mais on interprète les valeurs de vérité vrai et faux respectivement comme 0 et 1.

L'interprétation des formules atomiques est assez claire, de même que celle des connecteurs logiques. Il faut cependant préciser l'interprétation des quantificateurs $\sup_{\mathrm{L},\varphi}$ et $\inf_{\mathrm{L},\varphi}$ et, en particulier, expliquer le rôle de la fonction φ. Soit donc f une formule dont les variables libres sont contenues dans un ensemble V de symboles de variables, soit L un ensemble de symboles de variables, et soit $\varphi\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ une fonction continue à support compact. Pour tout $a \in \mathrm{M}^{\mathrm{V}}$ et tout $b \in \mathrm{M}^{\mathrm{L}}$, notons $a[b]$ l'élément c de M^{V} tel que $c_v = b_v$ si $v \in \mathrm{L}$ et $c_v = a_v$ sinon. Alors, l'interprétation de la formule $g = \sup_{\mathrm{L},\varphi} f$ est définie par

$$g^{\mathrm{M}}(a) = \sup_{b\in\mathrm{M}^{\mathrm{L}}} \varphi(\sup_i \mathrm{ht}(b_i)) f^{\mathrm{M}}(a[b])$$

pour tout $a \in \mathrm{M}^{\mathrm{V}}$. La condition de support compact sur φ garantit garantit que cette borne supérieure est finie et plus précisément que l'on a une majoration en termes de $\mathrm{ht}(a)$ si l'on dispose d'une majoration similaire pour $f^{\mathrm{M}}(a[b])$.

Plus généralement, si f est une formule et si V est un ensemble de symboles de variables contenant ceux qui apparaissent dans f, on définit par récurrence une fonction $f^{\mathrm{M}}\colon \mathrm{M}^{\mathrm{V}} \to \mathbf{R}$ ainsi qu'une fonction croissante $\Delta_f\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ telle que $p(x) \leq \Delta_p(r)$ si $\mathrm{ht}(x_v) < r$ pour tout $v \in \mathrm{V}$.

3.2.2. *Réalisation.* — Une *théorie* est un ensemble d'énoncés.

Si une formule f est un énoncé, on peut prendre $\mathrm{V} = \emptyset$ pour son interprétation dans une structure M, de sorte que f définit un nombre réel f^{M}. On dit qu'une structure M est un *modèle* d'une théorie T si on a $f^{\mathrm{M}} = 0$ pour tout énoncé $f \in \mathrm{T}$.

Comme tout intervalle fermé de $\mathbf{R}$, plus généralement toute partie fermée A de $\mathbf{R}^n$, est l'ensemble des zéros d'une fonction continue, on peut faire usage d'énoncés du type $(p_1, \dots, p_n) \in \mathrm{A}$, où A est une partie fermée de $\mathbf{R}^n$. Il suffit de l'écrire $d_{\mathrm{A}}(p_1, \dots, p_n) = 0$ où $d_{\mathrm{A}}\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est la distance à A (par exemple pour la norme euclidienne).

De même que l'égalité à valeurs booléenne a été interprétée on peut aussi utiliser les connecteurs logiques usuels : $\vee$ (OU) et $\wedge$ (ET). Si f et g sont deux formules, la formule $f \wedge g$ doit être vraie dans M si et seulement si f^{M} et g^{M} sont vraies ; on pose donc $(f \wedge g)^{\mathrm{M}} = \sup(|f^{\mathrm{M}}|, |g^{\mathrm{M}}|)$. De même, la formule $f \vee g$, interprétée comme $(f \vee g)^{\mathrm{M}} = \inf(f^{\mathrm{M}}, g^{\mathrm{M}})$, est vraie dans M si et seulement si f^{M} ou g^{M} est vraie.

Comme $\mathbf{R}_+^*$ n'est pas fermé dans $\mathbf{R}$, la négation $\neg f$ d'une formule ou l'implication $f \Rightarrow g$ entre deux formules sont un peu plus délicates à considérer. On peut les remplacer par une conjonction infinie de formules. Pour tout entier n, soit φ_n la fonction continue à support compact sur $\mathbf{R}$ donée par $\varphi_n(t) = \sup(1 - n|t|, 0)$. Par construction, $f^{\mathrm{M}} \neq 0$ équivaut à la conjonction des égalités $\varphi_n(f)^{\mathrm{M}} = 0$.

Les formules universellement quantifiées, du type « $\forall x, f(x)$ », où f est une formule ayant un symbole de variable libre x, doivent également être récrites. Pour cela, on considère, pour tout entier n, la fonction φ_n sur $\mathbf{R}_+$ telle que $\varphi_n(t) = 1$ pour $t \in [0; n]$, $\varphi_n(t) = n + 1 - t$ pour $t \in [n; n + 1]$ et $\varphi(t) = 0$ pour $t \geq n + 1$. On constate que l'assertion « $f^{\mathrm{M}}(a) \leq 0$ pour tout $a \in \mathrm{M}$ » équivaut à la conjonction, pour tout $n \in \mathbf{N}$, des conditions

$$\sup_{a\in \mathrm{M}} \varphi_n(\mathrm{ht}(a)) f(a) = 0.$$

Définition 3.2.1. — *Soit e un nombre réel. Dans le langage introduit précédemment, la théorie des corps globalement valués (d'erreur archimédienne e) consiste en :*

— *Les axiomes des corps ;*
— *Les axiomes de la définition 1.1.1 et ceux de la définition 1.3.1 ;*
— *L'inégalité $h_2(1,2) \leq e$;*
— *La formule du produit $h_1(x) = 0$.*

On note GVF_e cette théorie. Ses modèles sont exactement les corps globalement valués d'erreur archimédienne au plus e.

Plus généralement, si k est un corps, les corps globalement valués contenant k et induisant la structure triviale sur k peuvent être axiomatisés par la variante des axiomes précédents où l'on remplace, dans l'axiome (iv) de la définition 1.3.1 la condition « pour tout $v \in \mathrm{QVal}(\mathrm{F})$ » par la condition « pour tout $v \in \mathrm{QVal}(\mathrm{F}/k)$ ».

Même si ce n'en est aujourd'hui que le résultat le plus élémentaire, le théorème de compacité est un pilier de la logique du premier ordre, et un des objectifs du développement de la logique continue était de garantir la possibilité un tel théorème. Pour le démontrer dans le présent contexte, on utilise la construction de corps globalement valués par ultraproduits et la variante suivante du théorème de Łos.

Proposition 3.2.2. — *Soit e un nombre réel, soit $(\mathrm{M}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille de corps globalement valués d'erreur archimédienne au plus e, soit $\mathfrak{u}$ un ultrafiltre non principal sur I et soit $\mathrm{M}_{\mathfrak{u}}$ l'ultraproduit des M_i relativement à l'ultrafiltre $\mathfrak{u}$. Pour toute formule f, tout ensemble de symboles de variables V contenant les variables libres de f et tout $a \in \prod_i \mathrm{M}_i^{\mathrm{V}}$ d'image $[a]$ dans $\mathrm{M}_{\mathfrak{u}}^{\mathrm{V}}$, on a*

$$f^{\mathrm{M}_{\mathfrak{u}}}([a]) = \lim_{i,\mathfrak{u}} f^{\mathrm{M}_i}(a_i).$$

Corollaire 3.2.3. — *Soit V un ensemble de symboles de variables et soit T un ensemble de formules dont les variables libres appartiennent à V. Soit $r \colon \mathrm{V} \to \mathbf{R}_+$ une application. On suppose que pour toute partie finie T_1 de T et tout $\varepsilon > 0$, il existe un corps globalement valué M, d'erreur archimédienne au plus e, et $a \in \mathrm{M}^{\mathrm{V}}$ tel que $\mathrm{ht}(a_v) < r_v + \varepsilon$ et $f^{\mathrm{M}}(a) < \varepsilon$ pour tout $f \in \mathrm{T}_1$. Alors, il existe un corps globalement valué M d'erreur archimédienne au plus e et un élément $a \in \mathrm{M}^{\mathrm{V}}$ tel que $\mathrm{ht}(a_v) \leq r_v$ pour tout v et tel que $f^{\mathrm{M}}(a) = 0$ pour tout $f \in \mathrm{T}_1$.*

Soit V un ensemble de symboles de variables et soit Φ_{V} l'ensemble des formules dont les variables libres appartiennent à V. On dit qu'une fonction $\alpha \colon \Phi_{\mathrm{V}} \to \mathbf{R}$ est un V-*type* s'il existe un corps globalement valué M d'erreur archimédienne au plus e et un élément $a \in \mathrm{M}^{\mathrm{V}}$ tel que $\alpha(f) = f^{\mathrm{M}}(a)$ pour tout $f \in \Phi_{\mathrm{V}}$. On note $\mathscr{S}_{\mathrm{V}}$ l'ensemble des V-types ; on le munit de la topologie de la convergence simple.

Lorsque $V = \emptyset$, c'est l'espace des théories de corps globalement valués.

Corollaire 3.2.4. — *Soit* V *un ensemble. L'espace* $\mathscr{S}_V$ *est localement compact. Pour tout* $r \in \mathbf{R}_+$*, le sous-espace des types* $\alpha \in \mathscr{S}_V$ *tels que* $\mathrm{ht}(\alpha) \le r$ *est compact.*

3.3. Structures existentiellement closes

La théorie des corps ordonnés et, dans une moindre mesure, celle des corps, ont été les exemples fondamentaux dans la création des premières définitions et des premiers concepts en théorie des modèles, en particulier la notion d'extension élémentaire. Une extension $K \to L$ de corps (resp. de corps ordonnés) est élémentaire si les formules à paramètres dans K satisfaites par L sont exactement celles qui sont satisfaites par K. Si l'on se restreint aux formules qui ne font intervenir que des quantificateurs existentiels, on obtient dans ces deux cas les notions d'extension algébriquement close (resp. réellement close), mais le principe est général. Si un corps (resp. un corps ordonné) est existentiellement clos dans toute extension, on dit qu'il est existentiellement clos, et on obtient bien sûr les notions de corps algébriquement clos (resp. réel clos) ; là encore, le principe est général.

En logique continue, la formulation de ce principe requiert une petite variation : on ne demande que des solutions approchées.

Définition 3.3.1. — *Soit* M *un corps globalement valué. On dit que* M *est* existentiellement clos *si pour toute extension* $M \to N$ *de corps globalement valués, pour tous ensembles* V *et* W *de symboles de variables, pour toute formule sans quantificateurs* f *dont les symboles de variables appartienennt à* $V \cup W$*, pour tout* $a \in M^V$ *et tout* $r \in \mathbf{R}_+$*, s'il existe* $b \in N^W$ *tel que* $\mathrm{ht}(b) \le r$ *et* $f^N(a, b) = 0$*, alors pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $b' \in M^W$ *tel que* $\mathrm{ht}(b') \le r + \varepsilon$ *et* $|f^M(a, b')| < \varepsilon$*.*

Les deux théorèmes principaux de cet exposé affirment que les clôtures algébriques des classiques corps globaux de la théorie algébrique des nombres, considérés comme des corps globalement valués, sont existentiellement clos. Ils sont dus à Ben Yaacov et Hrushovski (2022) pour les corps de fonctions et à Szachniewicz (2023) pour les corps de nombres. Nous les énoncerons et esquisserons leurs démonstrations aux paragraphes suivants.

Le *Nullstellensatz* de Hilbert, qui caractérise les corps algébriquement clos K, affirme que si un système d'équations polynomiales (en plusieurs variables) à coefficients dans K possède une solution dans une extension L de K, alors ce système possède déjà une solution dans K. Le *Positivstellensatz* d'Artin et Schreier est la variante de cet énoncé pour les corps ordonnés ; il caractérise les corps réels clos.

Dans le cadre de la théorie des modèles, ces théorèmes montrent que la notion de corps existentiellement clos (resp. de corps réel clos) possède une axiomatisation au premier ordre qui ne fait pas intervenir d'autres corps (resp. d'autres corps ordonnés).

Dans le cas des corps globalement valués, c'est une question ouverte.

Conjecture 3.3.2. — *Soit e un nombre réel. Il existe une théorie dans le langage des corps globalement valués dont les corps globalement valués (d'erreur archimédienne e) existentiellement clos sont les modèles.*

De manière équivalente, la théorie GVF_e admet-elle une théorie modèle compagne ?

Si c'était le cas, tout corps globalement valué existentiellement clos K serait élémentairement équivalent à l'un des trois corps existentiellement clos suivants :

— Si $h(1,2) > 0$, au corps $\overline{\mathbf{Q}}$, muni de la structure de corps globalement valué obtenue en multipliant la structure standard par $h(1,2)/\log(2)$;

— Si $h(1,2) = 0$ et K est de caractéristique zéro, à la clôture algébrique du corps $\mathbf{Q}(\mathrm{T})$ muni de la structure standard qui est triviale sur $\mathbf{Q}$;

— Si $h(1,2) = 0$ et K est de caractéristique $p > 0$, à la clôture algébrique du corps $\mathbf{F}_p(\mathrm{T})$ muni de la structure standard qui est triviale sur $\mathbf{F}_p$.

Les théorèmes 3.4.1 et 3.5.1 entraînent l'énoncé plus faible que tout corps globalement valué se plonge dans une ultrapuissance d'un de ces trois corps.

3.4. Clôture existentielle : corps de fonctions

Théorème 3.4.1 (Ben Yaacov et Hrushovski, 2022). — *Soit k un corps et soit* K *la la clôture algébrique du corps $k(\mathrm{T})$, muni de sa structure standard de corps globalement valué pour laquelle $h(1,\mathrm{T}) = 1$. Alors* K *est un corps valué existentiellement clos.*

On peut supposer que k est algébriquement clos. Posons $\mathrm{K} = \overline{k(\mathrm{T})}$. On considère un corps globalement valué L qui étend K et un point $b = (b_1,\dots,b_n) \in \mathrm{L}^n$; il s'agit d'approcher le « type sans-quantificateur » de b par celui d'un point $a \in \mathrm{K}^n$.

Commençons par étudier le cas particulier où les seules formules considérées ne font intervenir que des paramètres dans k. Par élimination des quantificateurs dans la théorie ACF, on se ramène à la question suivante : Soit X un k-schéma propre, intègre et normal muni d'un isomorphisme $k(b_1,\dots,b_n) \simeq k(\mathrm{X})$, de sorte que le point b apparaît comme un point générique de X ; posons $d = \dim(\mathrm{X})$. Soit Y un fermé de Zariski strict de X. D'après le théorème 2.2.4, la restriction à $k(\mathrm{X})$ de la structure de corps globalement valuée de L est approchée par une fonctionnelle divisorielle géométrique ; quitte à remplacer X par un modèle birationnel, on peut supposer qu'elle est associée à un diviseur de Cartier ample A sur X. D'après le théorème de Bertini, il existe une courbe C sur X qui n'est pas contenue dans Y et un nombre réel $w > 0$ tel que dans la classe de A^{d-1} soit égale à $w[\mathrm{C}]$. Le corps $k(\mathrm{C})$ est de type fini sur k et de degré de transcendance 1, il admet donc un k-plongement dans K.

D'après le lemme suivant, il existe un tel plongement qui induit w fois la structure induite par L. Le point générique de C fournit alors l'élément $(c_1,\dots,c_n) \in \mathrm{K}^n$ qui satisfait les conditions requises.

Lemme 3.4.2. — *Soit k un corps et soit* K *la clôture algébrique de $k(\mathrm{T})$, considérée comme corps globalement valué avec $\mathrm{ht}(\mathrm{T}) = 1$. Soit a un nombre rationnel strictement positif. Il existe un k-automorphisme θ de* K *tel que $\mathrm{ht}(\theta(x)) = a\,\mathrm{ht}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{K}$.*

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas où a est un entier naturel non nul. Soit $\theta\colon k(\mathrm{T}) \to \mathrm{K}$ le k-morphisme tel que $\theta(\mathrm{T}) = \mathrm{T}^a$. Il se prolonge en un k-morphisme de K dans lui-même, encore noté θ ; c'est un k-automorphisme de K. Par unicité à scalaire près de la structure de corps globalement valué sur K qui induit la structure triviale sur k, il existe un nombre réel $c \geq 0$ tel que $\mathrm{ht}(\theta(x)) = c\,\mathrm{ht}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{K}$; en prenant $x = \mathrm{T}$, on voit que $c = a$, d'où le lemme. □

Traitons maintenant le cas général. Par un argument de théorie des modèles, il s'agit de démontrer l'existence d'un K-morphisme de L dans une ultrapuissance de K. L'étude précédente des formules à paramètres dans k entraîne l'existence d'un k-morphisme σ_{L} de L dans une ultrapuissance K^* de K, associée à un ultrafiltre non principal $\mathfrak{u}$ sur un ensemble infini I. Considérons la restriction σ de σ_{L} à $k[\mathrm{T}]$; posons $r = \mathrm{ht}(\sigma(\mathrm{T}))$; on a $r > 0$. On peut représenter σ comme l'ultrapuissance d'une famille (σ_i) de k-morphismes de $k[\mathrm{T}]$ dans K ; posons $r_i = \mathrm{ht}(\sigma_i(\mathrm{T}))$. Alors, $\lim_{i,\mathfrak{u}} r_i = r$. Comme $r > 0$, l'ensemble des i tels que $r_i > 0$ appartient à $\mathfrak{u}$; il n'est pas restrictif de supposer que $r_i > 0$ pour tout i. Alors, pour tout i, on a $\sigma_i(\mathrm{T}) \notin k$; comme k est algébriquement clos, le morphisme $\sigma_i\colon k[\mathrm{T}] \to \mathrm{K}$ se prolonge en un k-morphisme de $k(\mathrm{T})$ dans K, puis, l'extension K de $k(\mathrm{T})$ étant algébrique, en un k-morphisme de K dans K que l'on note encore σ_i.

La description valuative des hauteurs montre que pour tout i, $r_i = \mathrm{ht}(\sigma_i(\mathrm{T}))$ est un nombre *rationnel* strictement positif. D'après le lemme précédent, il existe pour tout i un automorphisme θ_i de K tel que $\mathrm{ht} \circ \theta_i = a_i\,\mathrm{ht}$. L'ultrapuissance des θ_i définit un k-automorphisme θ de l'ultrapuissance K^*. Alors, $\theta^{-1} \circ \sigma_{\mathrm{L}}$ est un K-plongement de L dans K^*, ce qui conclut la démonstration du théorème 3.4.1.

Remarque 3.4.3. — La démonstration a utilisé de manière cruciale l'unicité à facteur près d'une structure de corps valué sur la clôture algébrique de $k(\mathrm{T})$ qui induise la structure triviale sur k.

Ce résultat ne vaut pas pour la clôture algébrique d'un corps de fractions rationnelles $\mathrm{K} = k(\mathrm{S}, \mathrm{T})$ en deux variables. Munissons-le d'une structure de corps globalement valué triviale sur k, par exemple déduite d'un fibré en droites ample sur $\mathbf{P}_2$ et soit $a, b \in \mathrm{K}$ deux éléments algébriquement indépendants sur k tels que $\mathrm{ht}(a) \neq \mathrm{ht}(b)$. Soit L le sous-corps de K donné par $\mathrm{L} = k(a+b, ab)$ muni de sa structure de corps globalement valué induite par celle de K. Comme K est algébrique sur L, on peut également le munir de la structure de corps globalement valué symétrique qui prolonge celle de L ; notons K' ce corps globalement valué. Puisque $\mathrm{ht}(a) \neq \mathrm{ht}(b)$, les structures de corps globalement valués de K et K' ne sont pas isomorphes. On peut même en déduire que la clôture algébrique de K, munie de la structure de corps globalement valuée symétrique qui prolonge celle de K, n'est pas existentiellement close.

3.5. Clôture existentielle : corps de nombres

Théorème 3.5.1 (Szachniewicz, 2023). — *Munissons le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels de sa structure standard de corps globalement valué, pour laquelle $h(1, 2) = \log(2)$.*

Alors le corps $\overline{\mathbf{Q}}$ *des nombres algébriques, muni de l'unique structure de corps globalement valué qui est symétrique et étend la structure donnée sur* $\mathbf{Q}$*, est existentiellement clos.*

Soit F un corps globalement valué de caractéristique zéro, induisant la structure standard sur $\mathbf{Q}$, et soit $b = (b_1, \dots, b_n)$ une suite finie d'éléments de F ; il s'agit d'approcher le type sans quantificateur de b. On peut remplacer F par le corps $\mathbf{Q}(b_1, \dots, b_n)$. Alors, sa structure de corps globalement valué se décrit en termes géométriques. La question se traduit ainsi en un énoncé de géométrie arithmétique.

Soit $\mathscr{X}$ un schéma propre sur $\operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$, surjectif, intègre et normal ; soit $d = \deg.\operatorname{tr}_{\mathbf{Q}}(\kappa(\mathscr{X}))$, de sorte que $\dim(\mathscr{X}) = d + 1$.

Tout diviseur arithmétique $(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})$ sur $\mathscr{X}$ induit une fonction *hauteur* sur l'ensemble des points fermés de $\mathscr{X}_{\mathbf{Q}}$. Soit y un tel point et soit $\mathscr{Y}$ son adhérence dans $\mathscr{X}$ pour la topologie de Zariski ; si y n'appartient pas au support de D, on peut restreindre D à $\mathscr{Y}$ et poser

$$h_{(\mathrm{D},g_{\mathrm{D}})}(y) = (\mathrm{D}|_{\mathscr{Y}}) = \sum_p \nu_p(\mathrm{D}, \mathscr{Y}) \log(p) + \int_{\mathscr{Y}(\mathbf{C})} g_{\mathrm{D}},$$

où la somme porte sur l'ensemble des nombres premiers p, $\nu_p(\mathrm{D}, \mathscr{Y})$ est la multiplicité d'intersection au-dessus de (p) du 1-cycle $\mathscr{D}$ et du diviseur de Cartier D sur $\mathscr{X}$, et l'intégrale $\int_{\mathscr{Y}(\mathbf{C})} g_{\mathrm{D}}$ est la somme des valeurs de g_{D} en tous les conjugués de y dans $\mathscr{X}(\mathbf{C})$. Dans le cas général, on remplace $(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})$ par un diviseur arithmétique linéairement équivalent $(\mathrm{D}', g_{\mathrm{D}'})$ tel que y n'appartienne pas au support de D'.

Pour tout point y, l'application $(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}}) \mapsto h_{(\mathrm{D},g_{\mathrm{D}})}(y)$ est linéaire. Elle s'annule en tout diviseur arithmétique de la forme $\widehat{\operatorname{div}}(f)$.

Proposition 3.5.2. — *Soit* $\lambda \colon \widehat{\operatorname{Div}}(\mathscr{X}) \to \mathbf{R}$ *une forme linéaire qui est positive sur les diviseurs arithmétiques pseudo-effectifs et vérifie* $\lambda((0, 1)) = 1$*. Soit* Z *un fermé de Zariski strict de* $\mathscr{X}_{\mathbf{Q}}$*. Alors* λ *est limite de formes linéaires de la forme* $(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}}) \mapsto h_{(\mathrm{D},g_{\mathrm{D}})}(y)$*, où* y *parcourt l'ensemble des points algébriques de* $\mathscr{X}_{\mathbf{Q}} - \mathrm{Z}$*.*

Démonstration. — Quitte à remplacer $\mathscr{X}$ par un modèle birationnel, le théorème 2.4.3 permet de supposer que λ est de la forme $(\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}}) \mapsto \frac{1}{\operatorname{vol}(\mathrm{A}_{\mathbf{Q}})} \langle (\mathrm{A}, g_{\mathrm{A}})^d \rangle \cdot (\mathrm{D}, g_{\mathrm{D}})$, où $(\mathrm{A}, g_{\mathrm{A}})$ est un diviseur arithmétique ample sur $\mathscr{X}$. Le théorème suivant affirme alors le résultat voulu. $\square$

Théorème 3.5.3 (Szachniewicz, 2023). — *Soit* $(\mathrm{A}, g_{\mathrm{A}})$ *un diviseur arithmétique ample sur* $\mathscr{X}$ *et soit* Z *un fermé de Zariski strict de* $\mathscr{X}_{\mathbf{Q}}$*. Soit* $(\mathrm{D}_i, g_i)_i$ *une famille finie de diviseurs arithmétiques sur* $\mathscr{X}$*. Pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un point fermé* $y \in \mathscr{X}_{\mathbf{Q}}$ *tel que* $y \notin \mathrm{Z}$ *et tel que*

$$\left| h_{(\mathrm{D}_i,g_i)}(y) - \frac{1}{\operatorname{vol}(\mathrm{A}_{\mathbf{Q}})} (\mathrm{A}, g_{\mathrm{A}})^d (\mathrm{D}_i, g_i) \right| < \varepsilon$$

pour tout i*.*

Démonstration. — La géométrie d'Arakelov a largement exploité l'interaction entre hauteurs et intersection arithmétique, en particulier l'inégalité fondamentale, pour tout diviseur arithmétique ample $(\mathrm{D}, g_\mathrm{D})$,

$$\liminf_{y \in \mathscr{X}_\mathbf{Q}} h_{(\mathrm{D},g_\mathrm{D})}(y) \geq \frac{(\mathrm{D}, g_\mathrm{D})^{d+1}}{(d+1)\operatorname{vol}(\mathrm{D}_\mathbf{Q})}, \tag{3.5.4}$$

démontrée par Zhang (1995). La limite inférieure signifie que y tend vers le point générique de $\mathscr{X}_\mathbf{Q}$. La démonstration du théorème 3.5.3 reprend celle de cette inégalité en la précisant en plusieurs points cruciaux.

Le théorème d'amplitude arithmétique de Zhang (1995) fournit, lorsque n tend vers l'infini, des sections $s \in \widehat{\mathrm{H}}^0(\mathscr{X}, n(\mathrm{D}, g_\mathrm{D}))$ qui ne s'annulent pas en des points prescrits. C'est la clé de l'inégalité précédente.

Le théorème 1.5 de Charles (2021) affirme que pour tout fermé strict $\mathscr{Y}$ de $\mathscr{X}$, la proportion de ces sections s telles que $\operatorname{div}(s)$ ne soit pas contenu dans $\mathscr{Y}$ tend vers 1.

Lorsque $d \geq 1$, Wilms (2022) et Qu et Yin (2024) ont établi que lorsque $\varepsilon \to 0$, qu'une proportion arbitrairement proche de 1 de ces sections s vérifient les conditions suivantes :

— Le diviseur $\operatorname{div}(s)$ est irréductible, sa fibre générique est lisse ;

— La fonction positive $\log\|s\|^{-1}$ sur $\mathscr{X}(\mathbf{C})$ est petite en norme L^1 par rapport à la mesure $\omega^d_{(\mathrm{D},g_\mathrm{D})}$ sur $\mathscr{X}(\mathbf{C})$; plus précisément :

$$\int_{\mathscr{X}(\mathbf{C})} \log\|s\|^{-1} \omega^d_{(\mathrm{D},g_\mathrm{D})} < \varepsilon (\mathrm{D}, g_\mathrm{D})^{d+1}.$$

Si $d \geq 1$, une variante de ce dernier énoncé permet de choisir une section $s \in \widehat{\mathrm{H}}^0(\mathscr{X}, n(\mathrm{D}, g_\mathrm{D}))$ telle que $\operatorname{div}(s)$ soit irréductible, sa fibre générique soit lisse et non contenue dans Z, et telle que $\log\|s\|^{-1}$ soit petite en norme L^1 par rapport aux mesures $\omega_{\mathrm{D}_i,g_i} \wedge \omega^{d-1}_{\mathrm{A},g_\mathrm{A}}$. Posons $\mathscr{Y} = \operatorname{div}(s)$. L'assertion pour la normalisation de $\mathscr{Y}$ et les restrictions à des diviseurs arithmétiques (D_i, g_i) fait intervenir $(\mathrm{A}, g_\mathrm{A})|^{d-1}_{\mathscr{Y}}(\mathrm{D}_i, g_{\mathrm{D}_i})|_{\mathscr{Y}}$ qui diffère de $(\mathrm{A}, g_\mathrm{A})^d(\mathrm{D}_i, g_{\mathrm{D}_i})$ par un terme archimédien, intégrale de $\log\|s\|^{-1}$ qui, par le choix de s, est petit. Elle entraîne ainsi l'assertion pour $\mathscr{X}$. Par récurrence, l'assertion se ramène ainsi au cas évident où $d = 0$. □

3.6. Perspectives

Comme évoqué dans l'introduction, les résultats exposés dans ce texte ouvrent plus encore de questions qu'ils n'en résolvent ; ils offrent aussi un regard neuf sur des résultats de géométrie diophantienne, certains anciens.

Sous sa version initiale, le théorème de Fekete et Szegő (1955) concerne l'existence d'entiers algébriques dont tous les conjugués appartiennent à une partie S du plan complexe qui est compacte et symétrique par rapport à l'axe réel. Si la capacité logarithmique de cette partie est strictement négative, il n'y en a qu'un nombre fini ; si elle est positive, tout voisinage en contient une infinité. Si elle est nulle, on peut ajouter que ces points (et leurs conjugués) s'équidistribuent vers la mesure d'équilibre de cette partie (Serre, 2019, théorème 1.2.6).

Ces énoncés admettent des variantes sur des variétés algébriques de dimension arbitraire, et la théorie des corps globalement valués les éclaire d'un jour nouveau : ces théorèmes deviennent un simple cas particulier du théorème 3.5.1 que $\overline{\mathbf{Q}}$ est un corps globalement valué existentiellement clos. Cependant, les démonstrations ne sont pas tout à fait nouvelles, car les techniques mises en œuvre sont parallèles à celles des théorèmes initiaux, ou de leurs extensions via la géométrie d'Arakelov et l'utilisation de théorèmes comme l'inégalité (3.5.4).

La théorie des corps globalement valués pose également de nouvelles questions. Si K est un corps globalement valué, on peut considéré le 1-type p des points de hauteur 0. Les résultats que je viens d'évoquer donnent accès à sa partie « sans quantificateurs » p_{sq}.

Dans le cas purement non archimédien, les éléments x de K tels que $\mathrm{ht}(x) = 0$ forment alors un sous-corps k de K et ce type p_{sq} se décrit en termes du type générique sur k. Dans le cas arithmétique, lorsque $\mathrm{K} = \mathbf{Q}$ est muni de sa structure standard, le théorème d'équidistribution de Bilu (1997) s'incarne de la façon suivante : ce type sans quantificateur est constitué de l'origine, des racines de l'unité et d'un unique type sans quantificateur auxiliaire. En insérant dans la démonstration les arguments du théorème 1.2.6 de Serre (2019), on obtient d'ailleurs un résultat analogue pour la fonction hauteur associée à un compact de $\mathbf{C}$ par la théorie du potentiel en remplaçant $\sup(1, \log(x))$ par la fonction de Green de ce compact.

De même, ces travaux ouvrent la voie à une étude des hauteurs sur les variétés abéliennes sur les corps globalement valués, parallèle à celle qui est faite sur les corps de type fini et à la recherche d'analogues des théorèmes classiques, comme celui (Lang, Néron) qui décrit les points de hauteur nulle sur une variété abélienne définie sur un corps de type fini.

Ces travaux ouvrent enfin de nombreuses questions de théorie des modèles : stabilité, rangs, imaginaires…

Références

Suren Yurievich Arakelov (1974). « Intersection theory of divisors on an arithmetic surface », *Mathematics of the USSR-Izvestiya* **8** (6), p. 1167-1180.

Emil Artin et George Whaples (1945). « Axiomatic characterization of fields by the product formula for valuations », *Bulletin of the American Mathematical Society* **51** (7), p. 469-492.

Itaï Ben Yaacov (2008). « Continuous first order logic for unbounded metric structures », *Journal of Mathematical Logic* **08** (02), p. 197-223.

Itaï Ben Yaacov, Alexander Berenstein, C. Ward Henson et Alexander Usvyatsov (2008). « Model theory for metric structures », in : *Model Theory with Applications to Algebra and Analysis*. Sous la dir. de Zoe Chatzidakis, Dugald Macpherson, Anand Pillay et Alex Wilkie. Cambridge : Cambridge University Press, p. 315-427.

Itaï Ben Yaacov, Pablo Destic, Ehud Hrushovski et Michał Szachniewicz (2024). *Globally valued fields : foundations*. arXiv : 2409.04570 [math]. URL : http://arxiv.org/abs/2409.04570 (visité le 08/03/2025). Prépubl.

Itaï Ben Yaacov et Ehud Hrushovski (2022). *Globally valued function fields : existential closure*. arXiv : 2212.07269 [math]. URL : http://arxiv.org/abs/2212.07269 (visité le 01/05/2025). Prépubl.

Vladimir G. Berkovich (1990). *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*. Mathematical Surveys and Monographs 33. Providence, RI : American Mathematical Society. x+169.

Yuri Bilu (1997). « Limit distribution of small points on algebraic tori », *Duke Mathematical Journal* **89** (3), p. 465-476.

Jean-Benoît Bost (1999). « Potential theory and Lefschetz theorems for arithmetic surfaces », *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* **32** (2), p. 241-312.

Sébastien Boucksom, Jean-Pierre Demailly, Mihai Păun et Thomas Peternell (2013). « The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension », *Journal of Algebraic Geometry* **22** (2), p. 201-248.

Sébastien Boucksom, Charles Favre et Mattias Jonsson (2008). « Differentiability of volumes of divisors and a problem of Teissier », *Journal of Algebraic Geometry* **18** (2), p. 279-308.

N. Bourbaki (2006). *Algèbre commutative : Chapitres 5 à 7*. Éléments de mathématique. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag.

——— (2007a). *Algèbre : Chapitres 4 à 7*. Éléments de mathématique. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag.

——— (2007b). *Topologie générale : Chapitres 5 à 10*. Éléments de mathématique. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag.

Chen Chung Chang et H. Jerome Keisler (1966). *Continuous model theory*. T. 58. Ann. Math. Stud. Princeton University Press, Princeton, NJ.

François Charles (2021). « Arithmetic ampleness and an arithmetic Bertini theorem », *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* **54** (6), p. 1541-1590.

Huayi Chen (2010). « Arithmetic Fujita approximation », *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* **43** (4), p. 555-578.

——— (2011). « Differentiability of the arithmetic volume function », *Journal of the London Mathematical Society* **84** (2), p. 365-384.

Huayi Chen et Atsushi Moriwaki (2020). *Arakelov geometry over adelic curves*. Lecture Notes in Mathematics 2258. Singapore : Springer Singapore.

Steven Dale Cutkosky (2014). « Asymptotic multiplicities of graded families of ideals and linear series », *Advances in Mathematics* **264**, p. 55-113.

Steven Dale Cutkosky (2015). « Teissier's problem on inequalities of nef divisors », *Journal of Algebra and Its Applications* **14** (09), p. 1540002-1-11.

Nguyen-Bac Dang et Charles Favre (2022). « Intersection theory of nef b-divisor classes », *Compositio Mathematica* **158** (7), p. 1563-1594.

Aise Johan de Jong (1996). « Smoothness, semistability and alterations », *Publications mathématiques de l'IHÉS* **83**, p. 51-93.

Gerd Faltings (1992). *Lectures on the arithmetic Riemann-Roch theorem.* T. 127. Annals of Mathematics Studies. Princeton, NJ : Princeton University Press. x+100.

Michael Fekete et Gábor Szegő (1955). « On algebraic equations with integral coefficients whose roots belong to a given point set », *Mathematische Zeitschrift* **63** (1), p. 158-172.

Pierre de Fermat (1894). *Œuvres de Fermat. Correspondance.* Sous la dir. de Paul Tannery et Charles Henry. T. 2. 5 t. Paris : Gauthier-Villars.

Takao Fujita (1994). « Approximating Zariski decomposition of big line bundles », *Kodai Mathematical Journal* **17** (1), p. 1-3.

Henri Gillet et Christophe Soulé (1990). « Arithmetic intersection theory », *Publications mathématiques de l'IHÉS* **72** (1), p. 94-174.

Walter Gubler (1997). « Heights of subvarieties over M-fields ». In : *Arithmetic geometry.* Sous la dir. de F. Catanese. Symposia Mathematica 37. Cortona, Arezzo, Italy : Cambridge University Press, p. 190-227.

Roland Huber (2013). *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces.* Aspects of Mathematics E30. Wiesbaden : Vieweg.

Hideaki Ikoma (2015). « On the concavity of the arithmetic volumes », *International Mathematics Research Notices* **2015** (16), p. 7063-7109.

Robert Lazarsfeld (2004). *Positivity in algebraic geometry I.* T. 1. Classical Setting : Line Bundles and Linear Series. 2 t. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 48. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg. xviii+387 p.

Robert Lazarsfeld et Mircea Mustață (2009). « Convex bodies associated to linear series », *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* **42** (5), p. 783-835.

Thibaud Lemanissier et Jérôme Poineau (2024). *Espaces de Berkovich globaux : catégorie, topologie, cohomologie.* Progress in Mathematics 353. Cham : Springer Nature Switzerland.

Louis J. Mordell (1922). « On the Rational Solutions of the Indeterminate Equations of the Third and Fourth Degrees », *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **21**, p. 179-192.

Atsushi Moriwaki (2009). « Continuous extension of arithmetic volumes », *International Mathematics Research Notices* **2009** (19), p. 3598-3638.

Douglas G. Northcott (1950). « Periodic Points on an Algebraic Variety », *The Annals of Mathematics* **51** (1), p. 167. JSTOR : 1969504.

Binggang Qu et Hang Yin (2024). « Arithmetic Demailly approximation theorem », *Advances in Mathematics* **458**, p. 109961.

Antoine Sédillot (2024). *Pseudo-absolute values : foundations*. arXiv : 2411.03905 [math]. URL : http://arxiv.org/abs/2411.03905 (visité le 30/05/2025). Prépubl.

Jean-Pierre Serre (2019). « Distribution asymptotique des valeurs propres des endomorphismes de Frobenius [d'après Abel, Chebyshev, Robinson,...] » In : *Séminaire Bourbaki 2017/2018*. Astérisque 414, p. 379-425.

Vyacheslav Vladimirovich Shokurov (1996). « 3-Fold log models », *Journal of Mathematical Sciences* **81** (3), p. 2667-2699.

Michał Szachniewicz (2023). *Existential closedness of $\overline{\mathbb{Q}}$ as a globally valued field via Arakelov geometry*. arXiv : 2306.06275 [math]. URL : http://arxiv.org/abs/2306.06275 (visité le 08/03/2025). Prépubl.

Satoshi Takagi (2007). « Fujita's approximation theorem in positive charactristics », *Kyoto Journal of Mathematics* **47** (1).

Paul Vojta (1987). *Diophantine approximations and value distribution theory*. Lecture Notes in Mathematics 1239. Berlin : Springer-Verlag. x+132.

André Weil (1928). « L'arithmétique sur les courbes algébriques », *Acta Mathematica* **52**, p. 281-315.

——— (1951). « Arithmetic on algebraic varieties », *Annals of Mathematics* **53** (3), p. 412-444. JSTOR : 1969564.

Robert Wilms (2022). *On the irreducibility and distribution of arithmetic divisors*. arXiv : 2211.03766 [math]. URL : http://arxiv.org/abs/2211.03766 (visité le 12/05/2025). Prépubl.

Xinyi Yuan (2008). « Big line bundles over arithmetic varieties », *Inventiones mathematicae* **173** (3), p. 603-649.

Shou-Wu Zhang (1995). « Positive line bundles on arithmetic varieties », *jamem* **8**, p. 187-221.

Antoine Chambert-Loir

Université Paris Cité, IMJ-PRG
8 place Aurélie Nemours, 75013 Paris
E-mail : antoine.chambert-loir@u-paris.fr