

SUR LES PSEUDO-ROTATIONS ANALYTIQUES DE SURFACES [d’après Berger]

par Anna Florio

Introduction

Quand on étudie un système dynamique, l’une des premières notions auxquelles nous pouvons nous intéresser est celle de points périodiques. Pour une dynamique discrète sur un ensemble X , c’est-à-dire donnée par les itérés d’une même application $f: X \rightarrow X$, un point $x \in X$ est dit *périodique* de période $n \in \mathbb{N}, n > 0$, si

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}(x) = x.$$

Si les orbites périodiques peuvent aider à étudier le système, il est néanmoins intéressant de se demander ce qui se passe loin de tels points.

En dimension 2, les exemples les plus simples de systèmes sans point périodique, ou avec un nombre fini de points périodiques, sont les rotations d’angles irrationnels sur certaines surfaces. Plus précisément, nous considérons des surfaces qui admettent une action du cercle $\mathbb{S}^1$. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; nous pouvons alors considérer :

- la rotation $R_\alpha^{\mathbb{A}}$ sur l’anneau $\mathbb{A} := \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, qui est l’application

$$(\theta, y) \in \mathbb{A} \mapsto (\theta + \alpha, y) \in \mathbb{A};$$

- la rotation $R_\alpha^{\mathbb{S}^2}$ sur la sphère $\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \sum_{i=1}^3 x_i^2 = 1\}$, autour de l’axe x_3 , qui est l’application

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \mapsto (\cos(\alpha)x_1 + \sin(\alpha)x_2, -\sin(\alpha)x_1 + \cos(\alpha)x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2;$$

- la rotation $R_\alpha^{\mathbb{D}^2}$ sur le disque $\mathbb{D}^2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, autour de l’origine, qui est l’application

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{D}^2 \mapsto (\cos(\alpha)x_1 + \sin(\alpha)x_2, -\sin(\alpha)x_1 + \cos(\alpha)x_2) \in \mathbb{D}^2.$$

Ces rotations ont respectivement : aucun point périodique, exactement deux points périodiques, exactement un point périodique. Leurs dynamiques sont très simples à comprendre : chaque surface, privée de ces points, admet une partition en courbes invariantes, difféomorphes au cercle. Ces dynamiques ne sont pas transitives, ni ergodiques

par rapport à la mesure de Lebesgue⁽¹⁾. Ces exemples motivent la question suivante : l’absence (ou le peu) de points périodiques est-elle synonyme de « dynamique simple » ?

Ceci n’est pas le cas. Dans les années 1970, Anosov et Katok (1970) construisent le premier exemple de difféomorphisme de l’anneau borné $\mathbb{A}_0 := \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-1, 1]$ qui est : lisse (c’est-à-dire C^∞), conservatif (c’est-à-dire qui préserve l’aire), préservant l’orientation, sans points périodiques et transitif. Nous décrirons la construction de l’exemple d’Anosov–Katok dans la section 2 ; pour le moment, précisons simplement qu’un difféomorphisme f est dit *transitif* s’il possède une orbite dense, c’est-à-dire s’il existe un point $x \in \mathbb{A}_0$ tel que l’adhérence de son orbite

$$\mathcal{O}_x^f := \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$$

dans $\mathbb{A}_0$ est égale à $\mathbb{A}_0$.

Introduisons maintenant la définition de *conjugaison*. Étant donné des difféomorphismes f et g d’une surface orientable $\mathbb{M}$, nous disons que f est C^0 -conjugué à g s’il existe un homéomorphisme h de la surface $\mathbb{M}$ qui préserve l’aire et l’orientation, et tel que

$$f = h^{-1} \circ g \circ h.$$

Le difféomorphisme h est alors appelé *conjugaison*. La relation de conjugaison entre difféomorphismes est une relation d’équivalence : étant donné un difféomorphisme g , sa *classe de conjugaison* est donc l’ensemble de tous les difféomorphismes qui sont C^0 -conjugués à g .

Or, la transitivité est préservée par conjugaison : si f est C^0 -conjugué à g et si f est transitif, alors g aussi est transitif. Comme la rotation d’angle α restreinte à l’anneau $\mathbb{A}_0$ n’est pas transitive, l’exemple d’Anosov–Katok n’est pas conjugué à une telle rotation. L’exemple d’Anosov–Katok s’adapte aussi pour des difféomorphismes de la sphère $\mathbb{S}^2$ et du disque $\mathbb{D}^2$.

Notre question sur la relation entre absence de points périodiques et dynamique simple a donc une réponse négative. Qu’est-ce que se passe si l’on ajoute de la « structure » à notre difféomorphisme ? La conjecture suivante de Birkhoff, énoncée en 1941, suggère que tout difféomorphisme analytique sans point périodique possède une dynamique simple. Pour une surface $\mathbb{M}$ parmi l’anneau, la sphère et le disque, un *symplectomorphisme* f de $\mathbb{M}$ est un difféomorphisme qui préserve l’aire et l’orientation.

CONJECTURE 0.1 (Birkhoff, 1941). — *Tout symplectomorphisme analytique de l’anneau $\mathbb{A}_0$ sans points périodiques est C^0 -conjugué à une rotation d’angle irrationnel. De même, tout symplectomorphisme analytique de la sphère $\mathbb{S}^2$ avec exactement deux points périodiques est C^0 -conjugué à une rotation d’angle irrationnel.*

Le but de ce texte est de présenter les résultats de Berger (2022, 2024) qui ont récemment réfuté la conjecture de Birkhoff.

1. Ces définitions seront précisées plus loin, voir Section 2.

THÉORÈME 0.2 (Berger, 2022). — *Il existe un symplectomorphisme analytique de l’anneau (resp. de la sphère, resp. du disque) sans points périodiques (resp. avec exactement deux points périodiques, resp. avec exactement un point périodique) qui n’est C^0 -conjugué à aucune rotation d’angle irrationnel.*

En fait, les travaux de Berger permettent d’obtenir des résultats plus forts concernant les types de dynamiques qui sont réalisables au sein des symplectomorphismes analytiques sans (ou avec peu de) points périodiques, comme nous allons le voir dans la sous-section 3.3.

Remerciements

Je suis très reconnaissante à Pierre Berger pour toutes les réponses à mes questions, ainsi qu’à Guillaume Carlier, Antonin Chambolle, Jacques Fejoz, Martin Leguil et Yating Liu pour leurs explications. Je remercie Pierre Berger et Nicolas Bourbaki pour leur relecture.

1. Quelques notations, définitions et rappels

Même si les exemples de dynamiques que nous allons construire peuvent se réaliser aussi sur la sphère et sur le disque, par souci de clarté de la présentation, nous allons travailler dans l’anneau borné $\mathbb{A}_0 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-1, 1]$, qui est plongé dans l’anneau $\mathbb{A} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. On considère la forme symplectique $\Omega = d\theta \wedge dy$, qui est donc une 2-forme fermée, non dégénérée. Notons Leb la mesure de Lebesgue sur l’anneau, associée à la forme d’aire Ω . Quand on se restreint à l’anneau borné $\mathbb{A}_0$, on désigne par $\text{Leb}_{\mathbb{A}_0}$ la mesure

$$\text{Leb}_{\mathbb{A}_0} := \frac{1}{\text{Leb}(\mathbb{A}_0)} \text{Leb}|_{\mathbb{A}_0}.$$

L’ensemble des symplectomorphismes lisses de l’anneau $\mathbb{A}$ est l’ensemble des difféomorphismes lisses de $\mathbb{A}$ qui préservent l’orientation ainsi que l’aire. En particulier, pour un tel difféomorphisme f , on a $f^*\Omega = \Omega$. Notons $\text{Symp}^\infty(\mathbb{A})$ l’ensemble des symplectomorphismes lisses de l’anneau. Parmi $\text{Symp}^\infty(\mathbb{A})$, nous considérons aussi le sous-groupe des difféomorphismes hamiltoniens, noté $\text{Ham}^\infty(\mathbb{A})$.

Pour les définir, on considère une famille lisse⁽²⁾ $(H_t)_{t \in [0,1]}$ de fonctions $H_t : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la condition suivante est satisfaite. Pour chaque H_t , on définit le champ de vecteurs hamiltonien X_t associé en imposant

$$\iota_{X_t}\Omega := \Omega(X_t, \cdot) = dH_t;$$

l’isotopie hamiltonienne associée est alors la famille de symplectomorphismes $(f_t)_{t \in [0,1]}$ telle que $f_0 = \text{Id}_{\mathbb{A}}$ et

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f_{t+s} \circ f_t^{-1} = X_t.$$

2. C’est-à-dire C^∞ en t et en $x \in \mathbb{A}$, par rapport à la topologie C^∞ .

Un symplectomorphisme $f \in \text{Symp}^\infty(\mathbb{A})$ est hamiltonien s'il existe une isotopie hamiltonienne $(f_t)_{t \in [0,1]}$ telle que $f_1 = f$.

Exemple 1.1. — Un exemple de difféomorphisme $f \in \text{Symp}^\infty(\mathbb{A}) \setminus \text{Ham}^\infty(\mathbb{A})$ est l'application

$$(\theta, y) \in \mathbb{A} \mapsto (\theta, y + y_0) \in \mathbb{A},$$

pour un certain $y_0 \in \mathbb{R}$ fixé. Ceci peut se voir de la façon suivante. On peut définir une application $Flux$ du groupe fondamental du groupe des difféomorphismes symplectiques isotopes à l'identité, dans la première classe d'homologie de la variété : le noyau de l'application $Flux$ est le groupe des isotopies hamiltoniennes. Autrement dit, une isotopie symplectique est hamiltonienne si et seulement si son $Flux$ est nul. On renvoie à Viterbo (1991).

Parmi les difféomorphismes hamiltoniens, dans la suite on travaille avec un sous-ensemble : on considère les difféomorphismes hamiltoniens à support compact. Il s'agit de l'ensemble, noté $\text{Ham}_0^\infty(\mathbb{A})$, des difféomorphismes hamiltoniens qui peuvent être obtenus à partir d'une famille lisse de fonctions hamiltoniennes $(H_t)_{t \in [0,1]}$ telle que, pour tout t , la fonction H_t a son support contenu dans $\mathbb{T} \times]-1, 1[= \text{int}(\mathbb{A}_0)$ ⁽³⁾.

1.1. Définition des pseudo-rotations et quelques propriétés

On précise maintenant la définition des pseudo-rotations sur l'anneau, la sphère et le disque.

DÉFINITION 1.2. — Une pseudo-rotation de l'anneau $\mathbb{A}_0$ est un symplectomorphisme de $\mathbb{A}_0$ sans points périodiques.

Une pseudo-rotation de la sphère $\mathbb{S}^2$ est un symplectomorphisme de $\mathbb{S}^2$ qui a exactement deux points périodiques.

Une pseudo-rotation du disque $\mathbb{D}^2$ est un symplectomorphisme de $\mathbb{D}^2$ qui a précisément un point périodique.

Le nombre de points périodiques d'une pseudo-rotation est en effet le nombre minimal de points périodiques qu'on peut avoir. Par exemple, dans le cas de la sphère, grâce à la formule de Poincaré–Lefschetz, tout homéomorphisme de $\mathbb{S}^2$ a au moins un point fixe P ; si, par l'absurde, il n'y a pas d'autres points périodiques, la dynamique sur $\mathbb{S} \setminus \{P\}$ (quitte à passer par une projection stéréographique) est alors un homéomorphisme de Brouwer du plan, c'est-à-dire un homéomorphisme du plan, sans point fixe, préservant l'orientation. Ceci impliquerait que tout point est errant (c'est-à-dire possède un voisinage qui est disjoint de toutes ses itérés) et contredirait l'hypothèse de conservation de l'aire. On renvoie à Crovisier (2006).

Si l'on pense donc à une pseudo-rotation comme à un symplectomorphisme ayant le nombre minimal de points périodiques, la définition peut s'étendre aussi en dimension

3. La notation $\text{int}(U)$ dénote l'intérieur d'un ensemble U .

supérieure. Étant donné une variété symplectique fermée⁽⁴⁾ $(\mathbb{M}, \omega)$, une possible définition de pseudo-rotation sur $\mathbb{M}$ est un difféomorphisme hamiltonien de $\mathbb{M}$ avec un nombre fini de points périodiques (nombre qui est minimal parmi ceux des points périodiques possibles pour un difféomorphisme hamiltonien). Parmi les variétés symplectiques qui peuvent admettre une pseudo-rotation, on a notamment les variétés symplectiques *toriques*, c'est-à-dire munies d'une action du tore de dimension n , où $2n$ est la dimension de la variété. Nous renvoyons à Ginzburg et Gürel (2018) ou Le Roux et Seyfaddini (2022) pour plus de détails.

Remarque 1.3. — Dans le cadre de la conjecture de Birkhoff, il est essentiel, dans la définition 1.2, de considérer des applications qui préservent l'aire. En effet, il est facile de construire un difféomorphisme dissipatif (c'est-à-dire ne conservant pas l'aire) de l'anneau, du disque ou de la sphère, possédant un nombre fini de points périodiques, qui n'est conjugué à aucune rotation. Un exemple classique est fourni par une dynamique de type nord-sud sur la sphère : il s'agit d'une dynamique sur $\mathbb{S}^2$ possédant exactement deux points fixes, notés S et N , et telle que tout point de la sphère distinct de S et N converge vers S dans le futur (donc S est un point attractif) et vers N dans le passé (ce qui fait de N un point répulsif).

Un résultat de Franks (1992) montre que tout homéomorphisme conservatif de l'anneau a soit une infinité de points périodiques, soit aucun point périodique. Pour des surfaces de genre au moins 2, Franks et Handel (2003) montrent que tout difféomorphisme hamiltonien non trivial a une infinité de points périodiques : sur les surfaces de genre au moins 2, il ne peut pas exister de pseudo-rotations. Dans le même article, la dichotomie « 2 ou ∞ » est montrée pour les difféomorphismes hamiltoniens de la sphère.

L'entropie topologique est une quantité qui mesure une certaine forme de complexité dynamique d'un système (on renvoie à Katok (1980) pour une définition précise) : Katok (1980) montre qu'un difféomorphisme de classe $C^{1+\alpha}$ d'une surface possède une entropie topologique positive si et seulement s'il admet une infinité de points périodiques. Il en résulte que toute pseudo-rotation de classe $C^{1+\alpha}$ sur une surface est nécessairement d'entropie topologique nulle.

Soit f une pseudo-rotation de l'anneau $\mathbb{A}_0$. On définit alors le *nombre de rotation* de f comme suit : soit $F: \mathbb{R} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [-1, 1]$ un relevé de f ⁽⁵⁾ et notons $p_1: \mathbb{R} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la projection sur la première coordonnée. Soit $(\Theta, y) \in \mathbb{R} \times [-1, 1]$ et considérons la suite

$$\left(\frac{p_1 \circ F^n(\Theta, y) - \Theta}{n} \right)_{n \geq 1}.$$

Cette suite converge vers un nombre $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, qui ne dépend pas du point (Θ, y) : voir par exemple Franks (1988). Le *nombre de rotation* de f est la partie fractionnaire de ρ .

4. Compacte, sans bord.

5. Un relevé de f est une application $F: \mathbb{R} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [-1, 1]$ telle que $\pi \circ F = f \circ \pi$, où π est le revêtement universel de l'anneau.

1.2. Topologie

Dans la suite, on construit des suites de symplectomorphismes convergentes : ceci demande de préciser la topologie dans laquelle on va travailler. On considère l'espace des difféomorphismes de classe C^∞ sur l'anneau $\mathbb{A} = \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ muni de la topologie compacte-ouverte des applications C^∞ de l'anneau dans l'anneau. Cette topologie est la réunion des topologies induites par les inclusions $C^\infty(\mathbb{A}, \mathbb{A}) \hookrightarrow C^r(\mathbb{A}, \mathbb{A})$, avec $C^r(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ muni de la topologie compacte-ouverte, pour tout r fini. Il s'agit alors d'une variété de Fréchet modelée sur des espaces de Fréchet et on peut définir une distance d_{C^∞} qui induit la topologie de $C^\infty(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ de la façon suivante.

DÉFINITION 1.4 (Distance d_{C^∞}). — *Munissons $\mathbb{A}$ de la norme standard $\|\cdot\|$. Pour tout $n \geq 0$, soit $\mathbb{A}_n := \mathbb{T} \times [-n, n]$ et définissons une semi-norme p_n sur $C^\infty(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ en posant*

$$p_n : f \mapsto p_n(f) := \sup_{k \leq n} \sup_{x \in \mathbb{A}_n} \|D^k f(x)\|.$$

La distance d_{C^∞} sur $C^\infty(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ est définie comme

$$d_{C^\infty}(f, g) := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} \min(p_n(f - g), 1).$$

L'espace des difféomorphismes $C^\infty(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ muni de cette distance est complet.

1.3. Transitivité et ergodicité

Dans la suite, il y aura deux notions dynamiques qui seront largement utilisées pour des difféomorphismes de l'anneau borné $\mathbb{A}_0$: la notion de transitivité et la notion d'ergodicité.

DÉFINITION 1.5. — *Un difféomorphisme $f : \mathbb{A}_0 \rightarrow \mathbb{A}_0$ est transitif s'il existe un point $x \in \mathbb{A}_0$ tel que* ⁽⁶⁾

$$\text{Ad}(\{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}) = \mathbb{A}_0.$$

De façon équivalente, si un difféomorphisme est transitif, pour tout couple (U, V) d'ouverts de l'anneau et pour tout $N \geq 0$, il existe $n \geq N$ tel que $f^n(U)$ rencontre V .

Pour définir l'ergodicité, il faut d'abord choisir une mesure de référence : dans notre cas, on parle toujours d'ergodicité par rapport à la mesure de Lebesgue $\text{Leb}_{\mathbb{A}_0}$. Étant donné un symplectomorphisme f de $\mathbb{A}$ qui préserve $\mathbb{A}_0$, la mesure $\text{Leb}_{\mathbb{A}_0}$ est une mesure de probabilité f -invariante. Nous considérons alors l'ensemble $\mathcal{M}$ des mesures de probabilités sur $\mathbb{A}_0$ qui sont f -invariantes, muni de la topologie faible-*. Rappelons qu'une suite de mesures $(\mu_n)_n \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ converge en topologie faible-* vers une mesure $\mu \in \mathcal{M}$ si pour toute fonction continue bornée $\phi : \mathbb{A}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{A}_0} \phi d\mu_n = \int_{\mathbb{A}_0} \phi d\mu.$$

6. La notation $\text{Ad}(U)$ dénote l'adhérence d'un ensemble U .

L'ensemble $\mathcal{M}$ est alors compact par rapport à cette topologie. La distance de Wasserstein-1 ou simplement de Wasserstein (qu'on notera $\mathcal{W}$) induit cette topologie, et de plus l'espace $(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ est complet. Rappelons que la distance de Wasserstein $\mathcal{W}$ est définie comme suit : étant donné d la distance canonique sur $\mathbb{A}_0$ (c'est-à-dire celle induite par le revêtement euclidien $\mathbb{R} \times [-1, 1]$), on a

$$\mathcal{W}(\mu, \nu) := \inf_{\eta} \int_{\mathbb{A}_0 \times \mathbb{A}_0} d(x, y) d\eta(x, y),$$

où la borne inférieure est prise sur les mesures de probabilités η sur le produit $\mathbb{A}_0 \times \mathbb{A}_0$ dont la loi marginale par rapport à la première variable est μ et la loi marginale par rapport à la deuxième est ν . De façon intuitive, on peut penser à $\mathcal{W}(\mu, \nu)$ comme le « coût » en termes de distance entre points pour transporter la mesure μ vers la mesure ν .

Étant donné la dynamique f et un point $x \in \mathbb{A}_0$, on peut alors définir, pour tout $N \geq 1$, la mesure N -empirique de x comme

$$e_N^f(x) := \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \delta_{f^i(x)},$$

où δ_x est la mesure de Dirac centrée au point x . Dire que le système est ergodique, c'est dire que l'orbite de presque tout point $x \in \mathbb{A}_0$ s'équidistribue sur l'anneau sous l'action de la dynamique. Plus précisément :

DÉFINITION 1.6. — *Un symplectomorphisme $f \in \text{Symp}^\infty(\mathbb{A})$ qui préserve l'anneau borné $\mathbb{A}_0$ est ergodique par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{A}_0$, notée $\text{Leb}_{\mathbb{A}_0}$, si, pour $\text{Leb}_{\mathbb{A}_0}$ -presque tout point $x \in \mathbb{A}_0$, la suite des mesures N -empiriques $(e_N^f(x))_{N \geq 1}$ converge en topologie faible-* vers la mesure $\text{Leb}_{\mathbb{A}_0}$.*

Remarque 1.7. — On vérifie sans grande difficulté que si f est ergodique par rapport à la mesure de Lebesgue, alors f est transitif. La réciproque est fausse en général.

2. Pseudo-rotations lisses : l'exemple d'Anosov–Katok et la méthode AVC

Avant de parler de pseudo-rotations analytiques, on commence par présenter la construction d'Anosov–Katok, qui sera le point de départ pour obtenir les résultats de Berger (2022, 2024). Le symplectomorphisme final est obtenu comme limite d'une suite de Cauchy de symplectomorphismes, construits de façon récursive à partir d'une certaine rotation $R_\alpha = R_\alpha^{\mathbb{A}}$ via des conjugaisons successives : cette méthode d'« Approximation Via Conjugaison », qu'on raccourcit comme AVC⁽⁷⁾, a permis d'obtenir des exemples de pseudo-rotations avec différentes propriétés dynamiques. Dans la sous-section 2.2, un petit survol de ces résultats est présenté.

7. En anglais, la terminologie standard est *Approximation by Conjugacy*, souvent abrégée en AbC.

2.1. Construction de pseudo-rotations lisses

Le but de cette sous-section est de montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 2.1 (Anosov et Katok, 1970). — *Il existe $f \in \text{Symp}^\infty(\mathbb{A})$ tel que :*

- $f(\mathbb{A}_0) = \mathbb{A}_0$;
- $f|_{\mathbb{A}_0}$ est ergodique par rapport à $\text{Leb}_{\mathbb{A}_0}$;
- $f|_{\mathbb{A}_0}$ est sans points périodiques.

Pour construire une telle f , on produit une suite $(g_n)_{n \geq 0} \in (\text{Ham}_0^\infty(\mathbb{A}))^\mathbb{N}$ et une suite $(\alpha_n = \frac{p_n}{q_n})_{n \geq 0} \in \mathbb{Q}^\mathbb{N}$ pour que la suite $(f_n)_{n \geq 0} \in (\text{Ham}^\infty(\mathbb{A}))^\mathbb{N}$ définie par

$$f_n := g_n \circ R_{\alpha_n} \circ g_n^{-1}$$

converge (pour la distance d_{C^∞}) vers un symplectomorphisme f avec les propriétés souhaitées.

Rappelons que $R_{\alpha_n}(\theta, y) = (\theta + \alpha_n, y)$. La suite $(g_n)_{n \geq 0}$ est construite de façon récursive, en demandant de plus en plus de propriétés afin d'assurer que le symplectomorphisme final f soit ergodique (par rapport à la mesure de Lebesgue) sur $\mathbb{A}_0$. La suite dont la limite donne l'application f est construite via des conjugaisons des rotations, ce qui justifie le nom d'*approximation via conjugaison* pour la méthode qui produit le difféomorphisme f .

Notation. Pour tout $\varepsilon > 0$ nous notons $\mathbb{A}_\varepsilon := \mathbb{T} \times [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$. Soit $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum_n \varepsilon_n < 1$.

Le lemme de récursion clé que nous allons utiliser est le suivant.

LEMME 2.2. — *Il existe une suite $(\alpha_n = \frac{p_n}{q_n})_n \in \mathbb{Q}^\mathbb{N}$, qui converge vers un nombre irrationnel, et une suite $(g_n)_n \in (\text{Ham}_0^\infty(\mathbb{A}))^\mathbb{N}$, telles que la suite $(f_n)_n$ définie par*

$$f_n = g_n \circ R_{\alpha_n} \circ g_n^{-1}$$

possède les propriétés suivantes :

1. *Pour tout $x \in g_n(\mathbb{A}_{\varepsilon_n})$, la mesure empirique $e^{f_n}(x) = \frac{1}{q_n} \sum_{i=0}^{q_n-1} \delta_{f_n^i(x)}$ satisfait*

$$\mathcal{W}(e^{f_n}(x), \text{Leb}_{\mathbb{A}_0}) < \varepsilon_n ;$$

2. *Pour tout $x \in \mathbb{A}$ et pour tout $1 \leq k \leq q_{n-1}$, on a*

$$\mathcal{W}(e_k^{f_n}(x), e_k^{f_{n-1}}(x)) < \varepsilon_n ;$$

3. *Pour tout $k \leq n-1$ la valeur $p_k(f_n - f_{n-1})$ est plus petite que ε_n ;*

4. *Pour tout $x \in \mathbb{A}_0$ et pour tout $0 < k < q_{n-1}$, on a*

$$d(f_n^k(x), x) > d(f_{n-1}^k(x), x) \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) .$$

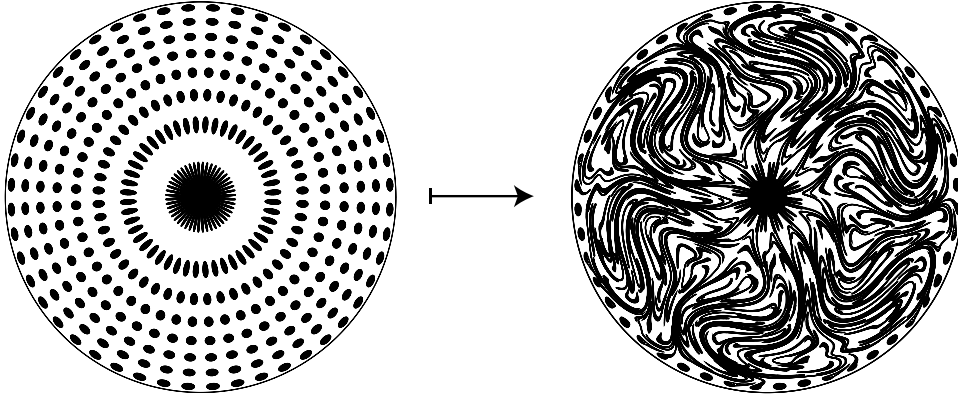


FIGURE 1. Une étape du schéma-AVC : une application f_n . Image réalisée par Pierre Berger.

Preuve du théorème 2.1 à partir du lemme 2.2. — Supposons avoir déjà construit une suite de fonctions $(f_n)_n$ qui satisfait les propriétés du lemme 2.2. Comme la suite $(\alpha_n = \frac{p_n}{q_n})_n$ construite dans le lemme 2.2 converge vers un nombre irrationnel, on a $q_n \rightarrow +\infty$. Le premier point à montrer est la convergence de la suite elle-même par rapport à la topologie C^∞ . L'espace des symplectomorphismes $\text{Symp}^\infty(\mathbb{A})$ est complet par rapport à la distance d_{C^∞} : il suffit donc de montrer que la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy par rapport à cette distance. Ceci se déduit du point 3 du lemme 2.2, car on a

$$d_{C^\infty}(f_n, f_{n-1}) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{p_i(f_n - f_{n-1})}{2^i} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon_n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq 2\varepsilon_n + \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-2}},$$

où on utilise le fait que $\sum_n \varepsilon_n < 1$.

Notons alors $f \in \text{Symp}^\infty(\mathbb{A})$ le difféomorphisme limite de la suite $(f_n)_n$. On remarque que, *a priori*, il n'est pas garanti que le difféomorphisme f soit hamiltonien, mais, grâce à la régularité de la mesure de Lebesgue, f préserve $\text{Leb}_{\mathbb{A}_0}$.

Observons que tout f_n préserve l'anneau $\mathbb{A}_0$: ceci vient du fait que chaque rotation R_{α_n} le préserve et que g_n est l'identité sur l'adhérence du complémentaire de $\mathbb{A}_0$.

On veut maintenant montrer que $f|_{\mathbb{A}_0}$ est ergodique par rapport à $\text{Leb}_{\mathbb{A}_0}$. Plus précisément, on montre qu'il existe $B \subset \mathbb{A}_0$ de mesure pleine tel que pour tout $x \in B$, la suite de mesures empiriques $(e_N^f(x))_{N \geq 1}$ converge en topologie faible-* vers $\text{Leb}_{\mathbb{A}_0}$. Construisons d'abord B : comme, pour tout k , on a $\text{Leb}_{\mathbb{A}_0}(g_k(\mathbb{A}_k)) = \text{Leb}_{\mathbb{A}_0}(\mathbb{A}_k) = 1 - 2\varepsilon_k$, en appliquant le lemme de Borel–Cantelli, on déduit que l'ensemble

$$B := \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{k \geq n} g_k(\mathbb{A}_k) \subset \mathbb{A}_0$$

est de complémentaire négligeable par rapport à $\text{Leb}_{\mathbb{A}_0}$. Soit $x \in B$: il existe $n \geq 0$ tel que pour tout $k \geq n$ on ait $x \in g_k(\mathbb{A}_k)$. On montre alors que $(e_{q_{n-1}}^f(x))_n$ converge en topologie faible-* vers $\text{Leb}_{\mathbb{A}_0}$. Grâce au point 2 du lemme 2.2, on sait que la suite $(e_{q_{n-1}}^{f_n}(x))_n$ est une suite de Cauchy, asymptotique à $(e_{q_{n-1}}^f(x))_n$, car l'espace des mesures

de probabilités invariantes est complet par rapport à la distance de Wasserstein. De plus, grâce aux points 1 et 2, nous déduisons que, pour n assez grand,

$$\mathcal{W}(e_{q_{n-1}}^{f_n}(x), \text{Leb}_{\mathbb{A}_0}) < 2\varepsilon_n.$$

D'après l'inégalité triangulaire, la quantité $\mathcal{W}(e_{q_{n-1}}^f(x), \text{Leb}_{\mathbb{A}_0})$ est petite quand n est grand, ce qui nous implique l'ergodicité.

Le dernier point à montrer est que $f|_{\mathbb{A}_0}$ est sans points périodiques : pour ceci on utilise le point 4 du lemme 2.2. Fixons $k > 0$ et montrons que pour tout $x \in \mathbb{A}_0$ on a $d(f^k(x), x) > 0$: ceci revient à dire que f n'a pas de point périodique de période k . Une fois k fixé, on sait que la suite $(f_n^k)_n$ est aussi de Cauchy et converge vers f^k . Soit $\varepsilon > 0$ et soient $m \gg n \gg k$ suffisamment grands : grâce au point 4 du Lemme 2.2, on obtient

$$d(f^k(x), x) > d(f_m^k(x), x) - \varepsilon > d(f_{m-1}^k(x), x) \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) - \varepsilon;$$

en appliquant de façon récursive le point 4, on arrive à :

$$\begin{aligned} d(f^k(x), x) &> d(f_{m-1}^k(x), x) \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) - \varepsilon > d(f_{m-2}^k(x), x) \left(1 - \frac{1}{2^{m-1}}\right) \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) - \varepsilon \\ &> \cdots > d(f_n^k(x), x) \prod_{i=n+1}^m \left(1 - \frac{1}{2^i}\right) - \varepsilon. \end{aligned}$$

En passant à la limite pour $m \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$d(f^k(x), x) > d(f_n^k(x), x) \prod_{i \geq n+1} \left(1 - \frac{1}{2^i}\right) \geq d(f_n^k(x), x) e^{-\frac{1}{2^{n-1}}} > 0,$$

où $d(f_n^k(x), x) > 0$ car f_n est sans points périodiques de période plus petite que q_n . Nous déduisons que f est sans points périodiques de période k dans $\mathbb{A}_0$, pour tout $k > 0$. $\square$

On peut maintenant passer à la preuve du lemme 2.2 : elle repose aussi sur un autre lemme, énoncé dans la suite. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on note $\text{Leb}_{\mathbb{T} \times \{y\}}$ la mesure image de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$ par l'application $\phi_y : s \in \mathbb{T} \mapsto (s, y) \in \mathbb{T} \times \{y\}$.

LEMME 2.3. — *Pour tout $\eta > 0$, tout $\varepsilon > 0$ et tout $q > 0$, il existe un difféomorphisme $g \in \text{Ham}_0^\infty(\mathbb{A})$ tel que :*

— *le difféomorphisme g commute avec la rotation d'angle $\frac{1}{q}$, c'est-à-dire*

$$g \circ R_{\frac{1}{q}} = R_{\frac{1}{q}} \circ g;$$

— *Pour tout $y \in [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$, nous avons*

$$\mathcal{W}(g_* \text{Leb}_{\mathbb{T} \times \{y\}}, \text{Leb}_{\mathbb{A}_0}) < \eta.$$

Preuve du Lemme 2.2 à partir du Lemme 2.3. — Le lemme 2.2 est montré par récurrence ; commençons par définir

$$\alpha_0 = 0 \quad \text{et} \quad g_0 = \text{Id}_{\mathbb{A}}.$$

Soit $n > 0$. Supposons déjà construites la suite $(g_k)_{k < n}$ et la suite $(\alpha_k = \frac{p_k}{q_k})_{k < n}$. Soient $q = q_{n-1}$ et $\varepsilon = \varepsilon_n$. On peut choisir $\eta > 0$ suffisamment petit de telle sorte qu'un difféomorphisme g donné par le lemme 2.3 avec ce choix de ε, η, q est tel que

$$(1) \quad \mathcal{W}((g_{n-1})_* g_* \text{Leb}_{\mathbb{T} \times \{y\}}, (g_{n-1})_* \text{Leb}_{\mathbb{A}_0}) = \mathcal{W}((g_{n-1})_* g_* \text{Leb}_{\mathbb{T} \times \{y\}}, \text{Leb}_{\mathbb{A}_0}) < \frac{\varepsilon_n}{2}.$$

Ceci vient du fait que $(g_{n-1})_*$ agit de façon continue sur l'espace de mesures de probabilités. On définit alors

$$g_n := g_{n-1} \circ g.$$

Comme g commute avec la rotation $R_{\frac{1}{q_{n-1}}}$, on a :

$$(2) \quad g_n \circ R_{\alpha_{n-1}} \circ g_n^{-1} = g_{n-1} \circ R_{\alpha_{n-1}} \circ g_{n-1}^{-1} = f_{n-1}.$$

Il nous reste encore à choisir α_n . Montrons d'abord qu'il existe un choix de α_n tel que la propriété 3 est vérifiée : pour $k \leq n$, on a, grâce à (2)

$$(3) \quad f_n - f_{n-1} = g_n \circ (R_{\alpha_n} - R_{\alpha_{n-1}}) \circ g_n^{-1},$$

et, par continuité de la composition, on peut choisir α_n suffisamment proche de α_{n-1} de façon que la semi-norme p_n de (3) soit plus petite que ε_n .

Pour le point 2, pour $x \in \mathbb{A}$ et pour $1 \leq k \leq q_{n-1}$, on veut montrer que $\mathcal{W}(e_k^{f_n}(x), e_k^{f_{n-1}}(x)) < \varepsilon_n$. Si l'on explicite les mesures empiriques, on veut estimer la distance de Wasserstein entre des mesures discrètes, c'est-à-dire (encore grâce à (2)) entre

$$\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \delta_{g_n \circ R_{i\alpha_n} \circ g_n^{-1}(x)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \delta_{g_n \circ R_{i\alpha_{n-1}} \circ g_n^{-1}(x)}.$$

De façon intuitive, une telle distance peut être majorée par le coût du transport (c'est-à-dire la distance) d'un point du support de la première mesure sur un point de la deuxième. La borne cherchée est obtenue en majorant la distance entre $g_n \circ R_{i\alpha_n} \circ g_n^{-1}(x)$ et $g_n \circ R_{i\alpha_{n-1}} \circ g_n^{-1}(x)$. Quitte à choisir alors α_n encore plus proche de α_{n-1} , on peut assurer que $\mathcal{W}(e_k^{f_n}(x), e_k^{f_{n-1}}(x)) < \varepsilon_n$.

Pour montrer le point 1, montrons que pour tout $x \in g_n(\mathbb{A}_{\varepsilon_n})$, la mesure empirique $e^{f_n}(x)$ est ε_n -proche de $\text{Leb}_{\mathbb{A}_0}$. Pour tout $x = g_n(\theta, y) \in g_n(\mathbb{A}_{\varepsilon_n})$ (donc $|y| \leq 1 - \varepsilon_n$), la mesure empirique $e^{f_n}(x)$ s'écrit comme

$$e^{f_n}(x) = e_{q_n}^{f_n}(x) = \frac{1}{q_n} \sum_{i=0}^{q_n-1} \delta_{g_n \circ R_{i\alpha_n} \circ g_n^{-1}(x)} = \frac{1}{q_n} \sum_{i=0}^{q_n-1} \delta_{g_n(\theta + i\alpha_n, y)} = (g_n)_* \left(\frac{1}{q_n} \sum_{i=0}^{q_n-1} \delta_{(\theta + i\alpha_n, y)} \right).$$

Si q_n est suffisamment grand, la mesure $\frac{1}{q_n} \sum_{i=0}^{q_n-1} \delta_{(\theta + i\alpha_n, y)}$ est aussi proche qu'on veut de $\text{Leb}_{\mathbb{T} \times \{y\}}$. Grâce à la continuité de l'action de $(g_n)_*$ sur l'espace des mesures de probabilités, quitte à choisir q_n encore plus grand (en prenant α_n encore plus proche de α_{n-1}), nous avons

$$(4) \quad \mathcal{W}(e^{f_n}(x), (g_n)_*(\text{Leb}_{\mathbb{T} \times \{y\}})) = \mathcal{W}\left((g_n)_* \left(\frac{1}{q_n} \sum_{i=0}^{q_n-1} \delta_{(\theta + i\alpha_n, y)} \right), (g_n)_*(\text{Leb}_{\mathbb{T} \times \{y\}})\right) < \frac{\varepsilon_n}{2}.$$

Grâce aux inégalités (1) et (4), on obtient

$$\mathcal{W}(e^{f_n}(x), \text{Leb}_{\mathbb{A}_0}) \leq \mathcal{W}(e^{f_n}(x), (g_n)_* \text{Leb}_{\mathbb{T} \times \{y\}}) + \mathcal{W}((g_n)_* \text{Leb}_{\mathbb{T} \times \{y\}}, \text{Leb}_{\mathbb{A}_0}) < \varepsilon_n.$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer le point 4. Soit $0 < k < q_{n-1}$. Comme f_{n-1} est conjugué à la rotation d'angle $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, on ne peut pas avoir de points périodiques de période strictement plus petite que q_{n-1} ; la quantité $\min_{x \in \mathbb{A}_0} d(f_{n-1}^k(x), x)$ est alors strictement positive. Si l'on regarde $d(f_n^k(x), x)$, on obtient

$$d(f_n^k(x), x) \geq d(f_{n-1}^k(x), x) - d(f_{n-1}^k(x), f_n^k(x));$$

quitte à choisir α_n encore plus proche de α_{n-1} , on peut supposer que

$$d(f_{n-1}^k(x), f_n^k(x)) < \frac{1}{2^n} d(f_{n-1}^k(x), x)$$

pour tout x . Ceci nous permet de conclure la preuve. $\square$

Remarque 2.4. — Dans la preuve du lemme 2.2, qui constitue vraiment le cœur de la méthode AVC, nous remarquons que d'abord on choisit un difféomorphisme g_n et seulement après l'angle α_n : il dépend de façon cruciale du choix d'un g_n . La construction de la suite $(\alpha_n)_n$ implique notamment que sa limite α est un nombre bien approché par les rationnels (en fait il est Liouville). La question de savoir si une pseudo-rotation analytique de nombre de rotation diophantien doit être conjuguée à une rotation reste ouverte, voir Herman (1998).

Il nous reste plus qu'à prouver le lemme 2.3, dont la démonstration repose sur un argument classique, connu sous le nom d'« astuce de Moser ». L'« astuce de Moser » nous dit que, étant donné deux formes volume sur une variété compacte, si le volume de la variété par rapport à la première forme est égal au volume par rapport à la deuxième, alors il existe un difféomorphisme de la variété qui envoie la première forme sur la deuxième.

Esquisse de preuve du lemme 2.3. — Le but du lemme est de construire un difféomorphisme hamiltonien g sur $\mathbb{A}_0$, à support compact, qui commute avec la rotation $R_{\frac{1}{q}}$, et tel que l'image de chaque courbe $\mathbb{T} \times \{y\}$ par g est presque équidistribuée par rapport à la mesure de Lebesgue de l'anneau borné. Nous commençons par observer que, quitte à passer à un relevé, on peut supposer que $q = 1$, car $\text{Leb}_{\mathbb{A}_0}$ et $\text{Leb}_{\mathbb{T} \times \{y\}}$ sont invariantes par rotation d'angle $\frac{1}{q}$.

Considérons n^2 rectangles verticaux $(\text{Rect}_i)_{1 \leq i \leq n^2}$, de hauteur presque 2 et de base presque $\frac{1}{n^2}$, tous disjoints, ainsi que n^2 petits carreaux $(\text{Carr}_i)_{1 \leq i \leq n^2}$, chacun de hauteur presque $\frac{2}{n}$ et de base presque $\frac{1}{n}$, encore tous disjoints, comme dans la figure 2. Quitte à approcher les rectangles et les carreaux par l'extérieur à l'aide des domaines lisses (nécessaires pour appliquer l'« astuce de Moser »), on veut construire un difféomorphisme hamiltonien lisse g , de support contenu dans $\mathbb{A}_0$, qui envoie chaque rectangle Rect_i sur le carreau Carr_i . L'existence d'un tel difféomorphisme est assurée par un argument qui

repose sur l'« astuce de Moser », car, dans notre cas, le rectangle et le carreau ont la même aire.

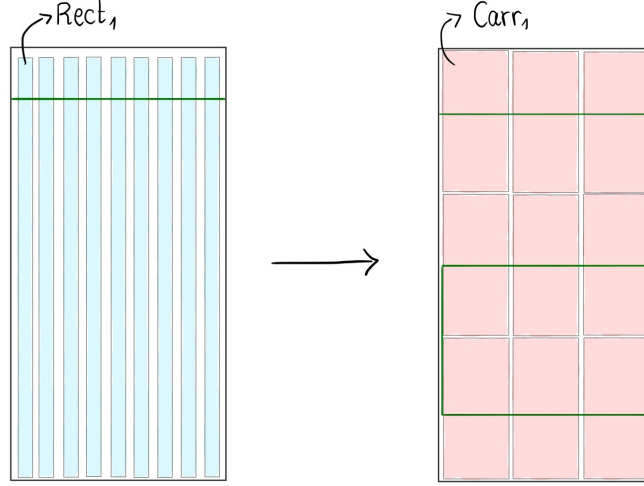


FIGURE 2. Le difféomorphisme hamiltonien g envoie chaque rectangle Rect_i sur un carreau Carr_i .

Notons x_i le centre de chaque carreau Carr_i et considérons la mesure discrète $\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n^2} \delta_{x_i}$. D'un côté, on peut facilement estimer la distance de Wasserstein

$$\mathcal{W}\left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n^2} \delta_{x_i}, \text{Leb}_{\mathbb{A}_0}\right) \leq \frac{\sqrt{5}}{n},$$

en utilisant le diamètre du carreau. De l'autre côté, on peut aussi estimer, pour tout y tel que $\mathbb{T} \times \{y\}$ rencontre les rectangles verticaux,

$$\mathcal{W}\left(g_* \text{Leb}_{\mathbb{T} \times \{y\}}, \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n^2} \delta_{x_i}\right);$$

la majorité du segment $\mathbb{T} \times \{y\}$ est contenue dans la réunion des rectangles verticaux et donc son image par g est envoyée, pour la plupart, dans les carreaux : le coût du transport revient alors à bouger le point jusqu'au centre du carreau où il est. Ceci nous donne une borne d'ordre $\frac{1}{n}$, l'ordre du diamètre du carreau. Toutefois sur une petite partie (qu'on peut rendre plus petite en agrandissant les rectangles du départ, tout en les gardant disjoints), on n'a pas de contrôle de son image : le coût du transport et donc la borne sur la distance de Wasserstein est de l'ordre du diamètre de $\mathbb{A}_0$, donc d'ordre 1, mais ceci a un « poids » petit, grâce au fait que cette perte de contrôle intervient juste sur une petite proportion de la courbe.

D'après l'inégalité triangulaire, on peut alors rendre la distance entre $g_* \text{Leb}_{\mathbb{T} \times \{y\}}$ et $\text{Leb}_{\mathbb{A}_0}$ arbitrairement petite. $\square$

2.2. Quelques résultats sur les pseudo-rotations lisses

Plusieurs auteurs et autrices ont travaillé afin de mieux comprendre la classe des pseudo-rotations, déjà dans le cas lisse. Même avant de s'intéresser aux pseudo-rotations, on cite le travail de Shnirelman (1930), qui construit un homéomorphisme transitif du disque (voir aussi Besicovitch, 1951). Toutefois, grâce à Le Calvez et Yoccoz (1997), on sait qu'il n'existe pas d'homéomorphisme minimal ⁽⁸⁾ de $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$. En revenant aux pseudo-rotations, une première question assez naturelle est de savoir si toute pseudo-rotation peut être réalisée comme limite de conjugaisons de rotations. Dans Bramham (2015), l'auteur montre que toute pseudo-rotation lisse du disque peut être C^0 approximée par la méthode AVC : sa preuve repose sur des techniques venant des courbes pseudo-holomorphes. Ce résultat a été généralisé par Le Calvez (2016) pour des pseudo-rotations de classe C^1 du disque, en utilisant plutôt des méthodes de flot gradient associé aux fonctions génératrices produites par les géodésiques brisées de Chaperon (1984). Avila, Fayad, Le Calvez, Xu et Zhang (2020) montrent que, si le nombre de rotation est de type non-Brjuno, une pseudo-rotation du disque de classe C^k est C^{k-1} -approximée par la méthode AVC. Dans Bramham et Zhang (2025), les auteurs montrent que toute pseudo-rotation dont le nombre de rotation satisfait une certaine condition arithmétique (en particulier, qui implique la condition Liouville) peut être C^∞ -approchée par des dynamiques périodiques.

Nous avons parlé de pseudo-rotations lisses ergodiques (et transitives) : il est possible de s'interroger alors sur l'existence de pseudo-rotations avec d'autres propriétés dynamiques, comme le mélange ou l'ergodicité minimale. Nous rappelons ici les principales définitions.

DÉFINITION 2.5. — *Un difféomorphisme f sur un espace de probabilité $(X, \mathcal{B}, \mu)$ qui préserve μ est faiblement mélangeant si pour tout couple (A, B) de mesurables on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\mu(A \cap f^{-i}(B)) - \mu(A) \mu(B)| = 0.$$

Un difféomorphisme f est topologiquement mélangeant si pour tout couple (A, B) d'ouverts, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n > N$ on a

$$f^n(A) \cap B \neq \emptyset.$$

Remarque 2.6. — Le mélange faible implique l'ergodicité, tandis que le mélange topologique implique la transitivité.

Anosov et Katok (1970) obtiennent des pseudo-rotations faiblement mélangeantes de l'anneau. Fayad et Saprykina (2005) construisent des exemples de pseudo-rotations faiblement mélangeantes pour tout nombre de Liouville sur $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$, pour $d \geq 2$. Toutefois, aucune pseudo-rotation analytique du disque ou de la sphère ne peut être topologiquement mélangeante, comme le montrent Avila, Fayad, Le Calvez, Xu et Zhang

8. Un homéomorphisme sur un espace topologique X est minimal si toute orbite est dense dans X .

(2020). Dans le même article, ils déduisent qu’un difféomorphisme analytique conservatif de la sphère ou du disque qui est topologiquement mélangeant doit être d’entropie positive.

DÉFINITION 2.7. — *Un symplectomorphisme f de l’anneau borné (ou de la sphère ou du disque) est minimalement ergodique si f a exactement 3 mesures ergodiques.*

Au-delà de la mesure de Lebesgue qui est f -invariante, les autres deux mesures sont celles supportées sur $\mathbb{T} \times \{+1\}$ (resp. $\mathbb{T} \times \{-1\}$) pour l’anneau. Dans le cas de la sphère, les deux autres sont deux mesures de Dirac, supportées respectivement aux deux pôles. Dans le cas du disque, on a la mesure de Dirac centrée à l’origine et la mesure supportée sur le bord du disque. Dans le cas lisse, Fayad et Katok (2004) montrent qu’on peut réaliser des pseudo-rotations lisses minimalement ergodiques.

Comme souligné pendant la description de l’exemple d’Anosov–Katok, les pseudo-rotations réalisées avec cette méthode ont un nombre de rotation de type Liouville, c’est-à-dire bien approchable par des rationnels. Ceci va être le cas aussi de la construction de Berger. La question suivante reste alors encore ouverte, même pour des difféomorphismes lisses.

Question. — pour tout $\alpha \in]0, 1[\setminus \mathbb{Q}$, existe-t-il une pseudo-rotation (lisse ou analytique) de nombre de rotation α qui ne soit pas conjuguée à la rotation d’angle α ?

Nous renvoyons à Fayad et Krikorian (2018) pour une discussion plus détaillée. Cette question devient intéressante en particulier vis-à-vis des nombres de rotation diophantiens. Est-il vrai que toute pseudo-rotation du disque de classe C^k avec nombre de rotation diophantien (c’est-à-dire mal approché par des rationnels) est conjuguée à une rotation, par des difféomorphismes de classe C^k ? Dans le cadre analytique, Rüssmann (1967) montre que la dichotomie suivante est vérifiée : soit l’origine, qui est un point fixe elliptique, est entourée par un ensemble de mesure strictement positive de cercles invariants, soit le difféomorphisme est localement conjugué à la rotation du même angle dans un voisinage de l’origine. Pour une pseudo-rotation lisse de nombre de rotation diophantien, si le difféomorphisme est suffisamment proche de la rotation, grâce à Fayad et Krikorian (2009), il doit être alors conjugué à la rotation elle-même.

Concernant les résultats pour des difféomorphismes en classe analytique, rappelons que Furstenberg (1961) construit les premiers exemples de difféomorphismes analytiques du 2-tore minimaux, mais pas uniquement ergodiques (ils admettent une infinité de mesures ergodiques). Fathi et Herman (1977) montrent que toute variété de classe C^∞ ayant une action de $\mathbb{S}^1$ admet un difféomorphisme lisse, isotope à l’identité, minimal. Windsor (2001) construit, sur toute variété compacte admettant une action libre de $\mathbb{S}^1$, un difféomorphisme arbitrairement proche de la rotation, minimal et avec un nombre fini de mesures ergodiques. Banerjee et Kunde (2019) adaptent l’exemple d’Anosov–Katok pour construire des symplectomorphismes analytiques du tore $\mathbb{T}^d$, $d \geq 2$, ergodiques et

obtenus comme limite de conjugaisons de translations irrationnelles. Dans Fayad et Katok (2004), les auteurs montrent l’existence de difféomorphismes analytiques préservant le volume, uniquement ergodiques sur toute sphère de dimension impaire.

3. Pseudo-rotations analytiques

La preuve de Berger (2022) repose sur la méthode AVC d’Anosov–Katok, mais également sur un théorème d’approximation très fin, qui va nous permettre d’approcher un difféomorphisme hamiltonien g qui intervient dans le lemme 2.3 par des difféomorphismes hamiltoniens entiers de $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ (c’est-à-dire holomorphes définis sur $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$) de norme C^0 suffisamment petite sur certains compacts dans $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ en dehors de $\text{int}(\mathbb{A}_0)$ ⁽⁹⁾. Le fait de travailler avec des applications entières permet à Berger d’éviter des problèmes de dégénérescence de la bande d’analyticité.

3.1. Théorème d’approximation

Rappelons que $\text{Ham}_0^\infty(\mathbb{A})$ désigne l’ensemble des difféomorphismes hamiltoniens à support contenu dans l’intérieur de $\mathbb{A}_0$. Dans la suite, on note $\text{Ham}^\omega(\mathbb{A})$ l’ensemble des difféomorphismes hamiltoniens dans $\text{Ham}^\infty(\mathbb{A})$ qui sont entiers sur $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$. Le théorème d’approximation de Berger consiste à approcher tout élément de $\text{Ham}_0^\infty(\mathbb{A})$ par un élément de $\text{Ham}^\omega(\mathbb{A})$, dont on demande de plus qu’il soit C^0 -proche de l’identité sur des sous-ensembles de $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ qui ne sont pas contenus dans $\mathbb{A}$ et qui ne rencontrent pas $\mathbb{A}_0$. Plus précisément, pour $\rho > 1$, on considère le sous-ensemble $K_\rho \subset \mathbb{C}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ défini par

$$K_\rho = \mathbb{T}_\rho \times Q_\rho,$$

où

$$\mathbb{T}_\rho := \mathbb{T} + i[-\rho, \rho]$$

et

$$Q_\rho := ([-\rho, -1] \cup [1, \rho]) + i[-\rho, \rho].$$

Notons $\text{Ham}^\omega(\mathbb{A}; \rho)$ l’ensemble des difféomorphismes $g \in \text{Ham}^\omega(\mathbb{A})$ tels que

$$\sup_{K_\rho} \|g - \text{Id}\| < \frac{1}{\rho}.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème d’approximation de Berger (2022).

THÉORÈME 3.1 (Berger, 2022). — *Soient $g \in \text{Ham}_0^\infty(\mathbb{A})$ et $\mathcal{U}$ un voisinage en topologie C^∞ de la restriction $g|_{\text{int}(\mathbb{A}_0)}$. Alors pour tout $\rho > 1$, il existe $\tilde{g} \in \text{Ham}^\omega(\mathbb{A}; \rho)$ tel que la restriction $\tilde{g}|_{\text{int}(\mathbb{A}_0)}$ appartienne à $\mathcal{U}$.*

9. Ici et dans la suite, un compact en dehors de $\text{int}(\mathbb{A}_0)$ indique un compact d’intersection vide avec $\text{int}(\mathbb{A}_0)$.

Remarque 3.2. — Si de plus le difféomorphisme g commute avec la rotation $R_{\frac{1}{q}}$, pour $q \geq 1$, alors on peut aussi obtenir une approximation $\tilde{g} \in \text{Ham}^\omega(\mathbb{A}; \rho)$ qui commute avec la rotation $R_{\frac{1}{q}}$. En fait g induit un difféomorphisme $\bar{g}$ sur le quotient $\mathbb{R}/q^{-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Or, le quotient $\mathbb{R}/q^{-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ est difféomorphe à $\mathbb{A}$ via $\varphi: (\theta, y) \mapsto (q\theta, y)$; on applique alors le théorème d'approximation à $\varphi \circ \bar{g} \circ \varphi^{-1}$. On obtient un difféomorphisme entier de $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ qui, conjugué par φ^{-1} , donne un difféomorphisme entier du quotient $\mathbb{C}/q^{-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$. En considérant un relevé de ce dernier, on a le difféomorphisme cherché.

Remarque 3.3. — Dans Berger (2022), l'auteur énonce une version plus fine du théorème 3.1; pour la clarté de l'exposé, nous préférons cette présentation, en précisant que les idées des deux preuves sont les mêmes et en renvoyant à Berger (2022) pour tous les détails.

Le cœur de la preuve consiste à montrer que tout difféomorphisme hamiltonien lisse peut s'approcher par les deux familles d'applications suivantes et par leurs commutateurs. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des applications de l'anneau de la forme

$$(\theta, y) \mapsto (\theta + \tau(y), y), \quad \text{avec } \tau \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{T}),$$

et soit $\mathcal{V}$ est l'ensemble des applications de la forme

$$(\theta, y) \mapsto (\theta, y + v(\theta)), \quad \text{avec } v \in C^0(\mathbb{T}, \mathbb{R}), \int_{\mathbb{T}} v(\theta) d\theta = 0.$$

Observons que, si $V \in \mathcal{V}$ est de la forme $V(\theta, y) = (\theta, y + v(\theta))$, alors V^{-1} est de la forme $V^{-1}(\theta, y) = (\theta, y - v(\theta))$, en particulier V^{-1} appartient aussi à $\mathcal{V}$. La même propriété est vérifiée, *mutatis mutandis*, pour les applications dans $\mathcal{T}$. Étant donné $V \in \mathcal{V}, T \in \mathcal{T}$, leur commutateur est

$$\langle V, T \rangle := V^{-1} \circ T^{-1} \circ V \circ T.$$

Observons que $\langle V, T \rangle^{-1} = \langle T, V \rangle$. On note $\langle \mathcal{T}, \mathcal{V} \rangle$, respectivement $\langle \mathcal{V}, \mathcal{T} \rangle$, l'ensemble des commutateurs de la forme $\langle T, V \rangle$, respectivement $\langle V, T \rangle$, pour $V \in \mathcal{V}, T \in \mathcal{T}$. On s'intéresse aux applications des familles $\mathcal{V}, \mathcal{T}$ et à leurs commutateurs, mais en demandant que les fonctions v, τ soient analytiques. Plus précisément, pour $\rho > 1$, soient

$$\mathcal{T}_\rho^\omega := \mathcal{T} \cap \text{Ham}^\omega(\mathbb{A}; \rho) \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_\rho^\omega := \mathcal{V} \cap \text{Ham}^\omega(\mathbb{A}; \rho);$$

donc une application dans $\mathcal{T}_\rho^\omega$ est de la forme $(\theta, y) \mapsto (\theta + \tau(y), y)$, où τ est entière et $\sup_{y \in Q_\rho} |\tau(y)| < \frac{1}{\rho}$; une application dans $\mathcal{V}_\rho^\omega$ est de la forme $(\theta, y) \mapsto (\theta, y + v(\theta))$, où v est entière, on a $\int_{\mathbb{T}} v d\theta = 0$ et $\sup_{\theta \in \mathbb{T}_\rho} |v(\theta)| < \frac{1}{\rho}$.

Le lemme suivant montre que, même si nous n'avons pas de contrôle à l'infini des applications dans $\mathcal{V}_\rho^\omega$, nous pouvons encore contrôler les commutateurs, quitte à demander un contrôle des applications aussi sur un petit voisinage de $K_\rho = \mathbb{T}_\rho \times Q_\rho$. Pour $\rho > 1, \varepsilon > 0$, notons $\mathcal{V}_{\rho, \varepsilon}^\omega$ (resp. $\mathcal{T}_{\rho, \varepsilon}^\omega$) l'ensemble des applications dans $\mathcal{V}_\rho^\omega$ (resp. $\mathcal{T}_\rho^\omega$) qui sont $\frac{1}{\rho}$ -proches de l'identité sur un ε -voisinage de K_ρ . Dans la suite, pour $\rho > 0, \varepsilon > 0$, on note $B(K_\rho, \varepsilon)$ un ε -voisinage de K_ρ , c'est-à-dire l'ensemble des points de $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ à distance $< \varepsilon$ de K_ρ .

LEMME 3.4. — Soient $\rho_1 > \rho_0 > 1$ et $\varepsilon > \varepsilon' > 0$ tels que $\varepsilon > \varepsilon' + \frac{2}{\rho_0} > 0$. Posons $\rho_2 = \frac{\varepsilon - \varepsilon' - 2/\rho_0}{\varepsilon - \varepsilon' - 1/\rho_0} \rho_1$. Alors pour tout $\langle V, T \rangle \in \langle \mathcal{V}_{\rho_0, \varepsilon}^\omega, \mathcal{T}_{\rho_1, \varepsilon}^\omega \rangle$, on a

$$\sup_{B(K_{\rho_2, \varepsilon'})} \|\langle V, T \rangle - \text{Id}\| < \frac{1}{\rho_2}.$$

On sait donc que, pour $\rho_1, \rho_0 > 1$, les applications dans $\mathcal{T}_{\rho_1, \varepsilon}^\omega$ ou dans $\langle \mathcal{V}_{\rho_0, \varepsilon}^\omega, \mathcal{T}_{\rho_1, \varepsilon}^\omega \rangle$ vont être bien contrôlées sur un grand compact. De plus, ce contrôle est stable par composition, comme précisé dans le lemme qui suit.

LEMME 3.5. — Soient $\varepsilon > 0$ et $(\rho_k)_k$ une suite croissante de nombres réels > 1 qui croît « suffisamment » vite vers l'infini. Soit $(F_k)_k$ une suite dans $(\text{Ham}^\omega(\mathbb{A}))^\mathbb{N}$. Si l'on a $\sup_{B(K_{\rho_0, \varepsilon})} \|F_k - \text{Id}\| < \frac{1}{\rho_k}$ pour tout k , alors pour tout $n \geq 1$, la composition $F_1 \circ \dots \circ F_n$ est dans $\text{Ham}^\omega(\mathbb{A}; \rho)$.

On passe maintenant à la preuve du théorème d'approximation.

Preuve du théorème 3.1. — Soient $g \in \text{Ham}_0^\infty(\mathbb{A})$ et $\mathcal{U}$ un voisinage en topologie C^∞ de $g|_{\text{int}(\mathbb{A}_0)}$. Le point principal de la preuve consiste à montrer que $\forall (\rho_k)_k, \rho_k > 1$, il existe $M \in \mathbb{N}, M > 0$ et une composition

$$\tilde{F} = F_1 \circ \dots \circ F_M$$

telle que $F_M \in \mathcal{T}_{\rho_M}^\omega$, pour tout $1 \leq j \leq M - 1$ la fonction $F_j \in \langle \mathcal{V}_{\rho_0}^\omega, \mathcal{T}_{\rho_j}^\omega \rangle$, et telle que $\tilde{F}|_{\text{int}(\mathbb{A}_0)}$ appartienne à $\mathcal{U}$. En fait, il est même possible de montrer que, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, ces fonctions F_j sont dans $\mathcal{T}_{\rho_M, \varepsilon}^\omega$ ou dans $\langle \mathcal{V}_{\rho_0, \varepsilon}^\omega, \mathcal{T}_{\rho_j, \varepsilon}^\omega \rangle$. Une fois la fonction $\tilde{F}$ construite, le théorème 3.1 se déduit grâce aux lemmes 3.4 et 3.5, car il ne reste plus qu'à contrôler la fonction $\tilde{F}$ sur un compact qui ne rencontre pas $\text{int}(\mathbb{A}_0)$.

Considérons d'abord une fonction hamiltonienne H , et fixons un voisinage $\mathcal{W}$ de H dans la topologie C^∞ . En passant par une décomposition en série de Fourier, il existe $N \in \mathbb{N}, N > 0$, des fonctions lisses $C, A_1, \dots, A_N, B_1, \dots, B_N$, et des constantes non nulles $M_1, \dots, M_N$, telles que la fonction

$$\tilde{H}(\theta, y) := C(y) + \sum_{n=1}^N \left\{ A_n(y), \frac{\cos(2\pi n\theta)}{M_n} \right\} + \left\{ B_n(y), \frac{\sin(2\pi n\theta)}{M_n} \right\},$$

est dans le voisinage $\mathcal{W}$ de H . Ici, on utilise la notation

$$\{f_1, f_2\} := \partial_\theta f_1 \partial_y f_2 - \partial_y f_1 \partial_\theta f_2$$

pour indiquer le crochet de Poisson de deux fonctions f_1, f_2 . Autrement dit, on écrit notre approximation hamiltonienne $\tilde{H}$ comme la somme

$$H_0 + \sum_{n=1}^{2N} H_n,$$

où H_0 dépend seulement de y et, pour $1 \leq n \leq 2N$, chaque H_n est un crochet de Poisson de deux fonctions qui dépendent, la première, de y , et la deuxième, de θ . Étant donné une fonction hamiltonienne H , le champ de vecteurs associé est $X_H := (\partial_y H, -\partial_\theta H)$. Or, il faut se rappeler les faits suivants :

1. Si un hamiltonien H dépend seulement de y , alors le flot hamiltonien associé est de la forme $(\theta, y) \mapsto (\theta + tH'(y), y)$, donc dans $\mathcal{T}$;
2. Si un hamiltonien H dépend seulement de θ , alors le flot hamiltonien associé est de la forme $(\theta, y) \mapsto (\theta, y + tH'(\theta))$, donc dans $\mathcal{V}$;
3. Le champ associé à un hamiltonien $\{f_1, f_2\}$ est obtenu comme crochet de Lie des champs associés à f_1 et f_2 , c'est-à-dire

$$X_{\{f_1, f_2\}} = [X_{f_1}, X_{f_2}] := DX_{f_2} \cdot X_{f_1} - DX_{f_1} \cdot X_{f_2}.$$

4. Si H_1, H_2 sont deux hamiltoniens, alors le flot hamiltonien au temps $\varepsilon > 0$ associé à l'hamiltonien $H_1 + H_2$ peut s'approcher comme

$$\phi_{H_1+H_2}^\varepsilon = \phi_{H_1}^\varepsilon \circ \phi_{H_2}^\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

où $O(\varepsilon^2)$ est en topologie C^∞ .

Les fonctions hamiltoniennes qui apparaissent sont assez spéciales. Notamment, le flot hamiltonien de $H_0 = C(y)$ est une application dans $\mathcal{T}$, car de la forme $(\theta, y) \mapsto (\theta + C'(y), y)$. Pour chaque $1 \leq n \leq 2N$, le flot hamiltonien de $H_n = \{f_1(y), f_2(\theta)\}$ est engendré par le champ de vecteurs $X_{H_n} = [X_{f_1}, X_{f_2}]$, où $X_{f_1} = (f_1'(y), 0)$ et $X_{f_2} = (0, -f_2'(\theta))$. De plus, un calcul direct montre le lemme suivant.

LEMME 3.6. — *Pour un champ vectoriel $X_H = [X_{f_1}, X_{f_2}]$, où $X_{f_1} = (f_1'(y), 0)$ et $X_{f_2} = (0, -f_2'(\theta))$, nous avons, pour tout $r \geq 0$,*

$$(5) \quad \text{Id} + t^2 X_H = \langle V^t, T^t \rangle + O(t^3),$$

où $V^t(\theta, y) = (\theta, y - tf_1'(\theta))$ et $T^t(\theta, y) = (\theta + tf_2'(y), y)$, et où $O(t^3)$ est en topologie C^r .

En approximant alors notre fonction hamiltonienne H en série de Fourier par $\tilde{H}$, et en appliquant de façon répétée le lemme 3.6, nous obtenons qu'il existe des fonctions lisses $\tau_0, \dots, \tau_{2N}$ et des fonctions entières⁽¹⁰⁾ $v_1, \dots, v_{2N}$ telles que, si on utilise la notation $T_n^t(\theta, y) = (\theta + t\tau_n(y), y) \in \mathcal{T}$ et $V_n^t(\theta, y) = (\theta, y + tv_n(\theta)) \in \mathcal{V}_\rho^\omega$, pour tout $r \geq 0$ nous avons

$$\|\phi_{X_{\tilde{H}}}^{t^2} - \langle V_{2N}^t, T_{2N}^t \rangle \circ \dots \circ \langle V_1^t, T_1^t \rangle \circ T_0^t\|_{C^r} = o(t^2),$$

où $\phi_{X_{\tilde{H}}}^{t^2}$ désigne le flot hamiltonien au temps t^2 associé à la fonction hamiltonienne $\tilde{H}$. Ici on utilise de façon importante la propriété 4 des flots hamiltoniens. En particulier, si H et $\tilde{H}$ sont proches en topologie C^∞ , alors leurs flots correspondants au temps t^2 seront proches en norme C^r , pour tout $r \geq 0$.

Autrement dit, si t est suffisamment petit, nous pouvons approximer en distance C^∞ le flot $\phi_{X_H}^{t^2}$ par une composition finie d'applications dans $\mathcal{T}$ et dans $\langle \mathcal{V}_{\rho_0}^\omega, \mathcal{T} \rangle$.

Enfin, il est possible d'améliorer cette approximation, pour que les applications dans $\mathcal{T}$ qui rentrent en jeu dans l'approximation soient entières et avec un bon contrôle de leur norme sur des compacts dehors de $\mathbb{A}_0$ de la forme K_{ρ_j} : ceci est le contenu du lemme suivant.

10. Les v_i sont entières car elles sont dérivées de fonctions entières, telles que sin et cos.

LEMME 3.7. — Soient $\rho_0 > 1$ et F un difféomorphisme dans $\mathcal{T} \cup \langle \mathcal{V}_{\rho_0}^\omega, \mathcal{T} \rangle$ à support compact dans $\text{int}(\mathbb{A}_0)$. Soit $\mathcal{W}$ un voisinage en topologie C^∞ de $F|_{\text{int}(\mathbb{A}_0)}$. Pour tout $\rho' > 1$, il existe $\tilde{F} \in \mathcal{T}_{\rho'}^\omega \cup \langle \mathcal{V}_{\rho_0}^\omega, \mathcal{T}_{\rho'}^\omega \rangle$ tel que $\tilde{F}|_{\text{int}(\mathbb{A}_0)} \in \mathcal{W}$.

Preuve du lemme 3.7. — Étant donné un tel F , il suffit de montrer que l'application dans $\mathcal{T}$ intervenant dans la définition de F peut être approximée par une application dans $\mathcal{T}_{\rho'}^\omega$: si $F \in \mathcal{T}$ il s'agit de l'énoncé même, si $F \in \langle \mathcal{V}_{\rho_0}^\omega, \mathcal{T} \rangle$, la forme du commutateur nous permet de déduire que, en remplaçant l'approximation de l'élément dans $\mathcal{T}$ dans l'expression, le nouveau commutateur va rester encore proche de F . Ce dernier point n'est pas immédiat et nous renvoyons à Berger (2022) pour les détails (il faut utiliser aussi le lemme 3.4).

Soit alors $T \in \mathcal{T}$ de la forme $(\theta, y) \mapsto (\theta + \tau(y), y)$, avec τ à support compact contenu dans $] -1, 1[$. Le voisinage $\mathcal{W}$ permet de fixer un ouvert $] -1 + \delta, 1 - \delta[$, pour un certain $\delta > 0$: d'après le théorème de Stone–Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues par des polynômes, on approxime $\tau|_{]-1+\delta, 1-\delta[}$ par un polynôme τ^∞ , qui se prolonge sur un voisinage complexe $\mathcal{N}$ de $] -1 + \delta, 1 - \delta[$. Quitte à rétrécir le voisinage $\mathcal{N}$, on peut supposer que $\mathcal{N}$ est disjoint de $Q_{\rho'}$, et que le complémentaire de $\mathcal{N} \cup Q_{\rho'}$ dans $\mathbb{C}$ est connexe. L'idée clé est alors d'appliquer le théorème de Runge, en considérant la fonction τ^∞ sur $\mathcal{N}$ et la fonction nulle sur $Q_{\rho'}$: on obtient alors une application entière τ^ω , qui est $\frac{1}{\rho}$ - C^0 -proche de zéro sur $Q_{\rho'}$, mais également arbitrairement C^0 -proche de τ^∞ sur $\mathcal{N}$ et donc, d'après l'inégalité de Cauchy, C^∞ -proche de τ sur $] -1 + \delta, 1 - \delta[$. $\square$

Jusqu'ici, on a donc obtenu le théorème 3.1 pour un difféomorphisme hamiltonien g qui peut être approché par un flot hamiltonien en temps suffisamment petit.

Considérons maintenant le difféomorphisme hamiltonien g de départ : il n'y a aucune raison pour laquelle il devrait s'approcher par un flot en temps petit d'une fonction hamiltonienne. Néanmoins, nous savons qu'il existe une famille de fonctions hamiltoniennes $(H_t)_{t \in [0,1]}$ et une famille de difféomorphismes symplectiques $(g_t)_{t \in [0,1]}$, telles que pour tout t on a $X_{H_t} = \partial_t g_t$, $g_0 = \text{Id}$ et $g_1 = g$. On divise alors l'intervalle $[0, 1]$ en segments de la même longueur $\frac{1}{M}$, où $M = \frac{1}{t^2}$. Les deux observations suivantes sont cruciales :

— on écrit

$$g = (g_1 \circ g_{\frac{M-1}{M}}^{-1}) \circ (g_{\frac{M-1}{M}} \circ g_{\frac{M-2}{M}}^{-1}) \circ \cdots \circ (g_{\frac{2}{M}} \circ g_{\frac{1}{M}}^{-1}) \circ g_{\frac{1}{M}} ;$$

— pour chaque $0 \leq j \leq M-1$, on a l'approximation

$$g_{\frac{j+1}{M}} \circ g_{\frac{j}{M}}^{-1} = \phi_{X_{H_j/M}}^{\frac{1}{M}} + O\left(\frac{1}{M^2}\right).$$

Maintenant, en prenant M suffisamment grand, on peut appliquer l'approximation du flot hamiltonien pour des temps petits à chaque $g_{\frac{j+1}{M}} \circ g_{\frac{j}{M}}^{-1}$, en l'exprimant, à un terme d'erreur près, comme une composition d'applications qui appartiennent à $\mathcal{T}_{\rho_j}^\omega \cup \langle \mathcal{V}_{\rho_0}^\omega, \mathcal{T}_{\rho_j}^\omega \rangle$. Ceci permet d'approcher notre g avec la composition de fonctions souhaitée, et termine la preuve du théorème d'approximation. $\square$

3.2. Réfutation de la conjecture de Birkhoff

Nous donnons ici les idées de la preuve de la réfutation de la conjecture de Birkhoff, ainsi que la notion de schéma- C^r -AVC.

3.2.1. Pseudo-rotations analytiques ergodiques de l’anneau. — On a maintenant tous les outils pour donner les idées de la preuve du théorème 0.2 : il existe un symplectomorphisme analytique de l’anneau borné ergodique (donc en particulier, il n’est pas conjugué à une rotation). La preuve suit la structure de l’exemple d’Anosov–Katok : la grande différence est que le symplectomorphisme analytique de $\mathbb{A}$ obtenu par la méthode AVC ne peut pas préserver l’anneau $\mathbb{A}_0$ ⁽¹¹⁾. En revanche, il sera déformé par le passage à la limite dans un autre cylindre analytique qu’on pourra redresser. Notons $\mathbb{E} = \mathbb{A} \setminus \text{int}(\mathbb{A}_0)$ et $\mathbb{E}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \times \{y \in \mathbb{C} : \text{Re}(y) \notin]-1, 1[\}$. Le théorème 0.2 se déduit du lemme suivant, qui est l’analogue analytique du lemme 2.2.

LEMME 3.8. — *Soit $\rho > 1$. Il existe une suite $(\alpha_n = \frac{p_n}{q_n})_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ et une suite $(g_n)_n \in (\text{Ham}^{\omega}(\mathbb{A}; \rho))^{\mathbb{N}}$ telles que, en définissant*

$$f_n = g_n \circ R_{\alpha_n} \circ g_n^{-1},$$

les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. *la restriction $g_n|_{\mathbb{E}_{\mathbb{C}}}$ converge en topologie C^0 vers une application g analytique sur $\text{int}(\mathbb{E}_{\mathbb{C}})$ et sur $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \times \{\pm 1\}$, et telle que $\sup_{K_{\rho}} |g - \text{Id}| < \frac{1}{\rho}$;*
2. *la suite $(f_n)_n$ converge vers un automorphisme entier $f \in \text{Symp}^{\omega}(\mathbb{A})$ tel que $f|_{\mathbb{A}'_0}$ est ergodique, avec $\mathbb{A}'_0 := \mathbb{A} \setminus g(\mathbb{E})$;*
3. *la limite f est sans point périodique sur $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$.*

Preuve du théorème 0.2 à partir du lemme 3.8. — Le lemme 3.8 fournit un symplectomorphisme analytique f de $\mathbb{A}$ qui préserve $\mathbb{A}'_0$ et dont la restriction à $\mathbb{A}'_0$ est ergodique. Pour conclure, il reste à vérifier que $\mathbb{A}'_0$ est un cylindre analytique. Ses bords sont en effet donnés par $g(\mathbb{T} \times \{\pm 1\})$: d’après le point 1 et d’après l’inégalité de Cauchy, on déduit que ces courbes sont des graphes analytiques. Il est alors facile de conjuguer f par un symplectomorphisme entier afin de redresser cet anneau borné et de conclure. $\square$

Comme dans le cas lisse, la preuve du lemme 3.8 repose sur le lemme suivant. Fixons une suite $(\varepsilon_n)_n$ telle que $\sum_n \varepsilon_n < 1$. Pour $n \geq 1$, notons $\mathbb{D}(n) := \{x \in \mathbb{C} : |x| < n\}$.

LEMME 3.9. — *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe des suites $(\alpha_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ et $(g_n)_n \in (\text{Ham}^{\omega}(\mathbb{A}))^{\mathbb{N}}$ avec $\alpha_0 = 0$ et $g_0 = \text{Id}$, telles que, en définissant la suite $(f_n)_n$ comme*

$$f_n = g_n \circ R_{\alpha_n} \circ g_n^{-1},$$

les conditions suivantes sont vérifiées :

1. *les applications $g_n|_{K_{n+N}}$ et $g_{n-1}|_{K_{n+N}}$ sont ε_{n+N} -proches en distance C^0 ;*

11. En fait, d’après le théorème de Picard, un symplectomorphisme entier de $\mathbb{A}$ qui préserve $\mathbb{A}_0$ appartient à $\mathcal{T}$.

2. pour tout $x \in g_n(\mathbb{T} \times [-1 + \varepsilon_n, 1 - \varepsilon_n])$, nous avons

$$\mathcal{W}(e^{f_n}(x), \text{Leb}_{\mathbb{A}_0}) < \varepsilon_n ;$$

3. pour tout $x \in \mathbb{T}_n \times \mathbb{D}(n)$ et pour tout $k \leq q_{n-1}$, nous avons

$$\mathcal{W}(e_k^{f_n}(x), e_k^{f_{n-1}}(x)) < \varepsilon_n ;$$

4. les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$d_{C^0}(f_n|_{\mathbb{T}_n \times \mathbb{D}(n)}, f_{n-1}|_{\mathbb{T}_n \times \mathbb{D}(n)}) < \varepsilon_n ,$$

$$d_{C^0}(f_n^{-1}|_{\mathbb{T}_n \times \mathbb{D}(n)}, f_{n-1}^{-1}|_{\mathbb{T}_n \times \mathbb{D}(n)}) < \varepsilon_n ;$$

5. pour tout $x \in \mathbb{T}_n \times \mathbb{D}(n)$ et pour tout $0 < k < q_{n-1}$, on a

$$d(f_n^k(x), x) > d(f_{n-1}^k(x), x) \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) .$$

Preuve du Lemme 3.8 à partir du Lemme 3.9. — D’après le point 1 du lemme 3.9, la suite $(g_n)_n$ est de Cauchy en dehors de $\mathbb{A}_0$: elle converge donc vers une application g , qui de plus est analytique (ceci découle du théorème de Weierstrass pour les fonctions analytiques). Toujours d’après le point 1, il est possible de déduire que

$$\sup_{K_N} |g - \text{Id}| < \sum_{i \geq N} \varepsilon_i .$$

Considérons maintenant la suite $(f_n = g_n \circ R_{\alpha_n} \circ g_n^{-1})_n$. Pour chaque n suffisamment grand, l’image $g_n(\mathbb{A}_0)$ est encore un cylindre analytique ; notons $\gamma_n^\pm$ les bords de $g_n(\mathbb{A}_0)$. Alors, chaque $\gamma_n^\pm$ est le graphe d’une fonction analytique et la suite $(\gamma_n^\pm)_n$ converge aussi vers le graphe d’une fonction analytique $\gamma^\pm$. Le cylindre analytique $\mathbb{A}'_0$ est donc le cylindre analytique dont les bords sont $\gamma^\pm$. Observons que $\mathbb{A}'_0 = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} g_k(\mathbb{A}_0)$.

Par le point 4, on peut montrer que $(f_n)_n$ et $(f_n^{-1})_n$ sont des suites de Cauchy, donc convergentes. De plus, d’après le théorème de Weierstrass, comme les f_n, f_n^{-1} sont analytiques, on déduit que la limite f et son inverse sont entières. Autrement dit, f est un automorphisme entier de $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$ et un symplectomorphisme.

L’ensemble

$$C := \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} g_k(\mathbb{A}_{\varepsilon_k}) ,$$

où $\mathbb{A}_{\varepsilon_k} = \mathbb{T} \times [-1 + \varepsilon_k, 1 - \varepsilon_k]$, est de complémentaire négligeable dans $\mathbb{A}'_0$. En effet, il est possible de montrer que

$$\mathbb{A}'_0 \setminus C \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} g_n(\mathbb{A}_0) \setminus g_n(\mathbb{A}_{\varepsilon_n}) .$$

Or, comme pour tout n nous avons

$$\text{Leb}(g_n(\mathbb{A}_0) \setminus g_n(\mathbb{A}_{\varepsilon_n})) = \text{Leb}(g_n(\mathbb{A}_0 \setminus \mathbb{A}_{\varepsilon_n})) = \text{Leb}(\mathbb{A}_0 \setminus \mathbb{A}_{\varepsilon_n}) = 2\varepsilon_n ,$$

et comme $\sum_n \varepsilon_n < 1$, grâce au lemme de Borel–Cantelli, on déduit que la mesure de $\limsup_{n \rightarrow \infty} g_n(\mathbb{A}_0) \setminus g_n(\mathbb{A}_{\varepsilon_n})$ est nulle. Par inclusion, $\mathbb{A}'_0 \setminus C$ est aussi de mesure de Lebesgue nulle.

En utilisant les points 2 et 3, on peut alors montrer que la limite f est ergodique par rapport à la mesure $\text{Leb}_{\mathbb{A}_0'}$, comme dans le cas lisse.

Finalement, le point 5, utilisé de façon récursive, permet de montrer que f est une pseudo-rotation, c'est-à-dire qu'elle est sans point périodique. $\square$

Il ne reste donc plus qu'à montrer le lemme 3.9 : c'est ici qu'on va utiliser le théorème d'approximation 3.1.

Preuve du lemme 3.9. — Nous voulons construire des suites $(\alpha_n)_n$ et $(g_n)_n$ avec les propriétés demandées. Comme dans le cas lisse, la preuve est faite par récurrence : on suppose déjà définis α_{n-1}, g_{n-1} et on construit α_n, g_n . Dans le cas lisse, on peut construire un difféomorphisme hamiltonien $\tilde{g}$ qui commute avec la rotation $R_{\alpha_{n-1}}$ et tel que

$$\mathcal{W}((g_{n-1})_* \tilde{g}_* \text{Leb}_{\mathbb{T} \times \{y\}}, (g_{n-1})_* \text{Leb}_{\mathbb{A}_0}) < \frac{\varepsilon_n}{2},$$

voir le lemme 2.3. Fixons un voisinage $\mathcal{U}$ en topologie C^∞ de $\tilde{g}_{\text{int}(\mathbb{A}_0)}$. Par le théorème 3.1 et par la remarque 3.2, il existe alors, pour tout $\rho > 1$, un difféomorphisme $g \in \text{Ham}^\omega(\mathbb{A}; \rho)$ qui commute avec la rotation $R_{\alpha_{n-1}}$ et qui est dans $\mathcal{U}$.

Notre fonction candidate g_n est alors $g_{n-1} \circ g$. En considérant ρ assez grand, on peut obtenir le point 1. On choisit alors α_n en fonction de α_{n-1} et de g_n , comme déjà fait dans le cas lisse, pour assurer toutes les autres propriétés. L'idée clé est alors que, quitte à remplacer l'application $\tilde{g}$ du cas lisse par une bonne approximation analytique, dont on garde un bon contrôle sur un compact dehors de $\mathbb{A}_0$, on garde les propriétés souhaitées (car ces propriétés sont ouvertes en topologie C^∞) ; la convergence est encore assurée par le choix de α_n suffisamment proche de α_{n-1} , en fonction aussi de g_n . $\square$

3.2.2. Propriétés réalisables par un schéma- C^r -AVC. — Sans le dire explicitement, déjà dans la preuve du théorème 3.1, nous avons construit et utilisé un schéma- C^∞ -AVC, notion introduite dans Berger (2024). Considérons l'anneau ouvert $\text{int}(\mathbb{A}_0) = \mathbb{T} \times]-1, 1[$ et, pour $1 \leq r \leq \infty$, l'ensemble des symplectomorphismes C^r de $\mathbb{A}_0$ (resp. de $\text{int}(\mathbb{A}_0)$), noté $\text{Symp}^r(\mathbb{A}_0)$ (resp. $\text{Symp}^r(\text{int}(\mathbb{A}_0))$). On munira l'ensemble $\text{Symp}^r(\text{int}(\mathbb{A}_0))$ de la topologie C^r compacte-ouverte, notée Top^r .

DÉFINITION 3.10. — *Un schéma- C^r -AVC est une application*

$$(g, \alpha) \in \text{Symp}^r(\mathbb{A}) \times \mathbb{Q} \mapsto (U(g, \alpha), \nu(g, \alpha)) \in \text{Top}^r \times]0, \infty[$$

telle que :

1. l'ouvert $U(g, \alpha)$, voisinage de $g|_{\text{int}(\mathbb{A}_0)}$ dans Top^r , contient au moins une application $\hat{g}$ telle que $\hat{g}^{-1} \circ R_\alpha \circ \hat{g} = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$;
2. pour toute suite $(g_n)_n \in (\text{Symp}^r(\mathbb{A}_0))^\mathbb{N}$ et toute suite $(\alpha_n)_n \in \mathbb{Q}^\mathbb{N}$ telles que :
 - $g_0 = \text{Id}$ et $\alpha_0 = 0$;
 - pour tout $n \geq 0$ on a $g_{n+1}^{-1} \circ R_{\alpha_n} \circ g_{n+1} = g_n^{-1} \circ R_{\alpha_n} \circ g_n$;
 - pour tout $n \geq 0$ on a $g_{n+1}|_{\text{int}(\mathbb{A}_0)} \in U(g_n, \alpha_n)$;
 - pour tout $n \geq 0$ on a $0 < |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \nu(g_{n+1}, \alpha_n)$,

la suite $(f_n := g_n^{-1} \circ R_{\alpha_n} \circ g_n)_n$ converge, en topologie Top^r , vers une application $f \in \text{Symp}^r(\mathbb{A}_0)$.

Dans le cas lisse, l'exemple d'Anosov–Katok construit de façon itérative une suite de fonctions $(g_n)_n$ et une suite de rationnels $(\alpha_n)_n$ pour que la suite $f_n := g_n^{-1} \circ R_{\alpha_n} \circ g_n$ converge. Ceci revient, à chaque étape n , à choisir un point (le « centre ») de l'ouvert $U(g_n, \alpha_n)$, celui qui commute avec la rotation d'angle α_n dont l'existence est assurée par le point 1 ; le choix de α_{n+1} se fait dans un deuxième temps, quand g_{n+1} est fixé : en le choisissant suffisamment proche de α_n , d'une façon qui dépende de g_{n+1} (c'est-à-dire, tel que $|\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \nu(g_{n+1}, \alpha_n)$), on peut assurer la convergence de la suite f_n . Ceci est cohérent avec le fait qu'il s'agit d'une suite produite par un schéma- C^r -AVC, par le point 2.

Si l'on veut utiliser la définition 3.10, ce qui est fait dans Berger (2022) est de construire un schéma- C^r -AVC : si à la place du centre de l'ouvert $U(g_n, \alpha_n)$, dans la construction de notre suite, on choisit une autre application g_{n+1} , toujours dans $U(g_n, \alpha_n)$, mais analytique, l'existence d'un tel schéma-AVC va nous assurer que notre nouvelle suite $f_n = g_n^{-1} \circ R_{\alpha_n} \circ g_n$, maintenant composée de fonctions analytiques, est encore convergente. De plus, comme les propriétés demandées à chaque étape aux fonctions g_n pour assurer l'ergodicité (ou la transitivité) sont ouvertes, la limite de la nouvelle suite garde les propriétés dynamiques recherchées. Cette formulation en termes de schéma-AVC a permis d'aller même au-delà de la réfutation de la conjecture de Birkhoff.

3.3. Au-delà de la conjecture de Birkhoff

Comme anticipé, les travaux de Berger (2022, 2024) permettent de dépasser le cadre de la conjecture de Birkhoff. L'objectif de cette sous-section est de présenter ces résultats ainsi que les principales idées.

Herman (1998) pose la question suivante : existe-t-il un difféomorphisme analytique, homotope à l'identité et conservatif, de l'anneau borné $\mathbb{A}_0$ ou de la sphère $\mathbb{S}$, avec un nombre fini de points périodiques et avec une orbite dense ? Le théorème de Berger (2022), dont nous avons évoqué la preuve dans la sous-section 3.2, donne une réponse positive à la question d'Herman pour l'anneau, mais pas pour la sphère. Dans Berger (2024), l'auteur montre le résultat suivant :

THÉORÈME 3.11 (Berger, 2024). — *Il existe un symplectomorphisme analytique de la sphère avec exactement deux points périodiques et une orbite dense.*

Ceci implique alors le corollaire suivant et permet de répondre à une autre question de Birkhoff (1927).

COROLLAIRE 3.12 (Berger, 2024). — *Il existe un symplectomorphisme analytique de la sphère avec un point fixe elliptique instable.*

Il s’agit du premier exemple d’un point fixe elliptique instable sur une surface pour un symplectomorphisme analytique. Ici, un point fixe P est instable pour la dynamique f s’il existe un voisinage V de P tel que l’orbite de tout voisinage U de P va sortir de V , c’est-à-dire tel que l’on ait $\cup_{n \geq 0} f^n(U) \not\subset V$ pour tout voisinage U de P .

Pour mettre en contexte le corollaire 3.12, Arnold (1994) conjecturait que tout équilibre elliptique d’un système hamiltonien réel analytique générique est instable, avec deux seuls types d’exceptions : d’une part, les fonctions hamiltoniennes avec partie quadratique de signe défini, d’autre part, les dynamiques génériques en dimension 2. En dimension 4, Kaloshin, Mather et Valdinoci (2004) montrent que génériquement un point elliptique totalement résonant, pour une application lisse symplectique, est instable. Fayad (2023) construit le premier exemple d’un système hamiltonien réel analytique, dans $\mathbb{R}^6$, avec un équilibre elliptique non résonant instable.

Ce qui permet d’aller au-delà de la conjecture de Birkhoff, dans Berger (2024), en relation avec la notion de schéma- C^r -AVC introduite dans la sous-section 3.2.2, est en fait le résultat suivant, que l’auteur appelle « principe AVC ». On dit qu’une propriété est réalisable par schéma- C^0 -AVC si elle est invariante par conjugaison C^0 et s’il existe un schéma- C^0 -AVC tel que toute application obtenue comme limite au point 2 de la définition 3.10 satisfait la propriété.

THÉORÈME 3.13 (Berger, 2024). — *Soit $\mathbb{M}$ une surface parmi l’anneau borné, la sphère et le disque. Toute propriété réalisable par schéma- C^0 -AVC est satisfaite par au moins un symplectomorphisme analytique de $\mathbb{M}$.*

Plusieurs propriétés dynamiques peuvent être réalisées aussi par des pseudo-rotations analytiques de la sphère. Nous avons déjà parlé de l’ergodicité d’une application par rapport à la mesure de Lebesgue et de difféomorphismes minimalement ergodiques ; on introduit rapidement la notion de difféomorphisme d’émergence maximale.

Étant donné un difféomorphisme f d’une variété compacte qui préserve une mesure de probabilité μ , grâce à l’application e qui associe à μ -presque tout point x de la variété sa mesure empirique, c’est-à-dire la mesure limite de la suite $(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)})_n$, on peut doter l’espace des mesures de probabilités invariantes d’une mesure de probabilité, qui est la décomposition ergodique de la mesure μ , c’est-à-dire $e_*\mu$. Si la mesure μ est ergodique, alors sa décomposition ergodique est une masse de Dirac en μ dans l’espace des mesures de probabilités invariantes. La notion d’émergence maximale mesure le comportement opposé : elle est maximale quand, pour décrire la décomposition ergodique de μ , on a besoin d’une infinité de mesures. Nous renvoyons à Berger (2017) pour plus de détails.

Récemment, en poussant la méthode de Berger (et notamment le théorème 3.13), Delaporte a pu montrer que bien d’autres propriétés dynamiques peuvent être réalisées par des pseudo-rotations analytiques.

THÉORÈME 3.14 (Delaporte, 2025, 2026). — *Il est possible de construire sur la sphère (ainsi que sur le disque) un symplectomorphisme analytique f tel que :*

- f est ergodique par rapport à la mesure de Lebesgue ;
- f est minimalement ergodique ;
- f est d'émergence maximale.

3.4. Pseudo-rotations de la sphère via déformation structurelle

Dans cette dernière partie, nous souhaitons donner quelques idées de la construction faite dans Berger (2024), qui permet notamment d'obtenir une pseudo-rotation analytique de la sphère avec une orbite dense. Nous allons essayer d'expliquer la philosophie générale, mais sans rentrer dans les détails techniques. Dans la preuve expliquée dans la section 3, la limite du schéma-AVC nous donne un symplectomorphisme réel analytique de $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$, qui ne préserve pas l'anneau borné, mais plutôt un autre anneau analytique un peu déformé (noté $\mathbb{A}'_0$). Ceci ne permet pas de passer aisément de l'anneau à la sphère, en obtenant toujours un symplectomorphisme entier de la sphère complexe.

La stratégie proposée dans Berger (2024) vise alors à obtenir une application qui préserve l'anneau borné, toujours symplectique, mais en s'autorisant à changer la structure complexe par rapport à laquelle l'application est analytique. En simplifiant et en laissant de côté les détails techniques, si l'on tire en arrière de telles applications sur la sphère (complexifiée), on peut obtenir le symplectomorphisme analytique voulu. Dans cette sous-section, tous les résultats, sauf mention explicite du contraire, font référence à Berger (2024).

3.4.1. Structures complexes et extensions holomorphes. — Considérons une surface symplectique $(\mathbb{M}, \Omega)$, où Ω est une forme symplectique, c'est-à-dire une 2-forme fermée, non dégénérée. Une *structure réelle analytique* pour $\mathbb{M}$ est la donnée d'un atlas $\mathcal{A}^\omega = (U_\alpha, \phi_\alpha)_\alpha$ tel que tout changement de carte est analytique par rapport à la structure standard sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. L'idée clé est alors de changer la structure réelle analytique par rapport à laquelle notre pseudo-rotation est analytique : ceci ne pose pas de problème, car, d'après Kutzschebauch et Loose (2000), il existe, à symplectomorphisme près, une unique structure réelle analytique, et il suffit donc de conjuguer par le bon symplectomorphisme la pseudo-rotation obtenue, afin de revenir à la structure réelle analytique standard.

Une façon d'obtenir une structure réelle analytique est de partir avec la donnée d'une *structure complexe* sur la surface. Une *structure presque complexe* est une section J du fibré des endomorphismes du fibré tangent de la surface $\mathbb{M}$, telle que $J^2 = -\text{Id}$; une *structure complexe* est une structure presque complexe J telle que la surface $\mathbb{M}$ admet un atlas $(U_\alpha, \phi_\alpha)_\alpha$ de cartes J -holomorphes, c'est-à-dire vérifiant $D\phi_\alpha \circ J = iD\phi_\alpha$. Cet atlas est celui qui nous donne la structure réelle analytique à partir de J . Il est possible de mettre une topologie C^∞ sur l'ensemble des structures presque complexes, et même une distance qui induit cette topologie et qui rend l'espace complet.

Une *complexification* d'une surface réelle $\mathbb{M}$ est une variété complexe $(\mathbb{M}_\bullet, J)$ telle que $\mathbb{M} \subset \mathbb{M}_\bullet$ et telle que pour tout $z \in \mathbb{M}$ il existe une carte J -holomorphe ϕ_α définie sur un voisinage V_α de z dans $\mathbb{M}_\bullet$ dont la restriction à $U_\alpha = \mathbb{M} \cap V_\alpha$ est une carte réelle

analytique de $\mathbb{M}$. Dès qu'on se donne alors une structure complexe qui anti-commute avec la conjugaison complexe ⁽¹²⁾, ceci nous donne une complexification d'une structure réelle analytique.

Supposons données une surface symplectique $(\mathbb{M}, \Omega)$ et une complexification $(\mathbb{M}_\bullet, J)$. La forme Ω se prolonge de façon J -holomorphe à $\mathbb{M}_\bullet$ s'il existe une 2-forme complexe $\Omega_\bullet$ sur $\mathbb{M}_\bullet$ telle que $\Omega_{\bullet|T\mathbb{M}} = \Omega$ et telle que pour toute carte J -holomorphe ϕ_α on obtient

$$(\phi_\alpha)^*(\psi(z_1, z_2)dz_1 \wedge dz_2) = \Omega_\bullet,$$

où ψ est une fonction holomorphe.

De même, étant donné une application f définie sur un voisinage complexe de $\mathbb{M}$ dans $\mathbb{M}_\bullet$, on dit que f est une *extension J -holomorphe* d'une application réelle si $f(\mathbb{M}) \subset \mathbb{M}$ et si f est J -holomorphe, c'est-à-dire $Df \circ J = J \circ Df$.

Nous rappelons deux résultats de rigidité concernant les structures complexes et les extensions holomorphes des formes symplectiques. On renvoie à Newlander et Nirenberg (1957) et à McDuff et Salamon (2012).

LEMME 3.15. — *Soit $(J_n)_n$ une suite de structures complexes qui converge en topologie C^∞ (sur l'espace des sections du fibré des endomorphismes) vers une structure presque complexe J_∞ . Alors J_∞ est une structure complexe.*

LEMME 3.16. — *Soit $(J_n)_n$ une suite de structures complexes qui converge en topologie C^∞ vers une structure complexe J_∞ . Soit Ω une forme symplectique sur $\mathbb{M}$. Supposons que :*

- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, la forme Ω admet une extension J_n -holomorphe Ω_n ;*
- *la suite $(\Omega_n)_n$ converge en topologie C^∞ (sur l'espace des 2-formes complexes) vers une forme complexe Ω_∞ .*

Alors Ω_∞ est une extension J_∞ -holomorphe de Ω .

3.4.2. Schéma-AVC en déformant la structure réelle analytique. — Nous nous sommes désormais familiarisés avec la construction par induction des pseudo-rotations : notre candidate pseudo-rotation est obtenue comme limite d'une suite d'applications $(f_n)_n$, elles aussi construites à partir d'une suite de symplectomorphismes $(g_n)_n$ et d'une suite de rationnels $(\alpha_n)_n$. En effet chaque f_n est définie comme

$$g_n \circ R_{\alpha_n} \circ g_n^{-1}.$$

Chaque g_n et α_n est produite par induction à partir de g_{n-1} et α_{n-1} , grâce au lemme suivant. Pour $\rho > 0$, notons $\mathbb{A}_\rho$ le ρ -voisinage de l'anneau borné $\mathbb{A}_0 = \mathbb{T} \times [-1, 1]$ dans sa complexification $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$.

12. Une structure complexe J anti-commute avec la conjugaison complexe σ si on a $\sigma \circ J = -J \circ \sigma$.

LEMME 3.17. — Soit g un symplectomorphisme lisse de $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ et soit $\mathcal{U}$ un voisinage en topologie C^∞ de $g|_{\text{int}(\mathbb{A}_0)}$. Pour tout $\rho > 1$, pour tout voisinage $\mathcal{W}_J$ en topologie C^∞ de la structure complexe standard J_0 , pour tout voisinage $\mathcal{W}_\Omega$ en topologie C^∞ de la forme complexe standard Ω_0 (extension J_0 -holomorphe de Ω), il existe un difféomorphisme lisse $\hat{g}$ de $\mathbb{A}_\rho$ sur son image tel que :

- $\hat{g}(\mathbb{A}_0) = \mathbb{A}_0$, c'est-à-dire $\hat{g}$ préserve l'anneau borné ;
- $\det D\hat{g}|_{\mathbb{A}_0} = 1$, c'est-à-dire sa restriction à l'anneau borné réel est symplectique ;
- $\hat{g}|_{\text{int}(\mathbb{A}_0)} \in \mathcal{U}$;
- $\hat{g}$ commute avec la conjugaison complexe⁽¹³⁾ ;
- $\hat{g}^*J_0 \in \mathcal{W}_J$ et $\hat{g}^*\Omega_0 \in \mathcal{W}_\Omega$.

En admettant pour l'instant le lemme 3.17, on peut déjà construire nos suites $(g_n)_n$ et $(\alpha_n)_n$: supposant avoir déjà g_{n-1} et α_{n-1} , dans le cadre lisse, on a déjà à disposition un difféomorphisme lisse (pas analytique) g tel que, si l'on construit g_n comme $g_{n-1} \circ g$, alors, en choisissant α_n suffisamment proche de α_{n-1} , on peut assurer que la suite $(f_n = g_n \circ R_{\alpha_n} \circ g_n^{-1})_n$ converge vers un symplectomorphisme ayant les bonnes propriétés dynamiques. On va alors appliquer le lemme 3.17 à cette application g . Notre nouvelle application g_n est alors définie comme

$$g_n = g_{n-1} \circ \hat{g} ;$$

observons que chaque g_n préserve alors l'anneau borné, elle est symplectique sur $\mathbb{A}_0$, et commute avec le conjugué, tout en étant définie sur un voisinage complexe de l'anneau borné. Le choix de α_n en fonction de α_{n-1} et de g_n nous permet d'assurer que la suite $(f_n)_n$ converge et que les propriétés dynamiques souhaitées sont préservées en passant à la limite. De plus, quitte à bien choisir les voisinages $\mathcal{W}_J$ et $\mathcal{W}_\Omega$, encore en fonction de g_{n-1} , on peut aussi assurer que la suite de structures complexes $(J_n := g_n^*J_0)_n$ converge vers une structure complexe J_∞ , et que la suite de formes complexes $(\Omega_n := g_n^*\Omega_0)_n$ converge vers une forme complexe Ω_∞ . Par le lemme 3.16, nous savons que Ω_∞ est une extension J_∞ -holomorphe de Ω , car chaque Ω_n est une extension J_n -holomorphe de Ω .

Quitte à tirer en arrière chaque f_n sur la sphère complexifiée, grâce à la projection standard $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} \rightarrow \text{int}(\mathbb{A}_0)$ où $N = (0, 0, 1)$ et $S = (0, 0, -1)$, on peut travailler avec une suite d'applications $(\pi^*f_n)_n$, qui converge vers une pseudo-rotation transitive (ceci vient de bonnes propriétés dynamiques préservées par la projection standard), analytique par rapport à une structure qui n'est pas forcément la structure standard : en effet, la limite de la suite va être la restriction d'une extension J_∞ -holomorphe, pas J_0 -holomorphe⁽¹⁴⁾.

Nous terminons en donnant quelques idées de la preuve du lemme 3.17.

13. Par conjugaison complexe, on entend une application σ du fibré tangent complexifié de la surface dans lui-même, telle que $\sigma \circ J = -J \circ \sigma$.

14. On passe sous le tapis les détails techniques pour tirer en arrière aussi les structures complexes et les 2-formes holomorphes.

Idée de la preuve du lemme 3.17. — Le théorème 3.1 nous donne un symplectomorphisme analytique $\tilde{g}$ de $\mathbb{A}$, qui admet une extension J_0 -holomorphe sur $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$, et qui est aussi proche qu'on veut de g . Le problème est que $\tilde{g}$ ne préserve pas l'anneau borné. On va alors considérer une fonction « cloche » β dont le support est contenu dans le complexifié de $\text{int}(\mathbb{A}_0)$, définie dans le complexifié, telle que $\bar{g} := \beta\tilde{g} + (1 - \beta)\text{Id}$ préserve maintenant l'anneau borné, tout en restant proche de g sur $\text{int}(\mathbb{A}_0)$. Le problème de $\bar{g}$ est que, maintenant, elle n'est plus forcément symplectique. Quitte à composer avec une application proche de l'inclusion, on peut aussi surmonter ce problème et obtenir une application finale $\hat{g}$, encore proche de g , qui préserve l'anneau, et qui est symplectique : observons que $\hat{g}^*J_0 \neq J_0$ et $\hat{g}^*\Omega_0 \neq \Omega_0$, néanmoins ils vont rester aussi proches qu'on veut de J_0 et Ω_0 , respectivement. Ceci permet en fin de compte d'obtenir l'application recherchée. $\square$

Références

- Dmitriy Anosov et Anatole Katok (1970). « New examples of ergodic diffeomorphisms of smooth manifolds », *Uspehi Mat. Nauk* **25** (4(154)), p. 173-174.
- Vladimir I. Arnold (1994). « Mathematical problems in classical physics », in : *Trends and perspectives in applied mathematics*. Appl. Math. Sci. T. 100. Springer, p. 1-20.
- Arthur Avila, Bassam Fayad, Patrice Le Calvez, Disheng Xu et Zhiyuan Zhang (2020). « On mixing diffeomorphisms of the disc », *Invent. Math.* **220** (3), p. 673-714.
- Shilpak Banerjee et Philipp Kunde (2019). « Real-analytic AbC constructions on the torus », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **39** (10), p. 2643-2688.
- Pierre Berger (2017). « Emergence and non-typicality of the finiteness of the attractors in many topologies », *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* **297** (1), p. 1-27.
- (2022). « Analytic pseudo-rotations », *Ann. of Math.* (à paraître), arXiv : [2210.03438 \[math.DS\]](#).
- (2024). « Analytic pseudo-rotations II : a principle for spheres, disks and annuli », arXiv : [2402.15303 \[math.DS\]](#).
- Abram S. Besicovitch (1951). « A problem on topological transformations of the plane. II », *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **47**, p. 38-45.
- George D. Birkhoff (1927). *Dynamical systems*. American Mathematical Society Colloquium Publications, T. 9.
- (1941). « Some unsolved problems of theoretical dynamics », *Science* **94**, p. 598-600.
- Barney Bramham (2015). « Periodic approximations of irrational pseudo-rotations using pseudoholomorphic curves », *Ann. of Math. (2)* **181** (3), p. 1033-1086.
- Barney Bramham et Zhiyuan Zhang (2025). « On pseudo-rotations of the annulus with generic rotation number », *J. Mod. Dyn.* **21**, p. 497-541.

- Marc Chaperon (1984). « Une idée du type “géodésiques brisées” pour les systèmes hamiltoniens », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **298** (13), p. 293-296.
- Sylvain Crovisier (2006). « Exotic rotations ». Notes de cours. URL : <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~sylvain.crovisier/grenoble2006.pdf>.
- Yann Delaporte (2025). « Analytic pseudo-rotations displaying ergodicity or emergence on the sphere and disk », arXiv : [2507.13029](https://arxiv.org/abs/2507.13029) [math.DS].
- (2026). « Analytic symplectomorphisms displaying minimal ergodicity on the sphere, cylinder and disk », arXiv : [2603.06053](https://arxiv.org/abs/2603.06053) [math.DS].
- Albert Fathi et Michel Herman (1977). « Existence de difféomorphismes minimaux », in : *Système dynamique I – Varsovie*. Astérisque **49**, p. 37-59.
- Bassam Fayad (2023). « Lyapunov unstable elliptic equilibria », *J. Amer. Math. Soc.* **36** (1), p. 81-106.
- Bassam Fayad et Anatole Katok (2004). « Constructions in elliptic dynamics », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **24** (5), p. 1477-1520.
- Bassam Fayad et Raphaël Krikorian (2009). « Herman’s last geometric theorem », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **42** (2), p. 193-219.
- (2018). « Some questions around quasi-periodic dynamics ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. III*, p. 1909-1932.
- Bassam Fayad et Maria Saprykina (2005). « Weak mixing disc and annulus diffeomorphisms with arbitrary Liouville rotation number on the boundary », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **38** (3), p. 339-364.
- John Franks (1988). *Ergod. Theory Dynam. Syst.* **8** (8), p. 99-107.
- (1992). « Geodesics on S^2 and periodic points of annulus homeomorphisms », *Invent. Math.* **108** (2), p. 403-418.
- John Franks et Michael Handel (2003). « Periodic points of Hamiltonian surface diffeomorphisms », *Geom. Topol.* **7**, p. 713-756.
- Hillel Furstenberg (1961). « Strict ergodicity and transformation of the torus », *Am. J. Math.* **83**, p. 573-601.
- Viktor Ginzburg et Başak Gürel (2018). « Hamiltonian pseudo-rotations of projective spaces », *Invent. Math.* **214** (3), p. 1081-1130.
- Michel Herman (1998). « Some open problems in dynamical systems ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Berlin 1998. Vol. II*, p. 797-808.
- Vadim Kaloshin, John N. Mather et Enrico Valdinoci (2004). « Instability of resonant totally elliptic points of symplectic maps in dimension 4 », in : *Analyse complexe, systèmes dynamiques, sommabilité des séries divergentes et théories galoisiennes. II*. Astérisque **297**, p. 79-116.
- Anatole Katok (1980). « Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (51), p. 137-173.
- Frank Kutzschebauch et Frank Loose (2000). « Real analytic structures on a symplectic manifold », *Proc. Amer. Math. Soc.* **128** (10), p. 3009-3016.

- Patrice Le Calvez (2016). « A finite dimensional approach to Bramham’s approximation theorem », *Ann. Inst. Fourier* **66** (5), p. 2169-2202.
- Patrice Le Calvez et Jean-Christophe Yoccoz (1997). « Un théorème d’indice pour les homéomorphismes du plan au voisinage d’un point fixe », *Ann. of Math. (2)* **146** (2), p. 241-293.
- Frédéric Le Roux et Sobhan Seyfaddini (2022). « The Anosov-Katok method and pseudo-rotations in symplectic dynamics », *J. Fixed Point Theory Appl.* **24** (2).
- Dusa McDuff et Ditmar Salamon (2012). *J-holomorphic curves and symplectic topology*. Second Edition. American Mathematical Society Colloquium Publications, T. 52.
- August Newlander et Louis Nirenberg (1957). « Complex analytic coordinates in almost complex manifolds », *Ann. of Math. (2)* **65**, p. 391-404.
- Helmut Rüssmann (1967). « Über die Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung », *Math. Ann.* **169**, p. 55-72.
- Lev G. Shnirelman (1930). « An example of a transformation of the plane », *Izv. Donsk. Polytech. Inst* **14**, p. 64-74.
- Claude Viterbo (1991). « An introduction to symplectic topology », in : *Journées “Équations aux Dérivées Partielles” (Saint Jean de Monts, 1991)*. École Polytech., Palaiseau, Exp. No. II, 9.
- Alistair Windsor (2001). « Minimal but not uniquely ergodic diffeomorphisms », in : *Smooth Ergodic Theory and Its Applications*. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, AMS, T. 69, p. 809-824.

Anna Florio

Ceremade

Université Paris Dauphine-PSL

E-mail : `florio@ceremade.dauphine.fr`