

Séminaire N. Bourbaki

SAMEDI 18 NOVEMBRE 2023

Institut Henri Poincaré (amphithéâtre Hermite)
11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris

10h00 Alexandre AFGOUSTIDIS
Progrès récents sur les représentations supercuspidales

Soit G un groupe réductif sur un corps local non-archimédien F . Pour les questions de classification des représentations lisses irréductibles de G , l'étude des représentations supercuspidales – celles dont les coefficients matriciels sont à support compact modulo le centre – est en quelque sorte le noyau dur. Les progrès dans cette étude ont été continus depuis cinquante ans. Dans des cas « modérés » où la caractéristique résiduelle de F est suffisamment grande relativement à G , on disposait depuis 2001 d'une construction fort générale de représentations supercuspidales, décrite par J.-K. Yu sur la base de nombreux travaux antérieurs. Mais les avancées récentes ont rendu le tableau beaucoup plus complet et beaucoup plus clair. Par exemple, les travaux de J. Fintzen, T. Kaletha et L. Spice fournissent (dans le cas modéré) une classification des représentations supercuspidales, une formule explicite pour « presque tous » leurs caractères, ainsi qu'une correspondance de Langlands explicite pour les paquets entièrement supercuspidaux. Bien que les constructions s'appuient de façon cruciale sur les représentations de groupes finis et la géométrie des immeubles, les formules de caractère et la description des paquets de Langlands présentent des parallèles saisissants avec le cas des groupes réels.

11h30 Pierre COLMEZ
Prolongement analytique de fonctions ζ et de fonctions L

Les travaux de Wiles sur le théorème de Fermat ont mis en évidence la puissance des méthodes p -adiques pour prouver l'existence de prolongements analytiques de fonctions ζ et L complexes. Ces méthodes se sont considérablement sophistiquées et ont débouché, ces dernières années, sur une moisson de beaux résultats : conjecture de Hasse–Weil pour les courbes de genre 2, holomorphie des fonctions L des puissances symétriques de formes modulaires, etc. Nous présenterons certaines de ces avancées.

14h30 Victoria HOSKINS

Two proofs of the $P = W$ conjecture,

after Maulik–Shen, Hausel–Mellit–Minets–Schiffmann

The non-abelian Hodge theorem gives a diffeomorphism between the moduli space of Higgs bundles on a smooth projective complex curve and the character variety of (twisted) representations of its fundamental group. The $P = W$ conjecture of de Cataldo, Hausel and Migliorini predicts that via the corresponding isomorphism on cohomology, the perverse filtration for the Hitchin fibration on the Higgs moduli space is identified with the weight filtration of the mixed Hodge structure on the character variety.

We will discuss two recent proofs of the $P = W$ conjecture due to Maulik–Shen and Hausel–Mellit–Minets–Schiffmann. Since the cohomology of the Higgs moduli space is generated by tautological classes (Markman) and their weights on the character variety are known (Shende), the $P = W$ conjecture reduces to describing the interaction between the tautological classes and the perverse filtration. The proof of Maulik–Shen combines support theorems for meromorphic Hitchin fibrations (after Ngô and Chaudouard–Laumon), vanishing cycle techniques and Yun’s global Springer theory, which allows them to determine the strong perversity of tautological classes by pulling back to a parabolic Higgs moduli space. The proof of Hausel–Mellit–Minets–Schiffmann shows the P - and W -filtrations both agree with a third representation-theoretic filtration for an \mathfrak{sl}_2 -triple in a Lie algebra of polynomial Hamiltonian vector fields, which acts on the cohomology via Hecke operators and cup products by tautological classes.

16h00 Jérôme POINEAU

Cohomologie des espaces de modules de courbes via la géométrie tropicale et les complexes de graphes,

d’après M. Chan, S. Galatius et S. Payne

Notre connaissance de la cohomologie singulière de l’espace de modules \mathcal{M}_g des courbes lisses de genre g est lacunaire. Pire encore, jusqu’à très récemment, les résultats à notre disposition semblaient pointer dans des directions contradictoires : les groupes de cohomologie de \mathcal{M}_g sont nuls en degré supérieur à $4g - 5$, de dimension au plus exponentielle en \sqrt{g} en degré inférieur à $2g/3$, mais sa caractéristique d’Euler croît plus vite qu’une exponentielle en g . Nous présenterons des travaux récents qui permettent d’exhiber de nouveaux exemples de groupes non nuls dans la cohomologie de \mathcal{M}_g , et même certaines familles, pour des degrés de la forme $4g - k$, avec k fixé, dont la dimension présente une croissance au moins exponentielle en g . La démonstration repose sur des liens précis établis entre la cohomologie de l’espace de modules des courbes et celle de variantes de nature combinatoire : espace de modules des courbes tropicales (graphes métriques pondérés) et complexes de graphes de M. Kontsevich.