

# Séminaire N. Bourbaki

**SAMEDI 19 NOVEMBRE 2022**

Institut Henri Poincaré (amphi. Hermite)  
11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris

**10h00** Javier FRESÁN  
**La conjecture des dénominateurs non bornés,**  
*d'après Calegari, Dimitrov et Tang*

---

Soit  $f$  une forme modulaire pour un sous-groupe d'indice fini de  $SL_2(\mathbf{Z})$  dont les coefficients de Fourier sont algébriques. Il résulte de la théorie classique des formes modulaires que les coefficients de  $f$  sont à dénominateurs bornés lorsque le sous-groupe est de congruence. À la fin des années 60, Atkin et Swinnerton-Dyer ont conjecturé que, réciproquement, une forme à dénominateurs bornés est toujours modulaire pour un sous-groupe de congruence. J'expliquerai une preuve récente de cette conjecture due à Calegari, Dimitrov et Tang. Elle repose sur de belles interactions entre un nouveau théorème d'algèbricité pour les séries entières, la théorie de Nevanlinna pour des uniformisations explicites du plan complexe privé des racines de l'unité et le fait que  $SL_2(\mathbf{Z}(1/p))$  possède la propriété des sous-groupes de congruence.

**11h30** François GOLSE  
**Validité de la théorie cinétique des gaz : au-delà de l'équation de Boltzmann,**  
*d'après T. Bodineau, I. Gallagher, L. Saint-Raymond et S. Simonella*

---

L'obtention d'une justification rigoureuse de la théorie cinétique des gaz à partir du principe fondamental de la dynamique, dû à Newton, pour un grand nombre de sphères identiques interagissant par collisions binaires élastiques, est un problème formulé par Hilbert en 1900 (6<sup>e</sup> problème). En 1975, Lanford a démontré la validité de l'équation de Boltzmann sur un intervalle de temps très court, de l'ordre d'une fraction du laps de temps moyen entre deux collisions successives subies par une même particule. Ce résultat de Lanford peut être interprété comme une sorte de « loi des grands nombres » lorsque le nombre de particules tend vers l'infini. Ce point de vue pose plusieurs questions.

D'abord, le cœur de l'argument utilisé par Boltzmann pour aboutir à l'équation portant son nom est l'hypothèse que deux particules sur le point d'entrer en collision sont presque indépendantes statistiquement. Ceci suggère d'examiner la validité de cette hypothèse en étudiant la dynamique des corrélations entre particules. D'autre part, l'interprétation de l'équation de Boltzmann comme loi des grands nombres conduit à étudier précisément les fluctuations de la mesure empirique dans l'espace des phases autour de sa moyenne (dont l'évolution est décrite par l'équation de Boltzmann). Une série d'articles récents de T. Bodineau, I. Gallagher, L. Saint-Raymond et S. Simonella répond à ces diverses questions et permet d'aller au-delà de l'équation de Boltzmann dans la compréhension de la théorie cinétique des gaz.

**14h30** Benjamin KRAUSE  
**Pointwise Ergodic Theory after Jean Bourgain: Examples and Entropy**

---

In this talk, we will explain how Bourgain combined elementary computation with a deep understanding of the entropic method to prove his pointwise ergodic theorem. The focus throughout will be on the intuition and heuristic which led him to his proof.

16h00 Silvain RIDEAU-KIKUCHI

**Sur un théorème de Lang–Weil tordu,**

*d'après Ehud Hrushovski, Kadattur V. Shuddhodan et Yakov Varshavsky*

---

Le théorème d'approximation de Lang–Weil donne une estimation du nombre de points dans une variété  $V$  (géométriquement intègre) sur un corps fini  $F$  : il y en a de l'ordre de  $|F|^d$  où  $d$  est la dimension de la variété  $V$ . Puisque  $F$  est le corps fixé d'un automorphisme de Frobenius  $\phi$ , cette question peut se reformuler comme celle d'estimer le nombre de points dans l'intersection de la diagonale de  $V^2$  avec le graphe de  $\phi$ . Dans cet exposé, nous considérerons une généralisation, due à Hrushovski, de cet énoncé à d'autres variétés que la diagonale et nous exposerons les ingrédients d'une preuve récente par Shuddhodan et Varshavsky.

Nous exposerons aussi certaines des nombreuses conséquences de cet énoncé en dynamique algébrique, ainsi qu'en théorie des modèles. L'une d'entre elle, particulièrement frappante, est que, de même qu'Ax avait pu, grâce aux estimations de Lang–Weil, donner une caractérisation de la « théorie des corps finis », ces estimations tordues permettent de caractériser la « théorie des automorphismes de Frobenius » et de montrer que c'est la théorie d'un automorphisme générique.