Séminaire N. Bourbaki

SAMEDI 14 JUIN 2025

Institut Henri Poincaré (amphithéâtre Charles Hermite)
11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris

11h00 Ana CARAIANI
The geometrization of the local Langlands correspondence, *after Fargues and Scholze*

The Langlands program is an intricate network of conjectures that connect different areas of mathematics, such as number theory, algebraic geometry, and representation theory. There are several flavours of the Langlands program: local and global, arithmetic and geometric. Traditionally, the arithmetic Langlands program, in the setting of p-adic fields and number fields, has not been able to benefit from the flexibility available in other, more geometric settings.

In this talk, we give an overview of the recent work of Fargues and Scholze, which gives a geometrization of the local Langlands correspondence and which works in particular for p-adic fields. One concrete outcome of this work is a general construction of semi-simple local Langlands parameters attached to irreducible smooth representations of p-adic groups.

In fact, the work of Fargues and Scholze gives much more than this construction, by introducing powerful new techniques and structures from the geometric Langlands program to this setting. The key geometric object underlying this work is the moduli stack of vector bundles (or, more generally, G-bundles) on the Fargues–Fontaine curve. We will describe the geometry of this space, its connection to the representation theory of p-adic groups, and give a flavour of the additional structures it allows us to access.

To give a sense of the tremendous impact that the work of Fargues and Scholze has already had on the field, we will end by mentioning a few striking applications that have been developed by various researchers since then: to the representation theory of p-adic groups and to the cohomology of local and global Shimura varieties.

14h30 Antoine CHAMBERT-LOIR
La logique continue des corps globalement valués

Un corps globalement valué est un corps muni d'une famille de valeurs absolues satisfaisant à une formule du produit. Les corps de nombres ou les corps de fonctions d'une variable fournissent des exemples classiques, et fondamentaux, d'une telle structure algébrique; la théorie de Nevanlinna permet de construire une telle structure sur le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$. Ces corps globalement valués peuvent être abordés dans le cadre de la logique continue (pour laquelle les prédicats sont à valeurs réelles), et une telle étude a été entreprise par Ben Yaacov et Hrushovski il y a presque 10 ans, fournissant un cadre modèle-théorique pour la théorie diophantienne des hauteurs. Un des premiers résultats fondamentaux de la théorie affirme que le corps des nombres algébriques, avec sa structure (essentiellement unique) de corps globalement valué, est existentiellement clos : tout système d'égalités et inégalités polynomiales et d'inégalités strictes entre hauteurs possède une solution en nombres algébriques, pourvu qu'il en possède une dans une extension globalement valuée. La démonstration, due à Szachniewicz, s'inspire de celle proposée par Ben Yaacov et Hrushovski dans le cas des corps de fonctions : alors que cette dernière utilisait de manière cruciale la description par Boucksom, Demailly, Păun et Peternell du cône des courbes mobiles dans une variété projective, le cas des corps de nombres repose sur des résultats récents de théorie d'Arakelov.

16h00 Frédéric DÉGLISE
Théorie de l'homotopie motivique et groupes d'homotopie stables, *d'après Morel–Voevodsky, Isaksen–Wang–Xu, ...*

Dès 1924, Lefschetz proposait d'appliquer les méthodes de la topologie algébrique naissante (l'*Analysis situs* de Poincaré) à la géométrie algébrique. A la fin du XXème siècle, Voevodsky renouvelle cette thématique dans sa thèse, et met au point avec Morel la théorie de l'$\mathbb{A}^1$-homotopie, aussi appelée homotopie motivique puisqu'elle offre un cadre englobant la théorie des complexes motiviques imaginée par Beilinson. Depuis son application spectaculaire aux conjectures de Milnor et Bloch–Kato, le succès de la théorie ne s'est pas démenti, voyant s'épanouir une foison de développements : fibrés vectoriels (conjecture de scindage de Murthy), cobordisme algébrique, groupe de Galois motivique, groupes de Chow—Witt et géométrie énumérative quadratique...

Les développements de l'$\mathbb{A}^1$-homotopie ont été particulièrement guidés par l'analogie avec l'homotopie classique et l'adaptation de ses méthodes. Cependant, les travaux de Morel sur l'homotopie de la sphère motivique et les résultats de Voevodsky sur les opérations de Steenrod en cohomologie motivique montrent qu'en retour, l'$\mathbb{A}^1$-homotopie apporte littéralement une épaisseur supplémentaire à la topologie. Plus récemment, des travaux initiés par Morel et Dugger–Isaksen ont montré comment exploiter cette dimension supplémentaire pour obtenir de nouveaux résultats en homotopie classique. En particulier, ces progrès ont permis d'avancer sur le calcul des groupes d'homotopie stable et ont contribué à la résolution du problème de l'invariant de Kervaire par Lin, Wang et Xu.

L'exposé présentera les techniques utilisées pour parvenir à ces résultats, en mettant en lumière les interactions entre homotopies classique et motivique ainsi que leurs applications récentes.