# Séminaire N. Bourbaki

## SAMEDI 23 NOVEMBRE 2024

Institut Henri Poincaré (amphithéatre Hermite)
11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris

**10h00** Michael HARRIS
**Valeurs critiques des fonctions *L* de puissances symétriques de formes modulaires**

---

Suite à des travaux de Shimura et d'autres, Deligne a énoncé une conjecture reliant les valeurs de fonctions $L$ des motifs sur $\mathbb{Q}$ en certains points entiers à des périodes d'intégrales de formes différentielles algébriques sur les classes d'homologie rationnelle. Cette conjecture a été le point de départ d'une série de conjectures de plus en plus précises sur les valeurs exactes des fonctions $L$ motiviques aux points entiers, et il existe une vaste littérature traitant de nombreux exemples de ces conjectures en utilisant les méthodes de la théorie des formes automorphes. Cependant, l'une des familles d'exemples qui ont motivé la conjecture initiale de Deligne —le cas des puissances symétriques des motifs attachés aux formes modulaires classiques— est restée inaccessible pendant plus de 40 ans. Dans un travail remarquable récent, Shih-Yu Chen a résolu cette conjecture pour les formes modulaires de poids au moins 5. J'expliquerai les grandes lignes de l'argument de Chen, d'une virtuoisité encyclopédique quant aux méthodes mises en jeu et développées par les spécialistes —y compris par Chen lui-même— depuis la parution de l'article où Deligne énonce sa conjecture. Une généralisation des résultats récents de Harder et Raghuram sur la cohomologie d'Eisenstein joue un rôle central dans la démonstration de Chen.

**11h30** Olivier BENOIST
**Lissification de cycles algébriques de petite dimension**, *d'après Kollár et Voisin*

---

Soit $X$ une variété algébrique complexe projective et lisse. Une question ancienne de Borel et Haefliger demande si toute sous-variété algébrique de $X$ (possiblement singulière) est homologiquement équivalente à une combinaison linéaire à coefficients entiers de sous-variétés algébriques lisses de $X$. En général, cette question est trop optimiste, et on y connaît des contre-exemples depuis longtemps. Le but de cet exposé est d'expliquer comment János Kollár et Claire Voisin ont apporté une réponse positive à la question de Borel et Haefliger, pour les sous-variétés de dimension inférieure à la moitié de la dimension de $X$.

## **14h30** Guillaume BARRAQUAND
## **Le paysage dirigé**, *d'après Duncan Dauvergne, Janosch Ortmann et Bálint Virág*

Ulam a conjecturé en 1961 que la plus longue sous-suite croissante dans une permutation de $\{1, \dots, n\}$ choisie au hasard uniformément a une longueur de l'ordre de $\sqrt{n}$. On sait aujourd'hui que lorsque $n$ tend vers l'infini, cette longueur fluctue autour de $2\sqrt{n}$ selon la loi de Tracy–Widom, initialement introduite pour décrire les fluctuations de valeurs propres de matrices aléatoires. Que peut-on dire plus précisément de la, ou des, sous-suites de longueur maximale ? Cette suite d'entiers aléatoires, correctement renormalisée, converge vers une courbe fractale particulière. Fort différente d'un mouvement Brownien, elle est définie comme la géodésique associée à un champ de distances aléatoire appelé le paysage dirigé.

Ce champ aléatoire a été introduit récemment par Dauvergne, Ortmann et Virág. Loin de concerner seulement les permutations aléatoires, le paysage dirigé est la limite d'échelle universelle des modèles de la classe de Kardar–Parisi–Zhang, incluant modèles de croissance d'interface, percolation de premier ou dernier passage, systèmes de particules en interaction, et bien d'autres modèles. La construction du paysage dirigé s'appuie sur une étonnante propriété d'isométrie de la correspondance de Robinson–Schensted–Knuth. Après avoir expliqué les motivations physiques, nous verrons pourquoi et comment cette isométrie intervient dans la construction, et nous discuterons de quelques-unes des remarquables propriétés du paysage dirigé.

## **16h00** Yuval WIGDERSON
## **Upper bounds on diagonal Ramsey numbers**, *after Campos, Griffiths, Morris, and Sahasrabudhe*

Ramsey's theorem states that if $N$ is sufficiently large, then no matter how one colors the edges among $N$ vertices with two colors, there are always $k$ vertices spanning edges in only one color. Given this theorem, it is natural to ask "how large is sufficiently large?" Ramsey's original proof showed that $N = k!$ is sufficient, and five years later Erdős and Szekeres improved this bound to $N = 4^k$. And then progress stalled for almost 90 years.

In this talk, I will present the history of the problem, and discuss some of the ideas used in the recent breakthrough of Campos–Griffiths–Morris–Sahasrabudhe, who proved that $N = 3.993^k$ is sufficient. In particular, I will try to highlight the central role of *book graphs*, which play an important role in all known approaches to this problem.