Séminaire N. Bourbaki

SAMEDI 29 NOVEMBRE 2025

Institut Henri Poincaré (amphithéatre Charles Hermite)
11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris

10h00 Giada FRANZ
Minimal surfaces via equivariant eigenvalue optimization,
after Karpukhin, Kusner, McGrath, and Stern

In 1996, Nadirashvili discovered a beautiful connection between minimal surfaces in round spheres and an optimization problem for Laplace eigenvalues on a surface. This gave a surprising analytic perspective on minimal surfaces and opened the way for many important results.

Here, we will focus on the recent paper from 2024 by Karpukhin–Kusner–McGrath–Stern, who use equivariant eigenvalue optimization to construct many new examples of minimal surfaces in the three-dimensional unit sphere $\mathbb{S}^3$. Using similar methods, they also find many new free boundary minimal surfaces in the three-dimensional unit ball $\mathbb{B}^3$, in particular obtaining examples for every topological type. This was a central open problem in the field, posed by Fraser–Li in 2014, whose analogue in $\mathbb{S}^3$ was solved by Lawson in 1970. Note that free boundary minimal surfaces in round balls enjoy a connection with another eigenvalue problem, namely the Steklov problem, by a result of Fraser–Schoen.

In the talk, we will give an overview of the results. We will present the ingredients in the proof of Karpukhin–Kusner–McGrath–Stern (including previous results by Petrides from 2014 and Karpukhin–Stern from 2020) and we will focus on the novel techniques of the paper. These have already spurred important advances in the study of Laplace eigenvalue optimization by Petrides (2024) and Karpukhin–Petrides–Stern (2025).

11h30 Serge CANTAT
Degrés Dynamiques

Soient X une variété projective irréductible et $f\colon X \to X$ une transformation rationnelle de X. Nous disposons alors d'un système dynamique algébrique. L'espace des phases est X et l'évolution d'un point x de X est régie par f : la trajectoire décrite par x au cours du temps est la suite x, $f(x)$, $f(f(x))$, ..., $f^n(x)$, ..., où f^n désigne la n-ème itération de f. Les degrés dynamiques de f sont une collection finie de nombres réels positifs $\lambda_k(f)$, un pour chaque codimension k comprise entre 0 et la dimension de X. Par exemple, lorsque X est l'espace projectif et H_k est un sous-espace projectif de codimension k, $\lambda_k(f)$ mesure le taux de croissance exponentiel du degré de $(f^n)^* H_k$, quand n tend vers $+\infty$. Les degrés dynamiques permettent donc d'appréhender la complexité d'un tel système dynamique. Cet exposé présentera les principales propriétés des degrés dynamiques, notamment leur construction, leur invariance par conjugaison, leur semi-continuité et leur lien avec des notions plus classiques en systèmes dynamiques.

14h30 Christian AUSONI
Réfutation de la Conjecture du Télescope de Ravenel, *d'après Burklund–Hahn–Levy–Schlank*

La catégorie des spectres Sp —au sens de la topologie algébrique— est apparue à la fin des années 50 avec les travaux de Lima. Un spectre est un objet représentant une théorie de cohomologie sur des espaces, et la construction d'une nouvelle théorie de cohomologie et son étude peuvent ainsi être réalisées au niveau topologique (ou homotopique) dans la catégorie Sp. En *algèbre supérieure* développée par Lurie, Sp se voit promue en une $(\infty, 1)$-catégorie stable monoïdale symétrique, parmi lesquelles elle joue un rôle généralisant celui de la catégorie des groupes abéliens au sein des catégories abéliennes.

La théorie de l'homotopie chromatique est l'étude de la catégorie Sp via ses localisations par rapport à ses idéaux premiers. Son développement a commencé à la fin des années 70 avec les travaux de Ravenel et une série de conjectures célèbres. Toutes hormis la Conjecture du Télescope ont été démontrées par Devinatz, Hopkins et Smith à la fin des années 80. En particulier, les idéaux premiers de Sp ont été classifiés : pour chaque nombre premier ordinaire $p \in \mathbb{Z}$, et chaque *hauteur* $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, il existe un idéal premier (p, n), et un corps premier $K(n) \in \mathrm{Sp}$ connu sous le nom K-théorie de Morava, interpolant pour p fixé entre $K(0) = \mathbb{Q}$ et $K(\infty) = \mathbb{F}_p$. La Conjecture du Télescope prédit que la théorie de la cohomologie $K(n)$ détecte toute l'information encodée dans la couche monochromatique de hauteur n, ou, en termes plus précis, que la catégorie télescopiquement localisée $\mathrm{Sp}_{T(n)}$ coïncide avec la sous-catégorie $\mathrm{Sp}_{K(n)}$ des spectres $K(n)$-locaux. Elle est valable pour $n = 0$ et $n = 1$, mais on s'attendait à ce qu'elle soit fausse pour $n \geq 2$.

Il a fallu attendre 2023 pour qu'il soit démontré par Burklund, Hahn, Levy et Schlank que la Conjecture du Télescope est fausse : ils ont exhibé pour chaque premier p et hauteur $n \geq 2$ un contre-exemple explicite. Dans cet exposé, je donnerai un aperçu de l'homotopie stable chromatique et de la Conjecture du Télescope de Ravenel, puis j'esquisserai la construction des contre-exemples et mentionnerai quelques conséquences sur notre compréhension de l'homotopie stable.

16h00 Amador MARTIN-PIZARRO
Model theory, differential algebra and functional transcendence, *after Freitag, Jaoui, and Moosa*

A fundamental problem in the study of algebraic differential equations is determining the possible algebraic relations among different solutions of a given differential equation. Freitag and Jaoui together with Marker and Nagloo established transcendence results for the solutions of differential equations of Liénard type, generalizing existing work by Poizat. They noticed that, given any finite collection of pairwise distinct (non-trivial) solutions to the Poizat equation, a differential equation of Liénard type over the constants of order 2, the solutions and their first derivatives are algebraically independent, that is, they satisfy no non-trivial algebraic relation. There are two steps for this: for Poizat's equation, an algebraic dependence between finitely many solutions and their first derivatives arises from a certain algebraic dependence between two of them. Now, Poizat's equation has the D_2 property, meaning that given two distinct solutions, there is no non-trivial algebraic dependence between the solutions and their first derivatives.

Poizat's equation is actually *strongly minimal*, that is, irreducible of (Morley) rank 1, a fundamental notion in model theory which allows model theorists to analyse the geometric behaviour of algebraic differential equations in terms of the strongly minimal ones as the building blocks. The trichotomy theorem of Hrushovski and Sokolović for differentialy closed fields of characteristic 0 implies that, if a strongly minimal differential equation of order n defined over the constants has property D_2, then any finite set collection of pairwise distinct solutions together with their derivatives up to order $n-1$ are algebraically independent. Not every strongly minimal differential equation defined over the constants has property D_2. For example, the j-invariant function, which encodes the isomorphism classes of elliptic curves over the complex numbers, is a solution of a differential equation defined over the constants expressed in terms of the schwarzian derivative. Freitag and Scanlon showed that this equation is strongly minimal, using Pila's modular Ax-Schanuel, yet it does not have property D_2, witnessed indeed by the modular relations given by Hecke correspondences.

Now, showing strong minimality for a differential equation is far from obvious, for it already requires a good understanding of the relations between its solutions. Freitag, Jaoui and Moosa have generalised in recent work the above for any differential equation given by an irreducible differential polynomial of order n defined over the constants, regardless of whether the equation is strongly minimal. That is, they show that, if the equation has property D_2, any finite collection of pairwise distinct solutions together with their derivatives up to order $n-1$ are algebraically independent. Their proof is extremely elegant and short, yet it uses in a clever way fundamental results of the model theory of differentially closed fields of characteristic 0. The goal of this talk is to introduce the model-theoretic tools at the core of the proof of Freitag, Jaoui and Moosa, without assuming a deep knowledge in (geometric) model theory (but some familiarity with basic notions in algebraic geometry).