Séminaire N. Bourbaki

SAMEDI 29 MARS 2025

Institut Henri Poincaré (amphithéâtre Charles Hermite)
11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris

10h00 Wee Teck GAN
Relative Langlands duality,
after Ben-Zvi, Sakellaridis, and Venkatesh

We shall discuss a recent work of Ben-Zvi, Sakellaridis, and Venkatesh which proposes a new paradigm for the relative Langlands program. The relative Langlands program is traditionally associated with the study of periods integrals of automorphic forms and their relation to analytic properties of *L*-functions. An earlier work of Sakellaridis and Venkatesh had proposed that the framework for this study should be that of spherical varieties. Ben-Zvi, Sakellaridis, and Venkatesh propose a larger framework for the relative Langlands program, that of hyperspherical varieties, which is a class of symplectic varieties with a Hamiltonian group action. With this larger framework, they envision a duality operation on hyperspherical varieties which explains many examples and phenomena already studied in the literature. This purported duality is partially motivated by a duality of boundary conditions induced by the *S*-duality of 4*d* topological quantum field theories, via its connection with the geometric Langlands duality.

11h30 Javier FRESÁN
Stabilité homologique et moments de fonctions *L*

Une des questions fondamentales de la théorie analytique des nombres est de comprendre la distribution des valeurs centrales d'une famille de fonctions *L*, par exemple $L(\frac{1}{2}, \chi)$ lorsque χ parcourt tous les caractères de Dirichlet quadratiques. Dans ce cas, une conjecture de Conrey–Farmer–Keating–Rubinstein–Snaith prédit le comportement asymptotique de leurs moments. Je présenterai des travaux récents de Bergström–Diaconu–Petersen–Westerland et Miller–Pazt–Petersen–Randal-Williams établissant l'analogue de cette conjecture sur les corps de fonctions. Dans ce cadre, la formule de traces de Grothendieck–Lefschetz réduit l'étude des moments à celle de la cohomologie d'un espace de modules de courbes hyperelliptiques à coefficients dans un système local symplectique, et il s'agit alors de démontrer un théorème de stabilité homologique du même style que la conjecture de Mumford (théorème de Madsen–Weiss) pour l'espace de modules de toutes les courbes. J'expliquerai les grandes lignes des arguments de topologie algébrique qui permettent de le faire, notamment le rôle des « applications de scanner ».

14h30 Claire DEBORD
Hypoellipticité de polynômes de champs de vecteurs et conjectures de Helffer et Nourrigat,
d'après I. Androulidakis, O. Mohsen et R. Yuncken

On étudie ici la géométrie sous-riemannienne sur une variété M induite par une famille finie F de champs de vecteurs satisfaisant la condition de Hörmander, ainsi que les opérateurs différentiels obtenus comme polynômes en les éléments de F. Un tel opérateur D est hypoelliptique si, pour toute fonction lisse f, les solutions u de l'équation $Du = f$ sont elles aussi lisses. Une notion plus fine, celle des opérateurs hypoelliptiques maximaux, étend cette propriété en termes de régularité Sobolev, offrant un parallèle, en géométrie sous-riemannienne, aux opérateurs elliptiques.

En 1979, Helffer et Nourrigat ont proposé une conjecture caractérisant l'hypoellipticité maximale, généralisant le théorème principal de régularité des opérateurs elliptiques. Cette conjecture a été récemment confirmée grâce à des outils de géométrie non commutative. Un élément central de ce travail est une généralisation naturelle en géométrie sous-riemannienne, introduite par Mohsen, du groupoïde tangent de Connes, dans lequel apparaissent tous les cônes tangents, ingrédients clés dans le travail de Helffer et Nourrigat. En collaboration avec Androulidakis et Yuncken, Mohsen a développé un calcul pseudodifférentiel dans ce contexte, introduisant notamment la notion de symbole principal. Ils obtiennent que l'inversibilité de ce symbole équivaut à l'hypoellipticité maximale, validant ainsi la conjecture.

Cet exposé présentera les ingrédients et les grandes lignes de ces avancées novatrices.

16h00 Raphaël CÔTE
Résolution en solitons pour des équations de type ondes non linéaires énergie-critiques,
d'après Duyckaerts–Kenig–Merle et Jendrej–Lawrie

La conjecture de résolution en solitons est un énoncé général, étayé par de nombreuses simulations numériques, qui décrit la dynamique des équations aux dérivées partielles dispersives non linéaires. Elle affirme, que de façon générique, les solutions se comportent en temps grand comme une somme de solitons découplés. Les solitons sont des solutions rigides et très spécifiques : selon le contexte, il peut s'agir d'ondes progressives ou de solutions stationnaires, minimales dans un certain sens. Un des grands succès de la méthode du scattering inverse est la preuve de la résolution en solitons pour certaines équations intégrables, comme l'équation de Korteweg–de Vries. Je vais décrire des progrès récents concernant cette conjecture, pour des EDP de type ondes avec une non linéarité de type « énergie-critique » (qui ne sont pas intégrables), issus d'une série de travaux de Duyckaerts–Kenig–Merle et collaborateurs, et de Jendrej–Lawrie.